M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris-Sud
Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°5
Intégrale stochastique

Dans les exercices qui suivent, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 1.
Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0, et soit H un processus adapté à trajectoires continues. Montrer que $\frac{1}{B_t}\int_0^t H_s dB_s$ possède une limite en probabilité (que l'on déterminera) quand $t \downarrow 0$.

Exercice 2.

1. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que le processus
$$X_t = f(B_t)\,\exp\Big(-\int_0^t g(B_s)\,ds\Big)$$
est une semimartingale, dont on explicitera la décomposition comme somme d'une martingale et d'un processus à variation finie.
2. En déduire que X est une martingale locale si et seulement si la fonction f satisfait l'équation différentielle
$$f'' = 2g\,f$$
3. A partir de maintenant on suppose de plus que g est positive et à support compact contenu dans l'intervalle ouvert $]0,\infty[$. Justifier le fait qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle de la question **2.** qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. A partir de maintenant, on suppose que f est cette solution. Remarquer que f est constante sur $]-\infty, 0]$ et croissante.
4. Soit $a > 0$. On note $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que
$$E\Big[\exp\Big(-\int_0^{T_a} g(B_s)\,ds\Big)\Big] = \frac{1}{f(a)}.$$

Exercice 3. (Calcul stochastique avec le supremum)
Question préliminaire. Soit $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $m(0) = 0$, et soit $s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction croissante continue définie par
$$s(t) = \sup_{0\leq r\leq t} m(r).$$
Montrer que, pour toute fonction borélienne bornée h sur $\mathbb{R}$ et tout $t > 0$,
$$\int_0^t (s(r) - m(r))\,h(r)\,ds(r) = 0.$$
(On pourra observer que $\int \mathbf{1}_I(r)\,ds(r) = 0$ pour tout intervalle ouvert I qui ne rencontre pas $\{r \geq 0 : s(r) = m(r)\}$.)

1. Soit M une martingale locale telle que $M_0 = 0$, et soit, pour tout $t \geq 0$,
$$S_t = \sup_{0 \leq r \leq t} M_r.$$
Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Justifier l'égalité
$$\varphi(S_t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(S_s)\, dS_s.$$
2. Montrer que
$$(S_t - M_t)\, \varphi(S_t) = \Phi(S_t) - \int_0^t \varphi(S_s)\, dM_s$$
où $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y)\, dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que, pour tout $\lambda > 0$,
$$e^{-\lambda S_t} + \lambda(S_t - M_t)e^{-\lambda S_t}$$
est une martingale locale.
4. Soit $a > 0$ et $T = \inf\{t \geq 0 : S_t - M_t = a\}$. On suppose que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Montrer que $T < \infty$ p.s. et que S_T suit la loi exponentielle de paramètre $1/a$.

Exercice 4. (Aire de Lévy)

Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien en dimension deux, issu de 0 (en particulier $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants issus de 0). On pose pour tout $t \geq 0$:
$$\mathcal{A}_t = \int_0^t X_s\, dY_s - \int_0^t Y_s\, dX_s \qquad (\textit{aire de Lévy}).$$

1. Calculer $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}\rangle_t$ et en déduire que $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable (c'est-à-dire $E[\mathcal{A}_t^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$).
2. Soit $\lambda > 0$. Justifier l'égalité
$$E[e^{i\lambda \mathcal{A}_t}] = E[\cos(\lambda \mathcal{A}_t)].$$
3. Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. A l'aide de la formule d'Itô, expliciter les décompositions des semimartingales
$$\begin{aligned} Z_t &= \cos(\lambda \mathcal{A}_t) \\ W_t &= -\frac{f'(t)}{2}(X_t^2 + Y_t^2) + f(t) \end{aligned}$$
comme sommes d'une martingale locale et d'un processus à variation finie (on pourra commencer par écrire la décomposition de $X_t^2 + Y_t^2$). Vérifier que $\langle Z, W\rangle_t = 0$.
4. Montrer, en appliquant une nouvelle fois la formule d'Itô, que pour que le processus $Z_t\, e^{W_t}$ soit une martingale locale il suffit que la fonction f soit solution de l'équation différentielle
$$f''(t) = f'(t)^2 - \lambda^2\ .$$

5. Soit $r > 0$. Vérifier que la fonction
$$f(t) = -\log \operatorname{ch}(\lambda(r-t)),$$
est solution de l'équation différentielle de la question **4.** et en déduire la formule
$$E[e^{i\lambda \mathcal{A}_r}] = \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda r)}.$$

Exercice 5. (Problème de Dirichlet)
Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et soit f une fonction continue sur ∂D. On suppose qu'il existe une fonction $g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\bar{D}$ et de classe C^2 sur D, telle que $g = f$ sur ∂D et $\Delta g = 0$ dans D.
Soit $x \in D$ et soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien en dimension d issu de x. On pose $T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$. Montrer que
$$g(x) = E[f(B_T)].$$
(On pourra introduire les temps d'arrêt $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \operatorname{dist}(B_t, \partial D) \leq \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et montrer d'abord que $g(x) = \mathbb{E}[g(B_{T_\varepsilon})]$.) En déduire que la fonction g, si elle existe, est unique.

Exercice 6.
Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0 et soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}[e^{\frac{T}{2}}] < +\infty$. Montrer que $\mathbb{E}[e^{B_T - \frac{T}{2}}] = 1$.

Exercice 7. (Application de la formule de Cameron-Martin)
Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. On pose $B_t^* = \sup\{|B_s| : s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$.

1. On note $U_1 = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}$ puis $V_1 = \inf\{t \geq U_1 : B_t = 0\}$. Justifier rapidement l'égalité $P[B^*_{V_1} < 2] = 1/2$, et en déduire qu'on peut trouver deux constantes $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ telles que
$$P[V_1 \geq \alpha,\, B^*_{V_1} < 2] = \gamma > 0.$$
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $P[B^*_{n\alpha} < 2] \geq \gamma^n$. On pourra construire une suite convenable de temps d'arrêt $V_1, V_2, \ldots$ tels que, pour chaque $n \geq 2$,
$$P[V_n \geq n\alpha\,,\, B^*_{V_n} < 2] \geq \gamma\, P[V_{n-1} \geq (n-1)\alpha\,,\, B^*_{V_{n-1}} < 2].$$
Conclure que, pour tous $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$, $P[B^*_t \leq \varepsilon] > 0$.
3. Soit h une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $h(0) = 0$, et soit $K > 0$. Montrer par une application convenable de la formule d'Itô qu'on peut trouver une constante A telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\Big| \int_0^K h'(s)\, dB_s \Big| \leq A\,\varepsilon \quad \text{p.s. sur l'ensemble } \{B^*_K \leq \varepsilon\}.$$
4. On pose $X_t = B_t - h(t)$ et $X^*_t = \sup\{|X_s| : s \leq t\}$. Déduire de la question (3) que
$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P[X^*_K \leq \varepsilon]}{P[B^*_K \leq \varepsilon]} = \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_0^K h'(s)^2\, ds \Big).$$