M2 Mathématiques de l'Aléatoire — Université Paris-Sud
Calcul stochastique et Processus de Markov

Feuille d'exercices n°6
Processus de Markov

Dans les exercices qui suivent, (E,d) est un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini et $(Q_t)_{t\geq 0}$ un semigroupe de Feller sur E. On se donne un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires càdlàg à valeurs dans E, et une famille de mesures de probabilité $(P_x)_{x\in E}$, tels que sous P_x, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov, relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)$, de semigroupe $(Q_t)_{t\geq 0}$, issu du point x. On note L le générateur du semigroupe $(Q_t)_{t\geq 0}$, $D(L)$ le domaine de L et pour tout $\lambda > 0$, R_λ la λ-résolvante.

Exercice 1. (Formule de Feynman-Kac) Soit $v : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue bornée. Pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$, on pose pour toute fonction $\varphi \in B(E)$,

$$Q_t^* \varphi(x) = E_x\Big[e^{-\int_0^t v(X_s)\,ds}\,\varphi(X_t)\Big].$$

1. Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in B(E)$, $Q_{t+s}^*\varphi = Q_t^*(Q_s^*\varphi)$.
2. En observant que

$$1 - \exp\Big(-\int_0^t v(X_s)\,ds\Big) = \int_0^t v(X_s)\,\exp\Big(-\int_s^t v(X_r)\,dr\Big)\,ds$$

montrer que, pour toute fonction $\varphi \in B(E)$,

$$Q_t\varphi - Q_t^*\varphi = \int_0^t Q_s(v\,Q_{t-s}^*\varphi)\,ds.$$

3. On suppose que $\varphi \in D(L)$. Montrer que

$$\frac{d}{dt} Q_t^*\varphi_{|t=0} = L\varphi - v\varphi.$$

Exercice 2. (Fonction d'échelle) Dans cet exercice on suppose que $E = \mathbb{R}_+$ et que les trajectoires de X sont continues. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$$

et

$$\varphi(x) := P_x(T_0 < \infty).$$

1. Montrer que pour $0 \leq x \leq y$,

$$\varphi(y) = \varphi(x) P_y(T_x < \infty).$$

2. On suppose que $\varphi(x) < 1$ et $\sup_{t\geq 0} X_t = +\infty$, P_x p.s., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour $0 \leq x \leq y$,

$$P_x(T_0 < T_y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{1 - \varphi(y)}.$$

Exercice 3. (Quasi-continuité à gauche d'un processus de Feller) Dans tout l'exercice, on fixe le point de départ $x \in E$. Pour tout $t > 0$ on note $X_{t-}(\omega)$ la limite à gauche de la fonction $s \mapsto X_s(\omega)$ au point t. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite **strictement** croissante de temps d'arrêt, et soit $T = \lim \uparrow T_n$. On suppose qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $T \leq C$. L'objectif est de montrer que $X_{T-} = X_T$, P_x p.s.

1. Soit $f \in C_0(E)$. Justifier le fait que la suite $f(X_{T_n})$ converge P_x p.s. et identifier sa limite.
2. On suppose maintenant que $f \in D(L)$ et on note $h = Lf$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$E_x[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] = f(X_{T_n}) + E_x\Big[\int_{T_n}^{T} h(X_s)\,ds \,\Big|\, \mathcal{F}_{T_n}\Big].$$
3. On rappelle que, d'après la théorie des martingales à temps discret, on a
$$E_x[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}, L^1} E_x[f(X_T) \mid \widetilde{\mathcal{F}_T}]$$
où
$$\widetilde{\mathcal{F}_T} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{T_n}.$$
Déduire des questions **1.** et **2.** que
$$E_x[f(X_T) \mid \widetilde{\mathcal{F}_T}] = f(X_{T-}).$$
4. Montrer que la conclusion de la question **3.** reste vraie si on suppose seulement $f \in C_0(E)$, et en déduire que pour tout choix de $f, g \in C_0(E)$,
$$E_x[f(X_T)g(X_{T-})] = E_x[f(X_{T-})g(X_{T-})].$$
Conclure que $X_{T-} = X_T$, P_x p.s.