Mouvement brownien et calcul stochastique

Partiel du 5 décembre 2025

2 heures 30, sans documents

Barème approximatif. Ex.1 : 5 pts, Ex.2 : 4 pts, Ex.3 : 4 pts, Ex.4 : 8 pts

Exercice 1. On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ issu de 0. Pour tout $a > 0$, on pose

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}.$$

(1) Montrer qu'il existe une constante $\rho \in]0,1[$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[\sigma_1 > n] \leq \rho^n.$$

(*On pourra observer que* $\{\sigma_1 > n\} \subset \{|B_1 - B_0| \leq 2, |B_2 - B_1| \leq 2, \ldots, |B_n - B_{n-1}| \leq 2\}$)
En déduire que $\mathbb{E}[(\sigma_1)^p] < \infty$ pour tout entier $p \geq 1$.

(2) Montrer via une application du théorème d'arrêt à une martingale bien choisie que $\mathbb{E}[\sigma_a] = a^2$, pour tout $a > 0$.

(3) On fixe $a > 0$ et on définit par récurrence une suite de temps d'arrêt $(\sigma_a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\sigma_a^0 = 0\ ,\ \sigma_a^1 = \sigma_a\ ,\ \sigma_a^{k+1} = \inf\{t > \sigma_a^k : |B_t - B_{\sigma_a^k}| = a\}.$$

(On ne demande pas de vérifier que les σ_a^k sont des temps d'arrêt.) Montrer que les variables aléatoires $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k$, $k \in \mathbb{N}$ sont indépendantes et de même loi. En prenant $a = 2^{-n}$, déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} = 1 \qquad \text{p.s.}$$

(*On pourra majorer la variance de* $\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}}$)

Dans les exercices suivants, on se place sur un espace de probabilité muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 2. Soit M une martingale locale avec $M_0 = 0$.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < 0 < b$. On pose

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : M_t \notin]a,b[\}$$

avec la convention habituelle $\inf \varnothing = \infty$. Justifier le fait que $T_{a,b}$ est un temps d'arrêt.

(2) On suppose que $T_{a,b} < \infty$ p.s. Calculer la quantité

$$\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b).$$

(3) On suppose dans cette question que

$$\sup_{t\geq 0} M_t = +\infty\,, \quad \text{p.s.}$$

Montrer que

$$\inf_{t\geq 0} M_t = -\infty\,, \quad \text{p.s.}$$

Exercice 3. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ une (vraie) martingale à trajectoires continues **uniformément intégrable**, telle que $Y_0 = 0$. On note $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$. Soit aussi $p \geq 1$ un réel fixé. On dit que la martingale Y vérifie la propriété (P) s'il existe une constante C telle que, pour tout temps d'arrêt T, on ait

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C.$$

(1) Montrer que si Y_∞ est bornée, la martingale Y vérifie la propriété (P).

(2) Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Montrer que la martingale $Y_t = B_{t\wedge 1}$ vérifie la propriété (P). (*On pourra vérifier que la variable aléatoire* $\sup_{t\leq 1}|B_t|$ *est dans* L^p.)

(3) Montrer que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C, si et seulement si pour tout temps d'arrêt T,

$$\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C\,\mathbb{P}[T < \infty].$$

(*On pourra utiliser les temps d'arrêt* T^A *définis en cours pour* $A \in \mathcal{F}_T$.)

Exercice 4. Soit M une (vraie) martingale à trajectoires continues telle que $M_0 = 0$. On suppose que $\mathbb{E}[(M_t)^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. On introduit le processus croissant $(M_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t^* = \sup\{|M_s| : s \leq t\}.$$

(1) Justifier le fait que, pour tout temps d'arrêt borné T, on a

$$\mathbb{E}[(M_T)^2] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T]\,, \qquad \mathbb{E}[(M_T^*)^2] \leq 4\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T].$$

(2) Soit $x > 0$, et soit T_x le temps d'arrêt défini par $T_x = \inf\{s \geq 0 : (M_s)^2 \geq x\}$ (avec la convention habituelle $\inf \varnothing = \infty$). Montrer que, pour tout temps d'arrêt borné T, on a

$$\mathbb{P}((M_T^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[(M_{T_x\wedge T})^2] \leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T].$$

(*On observera que la propriété* $\{(M_T^*)^2 \geq x\}$ *équivaut à* $\{T_x \leq T\}$.)

(3) Soit maintenant $S_x = \inf\{s \geq 0 : \langle M, M\rangle_s \geq x\}$, et soit $t \geq 0$ fixé. Montrer que

$$\mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_{S_x\wedge t}] + \mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x).$$

(4) Déduire de la question précédente que

$$\mathbb{P}((M_t^*)^2 \geq x) \leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t\, \mathbf{1}_{\{\langle M,M\rangle_t < x\}}] + 2\,\mathbb{P}(\langle M, M\rangle_t \geq x).$$

(5) Soit $q \in]0, 1[$. Montrer que

$$\mathbb{E}[(M_t^*)^{2q}] \leq (2 + \frac{q}{1-q})\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t^q],$$

puis que cette inégalité reste vraie si on suppose seulement que M est une martingale locale telle que $M_0 = 0$.

Corrigé.

Exercice 1. (1) Si $\sigma_1 > n$, on a $|B_t| < 1$ pour tout $t \in [0,n]$, d'où $|B_j - B_{j-1}| \leq 2$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$. Donc

$$\mathbb{P}(\sigma_1 > n) \leq \mathbb{P}(|B_1 - B_0| \leq 2, \ldots, |B_n - B_{n-1}| \leq 2) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(|B_j - B_{j-1}| \leq 2) = (\mathbb{P}(|B_1| \leq 2))^n\,,$$

en utilisant le fait que les v.a. $B_j - B_{j-1}$ sont indépendantes et de même loi. Finalement, puisque B_1 suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on a $\mathbb{P}(|B_1| \leq 2) = \rho < 1$.
Si $p \geq 1$, on peut majorer

$$\mathbb{E}[(\sigma_1)^p] \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[n < \sigma_1 \leq n+1]\,(n+1)^p \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\,(n+1)^p < \infty.$$

(2) On sait que $B_t^2 - t$ est une martingale. D'après le théorème d'arrêt (pour des t.a. bornés), on a $\mathbb{E}[B^2_{t\wedge\sigma_a} - (t \wedge \sigma_a)] = 0$ et donc $\mathbb{E}[B^2_{t\wedge\sigma_a}] = \mathbb{E}[t \wedge \sigma_a]$ pour tout $t \geq 0$. Quand $t \to \infty$, $\mathbb{E}[t \wedge \sigma_a]$ converge vers $\mathbb{E}[\sigma_a]$ par convergence monotone. Puisque $|B_{t\wedge\sigma_a}| \leq a$ (et qu'on sait que $\sigma_a < \infty$ p.s.), on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir que $\mathbb{E}[B^2_{t\wedge\sigma_a}]$ converge quand $t \to \infty$ vers $\mathbb{E}[B^2_{\sigma_a}] = a^2$. On conclut que $\mathbb{E}[\sigma_a] = a^2$.

(3) Les propriétés du mouvement brownien montrent que les t.a. σ_a^k sont finis p.s. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de B. Pour tout entier $k \geq 1$, si on pose $B_t^{(\sigma_a^k)} = B_{\sigma_a^k + t} - B_{\sigma_a^k}$, la propriété de Markov forte dit que le processus $(B_t^{(\sigma_a^k)})_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien (issu de 0) et est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\sigma_a^k}$. Puisque $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k = \inf\{t \geq 0 : |B_t^{(\sigma_a^k)}| = a\}$, il en découle que $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k$ a même loi que σ_a et est indépendante de $\mathcal{F}_{\sigma_a^k}$, donc des v.a. $\sigma_a^1, \sigma_a^2 - \sigma_a^1, \ldots, \sigma_a^k - \sigma_a^{k-1}$ (puisque, si $j \leq k$, σ_a^j est $\mathcal{F}_{\sigma_a^j}$-mesurable et $\mathcal{F}_{\sigma_a^j} \subset \mathcal{F}_{\sigma_a^k}$).

Un argument de changement d'échelle montre que σ_a a même loi que $a^2\sigma_1$. En particulier,

$$\mathbb{E}[\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}}] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{2^{2n}} (\sigma^j_{2^{-n}} - \sigma^{j-1}_{2^{-n}})\Big] = 2^{2n} \times 2^{-2n}\mathbb{E}[\sigma_1] = 1.$$

Mais puisque les v.a. $\sigma^j_{2^{-n}} - \sigma^{j-1}_{2^{-n}}$ sont indépendantes, on a aussi

$$\mathrm{var}(\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}}) = \sum_{j=1}^{2^{2n}} \mathrm{var}(\sigma^j_{2^{-n}} - \sigma^{j-1}_{2^{-n}}) = 2^{2n} \times 2^{-4n}\mathrm{var}(\sigma_1) = C\,2^{-2n}$$

où $C = \mathrm{var}(\sigma_1)$ (on utilise la question (1) pour observer que σ_1 est dans L^2). Finalement,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}} - 1)^2\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[(\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}} - 1)^2\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}(\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}}) < \infty$$

d'où la série de terme général $(\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}} - 1)^2$ converge p.s., et donc $\sigma^{2^{2n}}_{2^{-n}} - 1$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2. (1) $T_{a,b}$ est le temps d'entrée dans le fermé $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ du processus M_t qui est adapté et à trajectoires continues.

(2) Le processus arrêté $M^{T_{a,b}}$ est encore une martingale locale, qui est bornée par $|a| \vee b$. C'est donc une vraie martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt montre que $\mathbb{E}[M_{T_{a,b}}] = \mathbb{E}[M_0] = 0$, d'où (puisque $T_{a,b} < \infty$ p.s.) $a\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = a) + b\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = 0$. Mais toujours parce

que $T_{a,b} < \infty$ p.s., on a aussi $\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = a) + \mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = 1$. Il en découle que

$$\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

(3) L'hypothèse entraîne que $T_{a,b} < \infty$ p.s. pour tout choix de $a < 0 < b$. Fixons $a < 0$ et notons $T_a = \inf\{t \geq 0 : M_t = a\}$. Alors l'événement $\{T_a < \infty\}$ est la réunion croissante de la suite d'événements $E_n = \{M_{T_{a,n}} = a\}$. En conséquence,

$$\mathbb{P}(T_a < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{T_{a,n}} = a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-a} = 1.$$

Donc $T_a < \infty$ p.s., pour tout $a < 0$, ce qui suffit pour conclure.

Exercice 3.

(1) Pour une martingale u.i., si T est un temps d'arrêt on a $Y_T = \mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_T]$, donc la condition $|Y_\infty| \leq K$ entraîne aussi $|Y_T| \leq K$ et $|Y_\infty - Y_T| \leq 2K$, ce qui donne (P) avec $C = (2K)^p$.

(2) Puisque $\sup\{B_t,\, 0 \leq t \leq 1\}$ a même loi que $|B_1|$ et est donc dans L^p pour tout $1 \leq p < \infty$, la majoration $\sup\{|B_t|,\, 0 \leq t \leq 1\} \leq \sup\{B_t,\, 0 \leq t \leq 1\} + \sup\{-B_t,\, 0 \leq t \leq 1\}$ montre que $\sup\{|B_t|,\, 0 \leq t \leq 1\}$ est dans L^p.

Soit T un t.a. avec $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ (sinon la propriété demandée est triviale). Si $Y_t = B_{t\wedge 1}$ on a $Y_\infty = B_1$ et $Y_T = B_{T\wedge 1}$. Notons B' le processus défini par $B'_t = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\,(B_{T+t} - B_T)$. Alors,

$$|Y_\infty - Y_T| = |B_1 - B_{T\wedge 1}| \leq \mathbf{1}_{\{T\leq 1\}} \sup_{0\leq t\leq 1} |B_{T+t} - B_T| = \mathbf{1}_{\{T\leq 1\}} \sup_{0\leq t\leq 1} |B'_t|.$$

Donc, si $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \,|\, \mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A |Y_\infty - Y_T|^p] \leq \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{A\cap\{T\leq 1\}} \sup_{0\leq t\leq 1} |B'_t|^p\Big] = \mathbb{P}(A \cap \{T \leq 1\})\, \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq 1} |B_t|^p\Big],$$

où pour la dernière égalité on utilise la propriété de Markov forte, selon laquelle B' est sous la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid T < \infty)$ un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ donc de $A \cap \{T \leq 1\}$. Finalement, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \,|\, \mathcal{F}_T]] \leq C\,\mathbb{P}(A)$, avec $C = \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq 1} |B_t|^p]$, et, puisque $\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \,|\, \mathcal{F}_T]$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, cela suffit pour dire que $\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C$ (prendre $A = \{\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] > C\}$ pour trouver $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] - C)] \leq 0$, d'où $\mathbb{P}(A) = 0$).

(3) Supposons d'abord que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C. Alors, si T est un t.a.

$$\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} |Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T]] \leq C\,\mathbb{P}(T < \infty).$$

Inversement, si $\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C\,\mathbb{P}(T < \infty)$ pour tout t.a. T, alors, en remplaçant T par le t.a. T^A (où $A \in \mathcal{F}_T$) on trouve

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A |Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[|Y_{T^A} - Y_\infty|^p] \leq C\,\mathbb{P}(T^A < \infty) \leq C\,\mathbb{P}(A).$$

Comme cela est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, cela suffit pour dire que $\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C$.

Exercice 4. (1) D'après le cours, si M une (vraie) martingale à trajectoires continues et de carré intégrable, telle que $M_0 = 0$, le processus $(M_t)^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une vraie martingale, et on a aussi $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. En appliquant le théorème d'arrêt (cas borné) à la martingale $(M_t)^2 - \langle M, M\rangle_t$, on obtient immédiatement, pour tout t.a borné T,

$$\mathbb{E}[(M_T)^2 - \langle M, M\rangle_T] = 0.$$

L'inégalité de Doob dans L^2, appliquée à la martingale arrêtée M^T, montre, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(M^*_{t\wedge T})^2] \leq 4\,\mathbb{E}[(M_{t\wedge T})^2] = 4\,\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_{t\wedge T}]$$

la dernière égalité d'après la première partie de la question. Un argument de convergence monotone montre ensuite que $\mathbb{E}[(M^*_{t\wedge T})^2]$ converge vers $\mathbb{E}[(M^*_T)^2]$ et $\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{t\wedge T}]$ converge vers $\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T]$ quand $t\uparrow\infty$, d'où le résultat demandé.

(2) La propriété $(M^*_T)^2\geq x$ a lieu si et seulement si $T_x\leq T$, et alors on a $(M_{T_x\wedge T})^2=(M_{T_x})^2=x$. Donc,

$$\mathbb{P}(M^*_T\geq x)=\mathbb{P}(T_x\leq T)\leq \mathbb{P}((M_{T_x\wedge T})^2=x)\leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[(M_{T_x\wedge T})^2]$$

en utilisant l'inégalité de Markov. Ensuite, en utilisant la question (1),

$$\mathbb{E}[(M_{T_x\wedge T})^2]=\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{T_x\wedge T}]\leq \mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T].$$

(3) L'événement $\{(M^*_t)^2\geq x\}$ est contenu dans la réunion de $\{(M^*_{S_x\wedge t})^2\geq x\}$ et de $\{S_x\leq t\}$ (simplement parce que si $S_x>t$ on a $M^*_{S_x\wedge t}=M^*_t$). En appliquant la question (2) au t.a. $T=S_x\wedge t$ on a

$$\mathbb{P}((M^*_{S_x\wedge t})^2\geq x)\leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{S_x\wedge t}],$$

et par ailleurs les événements $\{S_x\leq t\}$ et $\{\langle M,M\rangle_t\geq x\}$ coïncident, donc

$$\mathbb{P}(S_x\leq t)=\mathbb{P}(\langle M,M\rangle_t\geq x).$$

En combinant ces deux observations, on a

$$\mathbb{P}((M^*_t)^2\geq x)\leq \mathbb{P}((M^*_{S_x\wedge t})^2\geq x)+\mathbb{P}(S_x\leq t)\leq \frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{S_x\wedge t}]+\mathbb{P}(\langle M,M\rangle_t\geq x).$$

(4) En utilisant à nouveau le fait que $\{S_x\leq t\}=\{\langle M,M\rangle_t\geq x\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{S_x\wedge t}]&=\frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t\,\mathbf{1}_{\{S_x>t\}}]+\frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_{S_x}\,\mathbf{1}_{\{S_x\leq t\}}]\\&=\frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t\,\mathbf{1}_{\{\langle M,M\rangle_t<x\}}]+\mathbb{P}(\langle M,M\rangle_t\geq x)\end{aligned}$$

puisque $\langle M,M\rangle_{S_x}=x$ sur $\{S_x<\infty\}$. Il suffit ensuite de reporter cette majoration dans celle de la question (3).

(5) Le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M^*_t)^{2q}]&=q\int_0^\infty \mathbb{P}((M^*_t)^2\geq x)\,x^{q-1}\,\mathrm{d}x\\&\leq q\int_0^\infty\Big(\frac{1}{x}\,\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t\,\mathbf{1}_{\{\langle M,M\rangle_t<x\}}]+2\,\mathbb{P}(\langle M,M\rangle_t\geq x)\Big)x^{q-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

et d'une part

$$2q\int_0^\infty \mathbb{P}(\langle M,M\rangle_t\geq x)\,x^{q-1}\,\mathrm{d}x=2\,\mathbb{E}[(\langle M,M\rangle_t)^q],$$

d'autre part,

$$q\int_0^\infty \mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t\,\mathbf{1}_{\{\langle M,M\rangle_t<x\}}]x^{q-2}\mathrm{d}x=q\,\mathbb{E}\Big[\langle M,M\rangle_t\int_{\langle M,M\rangle_t}^\infty x^{q-2}\mathrm{d}x\Big]=\frac{q}{1-q}\,\mathbb{E}[(\langle M,M\rangle_t)^q].$$

Si M est seulement une martingale locale issue de 0, il suffit d'appliquer le résultat obtenu à la (vraie) martingale bornée $M_{t\wedge T_n}$, où $T_n=\inf\{t\geq 0:|M_t|\geq n\}$, puis de faire tendre $n\to\infty$ en utilisant le théorème de convergence monotone.