NON RATIONALITÉ STABLE D'HYPERSURFACES CUBIQUES SUR DES CORPS NON ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par

J.-L. Colliot-Thélène

Introduction

Soit F un corps. Soit X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe X, telle que $X(F) \neq \emptyset$. On s'intéresse aux propriétés suivantes.

(i) Rationalité : La F-variété X est F-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^d_F$.

(ii) Rationalité stable : Il existe un entier r tel que la F-variété $X \times_F \mathbf{P}^r_F$ est F-birationnellle à $\mathbf{P}^{r+d}$.

(iii) Rétracte rationalité : Il existe un ouvert non vide $U \subset X$, un entier s, un ouvert non vide $V \subset \mathbf{P}^s_F$ et un F-morphisme $V \to U$ qui admet une section.

(iv) R-trivialité : Pour tout corps L contenant F, l'ensemble $X_L(L)/R$ quotient de $X(L)$ par la R-équivalence sur X_L a exactement un élément.

(v) CH_0-trivialité : La F-variété X est universellement CH_0-triviale, c'est-à-dire que pour tout corps L contenant F, l'application degré $deg_L : CH_0(X_L) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (voir [**1, 6**]).

(vi) Trivialité de la cohomologie non ramifiée : Pour tout module fini galoisien M sur F d'ordre premier à la caractéristique de F, pour tout entier $i \geq 0$ et tout corps L contenant F, l'application naturelle $H^i(L, M) \to H^i_{nr}(L(X)/L, M)$ est un isomorphisme.

Chacune des propriétés implique la suivante. Pour le passage de (ii) à (iii) sur un corps quelconque, voir [**18**, Cor. 3.3]. Qu'en toute caractéristique l'hypothèse (iii) implique (iv) est établi par Kahn et Sujatha [**10**, Thm. 8.5.1 et Prop. 8.6.2]. Pour les définitions des différentes notions et des références pour les autres implications, on consultera [**10, 1, 21**].

Soit $X \subset \mathbf{P}^n_F$, avec $n = d + 1 \geq 3$ une hypersurface cubique lisse de dimension d possédant un point F-rationnel. Il est connu qu'une telle hypersurface est F-unirationnelle [**11**].

Pour F algébriquement clos, X est rationnelle si $d = 2$, non rationnelle si $d = 3$ et $\mathrm{char}(F) \neq 2$ (Clemens–Griffiths, Mumford, Murre). Pour $d \geq 4$, certaines hypersurfaces cubiques lisses de dimension paire sont rationnelles. Pour les hypersurfaces cubiques lisses de dimension impaire, on ne sait rien sur la rationalité, la rationalité stable, ou même la rétracte rationalité. Claire Voisin [**25**] a montré qu'il existe des hypersurfaces cubiques de dimension $d = 3$ sur $\mathbb{C}$ qui sont universellement CH_0-triviales. Elle a aussi établi cette dernière propriété pour de larges classes d'hypersurfaces cubiques de dimension $d = 4$.

Pour F non algébriquement clos, que peut-on dire ?

Pour F le corps des réels, B. Segre [**23**] observa qu'une surface cubique lisse $X/\mathbb{R}$ telle que l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ ait deux composantes connexes n'est pas $\mathbb{R}$-rationnelle. Cette observation se généralise. Ceci est discuté au §1, où l'on montre que pour tout entier $n \geq 3$ et tout corps $F \subset \mathbb{R}$ il existe des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$ qui ne sont pas CH_0-triviales, et en particulier ne sont pas stablement rationnelles.

Que peut-on dire lorsque le corps F n'est pas formellement réel, i.e. lorsque -1 est une somme de carrés dans F ?

Pour F un corps de caractéristique différente de 2, on note $u(F) \leq \infty$ le plus grand entier $n \leq \infty$ tel qu'il existe une forme quadratique anisotrope de rang n sur F. Rappelons que l'on a $u(F((t))) = 2u(F)$.

Pour $X \subset \mathbf{P}^3_F$, on peut utiliser le groupe de Brauer pour donner des exemples de surfaces cubiques non stablement rationnelles [**15**]. On donne facilement de tels exemples déjà sur un corps fini $\mathbb{F}$, sur $\mathbb{C}((x))$, et sur $\mathbb{C}(x)$.

Sur $F = \mathbb{C}((x))((y))$, D. Madore [**13**, Proposition 2.1] a construit, par un argument de spécialisation élaboré, une hypersurface cubique diagonale $X \subset \mathbf{P}^4_F$ telle que l'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ ne soit pas un isomorphisme. Ceci implique que X n'est pas rétracte rationnelle.

Sur F un corps p-adique quelconque et sur $F = \mathbb{F}((x))$ (avec $\mathbb{F}$ fini de caractéristique différente de 3), par spécialisation à une hypersurface cubique singulière sur un corps fini, A. Pirutka et l'auteur [**6**, Théorème 1.19] ont construit des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^4_F$ avec un F-point qui ne sont pas universellement CH_0-triviales. On en déduit de tels exemples sur tout corps global de caractéristique différente de 3.

Dans la prépublication récente [**2**], par spécialisation à une hypersurface cubique produit d'une quadrique et d'un hyperplan, Chatzistamatiou et Levine construisent des exemples d'hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_F$ avec un F-point, non universellement CH_0-triviales, et donc non rétractes rationnelles, dans la situation suivante : k un corps de caractéristique différente de 2, $F = k((x))$, $u(k) \geq 2^\ell + 1$ et $n = 2^\ell$. Une inspection de leur argument (voir §2 ci-dessous) montre qu'il suffit en fait de supposer $u(k) \geq 2^\ell$. On obtient ainsi de tels exemples $X \subset \mathbf{P}_F^{2^\ell}$ sur le corps $F = \mathbb{C}((\lambda_1))\dots((\lambda_{\ell+1}))$.

Je propose ici deux autres méthodes pour obtenir des hypersurfaces cubiques lisses, avec un point rationnel, qui ne sont pas rétractes rationnelles.

Au §3, sur $F = k((x))$, avec k un corps de caractéristique différente de 2, possédant une forme de Pfister anisotrope de dimension 2^ℓ, avec $\ell \geq 2$, par exemple sur $F = \mathbb{C}((\lambda_1))\dots((\lambda_{\ell+1}))$, je construis des exemples d'hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}_F^n$ avec un F-point, non rétractes rationnelles, pour tout entier n avec $3 \leq n \leq 2^{\ell-1}+1$. Ceci ne couvre pas le cas $n = 2^\ell$, obtenu par la méthode de Chatzistamatiou et Levine. L'argument donné utilise la spécialisation de la R-équivalence sur une fibre spéciale géométriquement intègre mais singulière en codimension 2 et un succédané de cohomologie non ramifiée sur la désingularisation de cette fibre.

Au §4, pour k un corps de caractéristique différente de 3 possédant un élément $a \notin k^{*3}$, par exemple pour $k = \mathbb{C}((\lambda_1))$, sur le corps $F = k((\lambda_2))\dots((\lambda_{\ell+1}))$ je construis des exemples d'hypersurfaces cubiques lisses diagonales $X \subset \mathbf{P}_F^n$ avec un F-point, non universellement CH_0-triviales, donc non rétractes rationnelles, pour tout entier n avec $3 \leq n \leq \ell+3$. L'argument donné utilise la cohomologie non ramifiée, dont on démontre par spécialisations successives qu'elle n'est pas constante.

Au §5, on compare les résultats des §2, 3 et 4 sur les corps de séries formelles itérées, d'abord sur les complexes puis sur les corps p-adiques.

1. Composantes connexes réelles

Théorème 1.1. — *Soit k un sous-corps de $\mathbb{R}$. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Dans chacun des cas suivants :*

(a) la k-variété X est k-rationnelle,

(b) la k-variété X est k-rétracte rationnelle,

(c) la k-variété X est universellement CH_0-triviale,

l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ est non vide et connexe.

Démonstration. — Il suffit d'établir le résultat dans le cas $k = \mathbb{R}$. Le cas (a) est un cas particulier de (b) qui d'après [**6**, Lemme 1.5] est un cas particulier de (c). Si la $\mathbb{R}$-variété X est universellement CH_0-triviale, en particulier l'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Ainsi X possède un zéro-cycle de degré 1, et donc un point réel. Soit $s \geq 1$ le nombre de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$. D'après [**5**, Prop. 3.2] (voir aussi [**4**, Thm. 3.1]), pour toute $\mathbb{R}$-variété projective, lisse, géométriquement connexe avec $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, on a $CH_0(X)/2 = (\mathbb{Z}/2)^s$. Ainsi $s = 1$. □

Remarque 1.2. — Sous l'hypothèse (a), on peut établir la connexité de $X(\mathbb{R})$ par des méthodes plus classiques. On montre directement que le nombre de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ est un invariant birationnel des $\mathbb{R}$-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes (ce qui résulte aussi du résultat sur le groupe de Chow mentionné ci-dessus).

Proposition 1.3. — *Soit k un sous-corps de $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_k$ telle que l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ ait deux composantes connexes. Une telle hypersurface n'est pas rétracte rationnelle.*

Démonstration. — Soit $X \subset \mathbf{P}^{n+1}_k$ donnée par l'annulation de

$$R(x_1, \ldots, x_n, u, v) := (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)v - u(u-v)(u+v).$$

Le lieu singulier est donné par $u = v = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, donc ne possède par de $\mathbb{R}$-point. Ainsi $X(\mathbb{R})$ est une variété C^∞. On vérifie que cette variété possède deux composantes connexes. Soit en effet $H \subset \mathbf{P}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ l'hyperplan à l'infini défini par $v = 0$, et soit $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ son complémentaire. La trace de $X_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbf{A}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ est donnée par l'équation affine

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = u(u-1)(u+1)$$

dont le lieu réel est la réunion disjointe d'une partie bornée satisfaisant $-1 \leq u \leq 0$ et d'une partie non bornée satisfaisant $u \geq 1$. Ceci montre que $X(\mathbb{R})$ est disconnexe, donc a deux composantes connexes, car c'est le maximum possible pour une hypersurface cubique X dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{R}}$ avec $n \geq 2$.

Soit $S(x_1, \ldots, x_n, u, v)$ une forme cubique sur $\mathbb{Q}$ définissant une hypersurface cubique lisse, par exemple

$$S(x_1, \ldots, x_n, u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + u^3 + v^3.$$

Pour $t \in k \subset \mathbb{R}$ non nul et très proche de 0, l'hypersurface cubique X_t de $\mathbf{P}^{n+1}_k$ définie par $R + tS = 0$ est lisse. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, les variétés C^∞ données par $X_t(\mathbb{R})$ et $X_0(\mathbb{R}) = X(\mathbb{R})$ sont difféomorphes (théorème d'Ehresmann), et en particulier ont le même nombre de composantes connexes. La deuxième partie de l'énoncé résulte du théorème 1.1. $\square$

2. Résultats de Chatzistamatiou et Levine

Commençons par rappeler un résultat de Totaro [**24**, Lemme 2.4 et argument subséquent]. Pour X une k-variété propre, on note $A_0(X)$ le noyau de l'application degré $deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$.

Lemme 2.1. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel k et de corps des fractions K. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma intègre propre et plat. Soit $X = \mathcal{X} \times_R K$. Supposons que la fibre spéciale Y/k est la réunion de deux diviseurs Y_1 et Y_2 sans composante commune. Soit Z le k-schéma $Y_1 \cap Y_2$. Supposons Y_1/k lisse et $A_0(X) = 0$. Alors :*

(i) L'application $A_0(Z) \to A_0(Y_1)$ est surjective.

(ii) Si de plus l'indice de Z est égal à celui de Y_1, par exemple si Z possède un zéro-cycle de degré 1, alors l'application $CH_0(Z) \to CH_0(Y_1)$ est surjective.

Démonstration. — On a une suite exacte

$$CH_0(Z) \to CH_0(Y_1) \oplus CH_0(Y_2) \to CH_0(Y) \to 0$$

où la seconde flèche envoie un couple (z_1, z_2) sur $z_1 - z_2$.

Comme Y_1 est lisse, tout zéro-cycle de degré zéro sur Y_1 est rationnellement équivalent sur Y_1 à un zéro-cycle z de degré zéro à support dans le complémentaire de Z dans Y_1. Un tel zéro-cycle z se relève en un zéro-cycle de degré zéro sur X, dont l'image par la flèche de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ est l'image du couple $(z, 0) \in CH_0(Y_1) \oplus CH_0(Y_2)$. L'hypothèse $A_0(X) = 0$ assure que cette image est nulle. La suite exacte ci-dessus établit alors l'existence d'une classe $\zeta \in CH_0(Z)$ dont l'image est $(z, 0) \in CH_0(Y_1) \oplus CH_0(Y_2)$. En particulier le degré de ζ est zéro, ce qui établit l'assertion (i). L'assertion (ii) est alors claire. □

Voici une version du résultat utilisé par Chatzistamatiou et Levine [**2**].

Lemme 2.2. — *Soit R un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et de corps des fractions K. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma intègre propre et plat. Soit $X = \mathcal{X} \times_R K$. Supposons que la fibre spéciale Y/k est, comme diviseur, la somme de deux diviseurs effectifs Y_1 et Y_2, qui comme k-variétés sont lisses et géométriquement intègres. Soit Z le k-schéma $Y_1 \cap Y_2$.*

Supposons la K-variété X géométriquement intègre et universellement CH_0-triviale. Si l'indice de $Y_{2k(Y_1)}$ sur le corps $k(Y_1)$ est égal à 1, alors l'application $CH_0(Z_{k(Y_1)}) \to CH_0(Y_{1k(Y_1)})$ est surjective, et l'indice de $Z_{k(Y_1)}$ sur $k(Y_1)$ est égal à 1.

Démonstration. — Il existe un homomorphisme local $R \to S$ d'anneaux de valuation discrète, avec S hensélien, de corps des fractions L induisant l'inclusion $k \subset k(Y_1)$ au niveau des corps résiduels. On considère alors la suite exacte

$$CH_0(Z_{k(Y_1)}) \to CH_0(Y_{1k(Y_1)}) \oplus CH_0(Y_{2k(Y_1)}) \to CH_0(Y_{k(Y_1)}) \to 0.$$

Soit z un zéro-cycle sur $Y_{1k(Y_1)}$. Comme Y_1 est lisse, ce zéro-cycle est rationnellement équivalent à un zéro-cycle z_1 à support étranger à Z. Par hypothèse, il existe un zéro-cycle w sur $Y_{2k(Y_1)}$ de degré égal à celui de z_1. Comme Y_2 est lisse, ce zéro-cycle w est rationnellement équivalent sur $Y_{2k(Y_1)}$ à un zéro-cycle z_2 dont le support est étranger à Z. Le zéro-cycle $z_1 - z_2$ sur $Y_{k(Y_1)}$ est à support dans le lieu lisse du morphisme $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ (R)$. Il se relève donc en un zéro-cycle de degré zéro sur X_L (ceci vaut même sur un corps non parfait). Comme la K-variété X est universellement CH_0-triviale, par spécialisation [**8**, Prop. 2.6], $z_1 - z_2$ est rationnellement équivalent à zéro sur $Y_{k(Y_1)}$. De la suite exacte ci-dessus on tire l'existence d'une classe de zéro-cycle sur $Z_{k(Y_1)}$ d'image la classe de z dans $CH_0(Y_{1k(Y_1)})$. Ceci établit la première partie de l'énoncé. Appliquant le résultat au zéro-cycle z de $Y_{1k(Y_1)}$ de degré 1 défini par le point générique de Y_1, on obtient la seconde partie de l'énoncé. □

Remarque 2.3. — On peut donner des variantes de l'énoncé ci-dessus. Supposons Y_1/k et Y_2/k géométriquement intègres mais non nécessairement lisses. Supposons qu'il existe un zéro-cycle de degré 1 à support dans le lieu lisse de $Y_2 \setminus Z$. Alors l'indice de $Z_{k(Y_1)}$ sur $k(Y_1)$ est égal à 1. En effet, le point générique η de Y_1 définit un $k(Y_1)$-point lisse de $Y_{1k(Y_1} \setminus Z_{k(Y_1}$. L'argument ci-dessus établit alors l'existence d'un zéro-cycle sur $Z_{k(Y_1)}$ d'image la classe de η dans $CH_0(Y_{1k(Y_1)})$.

Théorème 2.4. — *(Chatzistamatiou et Levine) Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Si sur le corps k il existe une forme quadratique anisotrope en $n = 2^\ell$ variables, alors il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_{k((t))}$ qui possède un $k((t))$-point et qui n'est pas universellement CH_0-triviale.*

Démonstration. — Soit $\ell \geq 1$, soit k un corps, $car(k) \neq 2$, et soit $q(x_1, \dots, x_n)$ une forme quadratique anisotrope de rang exactement $n = 2^\ell$. Soit

$$q'(x_0, \dots, x_n) := q(x_1, \dots, x_n) + x_0^2.$$

Un théorème de Hoffmann [**9**] (dont une nouvelle démonstration fut donnée par Merkurjev [**16**] au moyen de formules du degré à la Rost) assure qu'il n'y a pas d'application rationnelle de la quadrique défine par $q' = 0$ dans $\mathbf{P}^n_k$ vers la quadrique définie par $q = 0$ dans $\mathbf{P}^{n-1}_k$. Il n'y a pas besoin ici de supposer que la forme quadratique q' est anisotrope. Soit $Y_1 \subset \mathbf{P}^n_k$ la quadrique lisse définie par $q' = 0$. Soit $Y_2 \subset \mathbf{P}^n_k$ l'hyperplan défini par $x_0 = 0$. Alors $Z = Y_1 \cap Y_2 \subset Y_2$ est la quadrique définie par $q = 0$ dans $Y_2 \simeq \mathbf{P}^{n-1}_k$. Il existe une forme cubique lisse en $n+1$ variables sur $k((t))$ qui se spécialise en $t = 0$ sur la forme cubique

$q'(x_0,\dots,x_n).x_0$, et qui possède un zéro non trivial sur $k((t))$, car aucun k-point de Y_2 n'est situé sur Z. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{k((t))}$ l'hypersurface cubique lisse qu'elle définit. Si l'indice de Z sur $k(Y_1)$ était égal à 1, alors par un théorème bien connu de Springer, la quadrique Z aurait un $k(Y_1)$-point, donc il y aurait une application rationnelle de Y_1 vers Z, contredisant le théorème d'Hoffmann. Le lemme 2.2 permet alors de conclure que l'hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^n_{k((t))}$ n'est pas universellement CH_0-triviale. □

3. Formes quadratiques multiplicatives et R-équivalence

3.1. Certaines hypersurfaces cubiques. — Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $q(x_1,\dots,x_n)$, $n \geq 2$ une forme quadratique non dégénérée sur k. Soit $\rho \in k^*$, $\rho \neq 0, \rho \neq 1$.

Soit $X = X(q,\rho) \subset \mathbf{P}^{n+1}_k$ l'hypersurface cubique donnée par l'équation homogène [(1)]

$$q(x_1,\dots,x_n)v = u(u-v)(u-\rho v).$$

Le lieu de non lissité de X est donné par $u = v = 0 = q = 0$.

Suivant [**3**, §5], soit $Y = Y(q,\rho)$ le fibré en quadriques sur $\mathbf{P}^1_k$ obtenu par recollement de la variété Y_1 définie par

$$q(X_1,\dots,X_n) = U(U-1)(U-\rho)T^2$$

dans $\mathbf{P}^n_k \times_k \mathbf{A}^1_k$ muni des coordonnées $(X_1,\dots,X_n,T;U)$ et de la variété Y_2 définie par

$$q(X'_1,\dots,X'_n) = V(1-V)(1-\rho V)T^2$$

dans $\mathbf{P}^n_k \times_k \mathbf{A}^1_k$ muni des coordonnées $(X'_1,\dots,X'_n,T;V)$, le recollement se faisant via $V = 1/U$ et $(X'_1,\dots,X'_n,T) = (U^{-2}X_1,\dots,U^{-2}X_n,T)$.

Les k-variétés X et Y sont k-birationnellement isomorphes, elles contiennent toutes deux la k-variété affine lisse W d'équation

$$q(x_1,\dots,x_n) = u(u-1)(u-\rho).$$

Plus précisément, on définit un morphisme birationnel de $X \setminus \{v=0\}$ vers Y_1 par

$$(X_1,\dots,X_n,T;U) = (x_1,\dots,x_n,v;u/v).$$

On définit un morphisme birationnel de $X \setminus \{u=0\}$ vers Y_2 par

$$(X'_1,\dots,X'_n,T;V) = (x_1v,\dots,x_nv,u^2;v/u).$$

Ceci définit un morphisme de $X \setminus \{u=v=0\}$ vers Y.

1. Pour $n = 2$, on obtient une surface de Châtelet.

Montrons que ce morphisme s'étend en un morphisme de
$$X_{lisse} = X \setminus \{u = v = q = 0\}$$
vers Y. Il suffit d'établir cela au voisinage des points de $u = v = 0$ qui satisfont $q \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut alors se placer sur l'ouvert affine $x_1 \neq 0$ de X. On s'intéresse donc à la variété affine définie par l'équation
$$q(1, x_2, \dots, x_n) = u(u - v)(u - \rho v).$$
Cette équation se réécrit
$$[q(1, x_2, \dots, x_n) + (1 + \rho)u^2 - \rho uv].v = u^3.$$
Au voisinage d'un point de $u = v = 0$ avec $q \neq 0$ la fonction
$$f(x_2, \dots, x_n, u, v) := q(1, x_2, \dots, x_n) + (1 + \rho)u^2 - \rho uv$$
est inversible. L'application rationnelle de X vers Y_2 est donnée sur l'ouvert affine défini par $x_1 \neq 0$ par
$$(X'_1, \dots, X'_n, T; U) = (v, x_2v, \dots, x_nv, u^2; v/u).$$
Comme on a $fv = u^3$, cette application est donc aussi donnée par
$$(X'_1, \dots, X'_n, T; U) = (u, x_2u, \dots, x_nu, f; u^2.f^{-1})$$
qui est un morphisme là où f est inversible, donc dans le voisinage de tout point avec $u = v = 0$ et $q \neq 0$.

On notera que l'image de $u = v = 0$, $q \neq 0$ est le point $(0, \dots, 0, 1; 0)$ de $Y_2 \subset Y$.

Soit désormais $\theta : X_{lisse} \to Y$ le k-morphisme birationnel construit ci-dessus.

Soient $A \in W(k) \subset X(k)$ le k-point lisse défini par $(x_1, \dots, x_n, u, v) = (0, \dots, 0, 1, 1)$ et $B \in W(k) \subset X(k)$ le k-point lisse défini par $(x_1, \dots, x_n, u, v) = (0, \dots, 0, \rho, 1)$. Sur $Y(k)$, les images de ces points par θ sont donnés respectivement par $A_1 = \theta(A) \in Y_1(k)$ de coordonnées $(X_1, \dots, X_n, T; u) = (0, \dots, 0, 1; 1)$ et $B_1 = \theta(B) \in Y_1(k)$ de coordonnées $(X_1, \dots, X_n, T; u) = (0, \dots, 0, 1; \rho)$.

Lemme 3.1. — *Supposons la forme quadratique q anisotrope sur k. Si les points $A, B \in W(k)$ sont R-équivalents sur X, alors $A_1 = \theta(A)$ et $B_1 = \theta(B)$ sont R-équivalents sur Y.*

Démonstration. — L'hypothèse sur q garantit que le lieu singulier de X, qui est donné par $u = v = q = 0$, ne contient aucun k-point. On a donc $X_{lisse}(k) = X(k)$. Soient P et Q deux points rationnels de $X(k)$ R-équivalents sur X. Par définition, il existe une famille finie de k-morphismes $\sigma_i : \mathbf{P}^1_k \to X$, $i = 1, \dots, m-1$ avec $\sigma_i(0) = P_i, \sigma_i(\infty) = P_{i+1}$, et $P_0 = P$ et $P_m = Q$. Comme $X_{lisse}(k) = X(k)$, les points P_i sont tous dans X_{lisse}, les images des morphismes σ_i rencontrent X_{lisse}. La composition avec θ définit des applications rationnelles ρ_i de $\mathbf{P}^1_k$ vers Y, qui puisque Y est projectif, sont en fait des morphismes. On a $\rho_i(0) = \sigma(P_i)$ et $\rho_i(\infty) = \sigma(P_{i+1})$. Ainsi $\theta(P)$ et $\theta(Q)$ sont R-équivalents sur Y. □

3.2. Rappel. — Soit k un corps, car.$(k) \neq 2$, et soit ϕ une n-forme de Pfister anisotrope sur k. On sait (Pfister, voir [**12**]) que l'ensemble $N_\phi(k) \subset k^*$ des valeurs non nulles de ϕ est un sous-groupe de k^*. Soit Y une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $k(Y)$ son corps des fonctions.

Dans [**3, 4**], on a considéré le sous-groupe de $k(Y)^*$ formé des fonctions qui partout localement sur Y peuvent s'écrire comme le produit d'une unité locale et d'un élément de $N_\phi(k(Y))$. On a défini et étudié le quotient $D^\phi(Y)$ de ce groupe par le sous-groupe $N_\phi(k(Y))$.

Il y a en particulier un accouplement

$$Y(k) \times D^\phi(Y) \to D^\phi(k) = k^*/N_\Phi(k)$$

qui passe au quotient par la R-équivalence sur $Y(k)$ ([**3**, Cor. 4.1.5], conséquence de la fonctorialité et de l'invariance homotopique des groupes $D^\phi(Y)$).

L'invariance birationnelle des groupes $D^\phi(Y)$ fut établie par M. Rost [**22**].

3.3. Sur un corps de u-invariant fini. — On renvoie à [**12**] pour les propriétés de base des formes quadratiques sur les corps.

Théorème 3.2. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2 tel que $I^{n+1}k \neq 0$, i.e. tel qu'il existe une $(n+1)$-forme de Pfister anisotrope. Soit $F = k((t))$. Pour tout entier m avec $2 \leq m \leq 2^n$, il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^{m+1}_F$ avec un F-point qui n'est pas rétracte rationnelle, en particulier n'est pas stablement rationnelle.*

Démonstration. — La condition sur k équivaut à l'existence d'une n-forme de Pfister ϕ, de dimension 2^n et d'un élément $\rho \in k^*$ non représenté par la forme ϕ sur k. Elle implique aussi que le u-invariant de k est au moins égal à 2^{n+1}.

Soit $q(x_1, \ldots, x_m)$, avec $m \geq 2$, une forme quadratique non dégénérée sur k, de dimension $m \leq 2^n$, qui est une sous-forme de la forme ϕ sur k. En particulier q est anisotrope.

Soit $Y = Y(q, \rho)$ comme au §3.1. On vérifie facilement (cf. [**3**, §5]) que la fonction rationnelle $u \in k(W)^* = k(Y)^*$ définit un élément de $D^\phi(Y)$, et que l'évaluation de cet élément sur A_1, resp. B_1, est $1 \in k^*/D^\phi(k)$, resp. $\rho \in k^*/D^\phi(k)$. Par hypothèse, on a $\rho \notin D^\phi(k)$. Ainsi les k-points A_1 et B_1 ne sont pas R-équivalents sur Y. (On voit aussi que l'application naturelle $D^\phi(k) \to D^\phi(Y)$ n'est pas un isomorphisme.)

Le lemme 3.1 garantit alors que les points A et B de $X(k)$ ne sont pas R-équivalents sur l'hypersurface cubique singulière X.

Soit $\Psi(x_1,\dots,x_m,u,v)=0$ une forme cubique sur le corps k définissant une hypersurface lisse dans $\mathbf{P}^{m+1}_k$. Soit Soit $\mathcal{X}\subset \mathbf{P}^{m+1}_{k[[t]]}$ défini par

$$q(x_1,\dots,x_m)v-u(u-v)(u-\rho v)+t\Psi(x_1,\dots,x_m,u,v)=0.$$

La fibre spéciale $\mathcal{X}_0$ est l'hypersurface cubique X sur le corps k discutée au §3.1. Elle contient les points k-rationnels lisses A et B. Par le lemme de Hensel, le point A se relève en des $k((t))$-points $\tilde{A}$ de la fibre générique $\mathcal{X}_t$ sur le corps $F=k((t))$. En outre, l'ensemble de tels $\tilde{A}$ est Zariski dense sur la F-variété $\mathcal{X}_t$. On a le même énoncé pour les relevés $\tilde{B}$ de B.

Supposons la F-variété $\mathcal{X}_t$ rétracte rationnelle. Alors il existe des ouverts non vides $U\subset\mathcal{X}_t$ et $V\subset\mathbf{P}^n_F$ et des F-morphismes $s:U\to V$ et $p:V\to U$ dont le composé $p\circ s$ est l'identité de U. Soient alors $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des relevés de A et B dans U. Il existe une droite $\mathbf{P}^1_F\subset\mathbf{P}^n_F$ contenant $s(\tilde{A})$ et $s(\tilde{B})$, et qui donc rencontre V. En composant avec $p:V\to U\subset\mathcal{X}_t$, puisque $\mathcal{X}_t$ est propre et que $\mathbf{P}^1_F$ est une courbe régulière, on obtient un F-morphisme $\mathbf{P}^1_F\to\mathcal{X}_t$ tel que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ soient dans l'image $\mathbf{P}^1(F)$. Ainsi $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont R-équivalents sur la F-variété $\mathcal{X}_t$. On sait [**14**] que la R-équivalence se spécialise (ceci vaut pour tout $k[[t]]$-schéma propre) : l'application

$$\mathcal{X}_t(F)=\mathcal{X}(k[[t]])\to X_0(k)=X(k)$$

induit une application $\mathcal{X}_t(F)/R\to X(k)/R$. Mais A et B ne sont pas R-équivalents sur X. On conclut (voir l'introduction de l'article) que la F-hypersurface cubique lisse $\mathcal{X}_t$ n'est pas rétracte rationnelle. □

Remarque 3.3. — On peut envisager diverses variantes de la démonstration.

(1) Tout en utilisant l'argument de spécialisation de la R-équivalence comme ci-desssus, on peut remplacer les groupes $D^{\phi}(Y)$ par la cohomologie non ramifiée. Soit $\phi=<1,-a_1>\otimes\cdots\otimes<1,-a_n>$. Le cup-produit

$$(a_1)\cup\dots(a_n)\cup(u)\in H^{n+1}(k(Y),\mathbb{Z}/2),$$

où pour $b\in k(Y)^*$ on note $(b)\in k(Y)^*/k(Y)^{*2}=H^1(k(Y),\mathbb{Z}/2)$ la classe de b, est une classe non ramifiée qui est non constante car elle prend des valeurs distinctes dans $H^{n+1}(k,\mathbb{Z}/2)$. Ceci utilise le théorème ([**20**]) qu'une $(n+1)$-forme de Pfister non triviale sur le corps k a une image non nulle dans $H^{n+1}(k,\mathbb{Z}/2)$.

(2) On peut envisager une méthode qui ignore la R-équivalence, et utilise seulement l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles.

Supposons que l'on ait :

(*) Il existe un k-morphisme de désingularisation $f:X'\to X$ qui est universellement CH_0-trivial.

Si la F-variété $\mathcal{X}_t$ est rétracte rationnelle, alors elle est universellement CH_0-triviale [**6**, Lemme 1.3]. D'après [**6**, Théorème 1.12], sous l'hypothèse (*), ceci implique que la k-variété X' est universellement CH_0-triviale. Ceci implique alors [**17**] que les groupes de cohomologie non ramifiée à coefficients $\mathbb{Z}/2$ de X', qui sont des invariants k-birationnels des k-variétés projectives et lisses, sont réduits à la cohomologie du corps de base. Mais on sait (via le modèle Y) que ce n'est pas le cas, car on a une classe de cohomologie non ramifiée qui prend des valeurs distinctes en deux points – ce dernier point utilisant comme ci-dessus [**20**].

4. Hypersurfaces cubiques diagonales et cohomologie non ramifiée

Théorème 4.1. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 3, possédant un élément a qui n'est pas un cube. Soient $0 \leq n \leq m$ des entiers. Soit F un corps avec*

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \subset F \subset F_m := k((\lambda_1)) \ldots ((\lambda_m)).$$

L'hypersurface cubique $X := X_{n,F}$ de $\mathbf{P}^{n+3}_F$ définie par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + aw^3 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i^3 = 0$$

possède un point rationnel et n'est pas universellement CH_0-triviale, en particulier elle n'est pas rétracte rationnelle.

Démonstration. — Pour établir le résultat, on peut supposer que k contient une racine cubique primitive de l'unité, soit j, et que $F = F_m$. Le lemme 4.2 ci-dessous permet de supposer $n = m$. On fixe un isomorphisme $\mathbb{Z}/3 = \mu_3$ et on considère la cohomologie étale à coefficients $\mathbb{Z}/3$. On ignore les torsions à la Tate dans les notations. Etant donnés un corps L contenant k et des éléments $b_i, i = 1, \ldots, s$, de L^*, on note $(b_1, \ldots, b_s) \in H^s(L, \mathbb{Z}/3)$ le cup-produit, en cohomologie galoisienne, des classes $(b_i) \in L^*/L^{*3} = H^1(L, \mathbb{Z}/3)$.

On va démontrer par récurrence sur $n \neq 0$ l'assertion suivante, qui implique la proposition.

(A_n) Soient k, a, F_n et X_n/F_n comme ci-dessus. Le cup-produit

$$\alpha_n := ((x + jy)/(x + y), a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in H^{n+2}(F_n(X_n), \mathbb{Z}/3)$$

définit une classe de cohomologie non ramifiée (par rapport au corps de base F_n) qui ne provient pas d'une classe dans $H^{n+2}(F_n, \mathbb{Z}/3)$.

Le cas $n = 0$ est connu ([**15**, Chap. VI, §5] [**7**, §2.5.1]). Supposons l'assertion démontrée pour n.

La classe α_{n+1} sur la F_{n+1}-hypersurface $X_{n+1} \subset \mathbf{P}^{n+4}_{F_{n+1}}$ a ses résidus triviaux en dehors des diviseurs définis par $x+y=0$ et $x+jy=0$. Soit $\Delta \subset X_{n+1}$ le diviseur $x+y=0$. Ce diviseur est défini par les équations

$$x+y=0, z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i t_i^3=0.$$

Le résidu de α_{n+1} au point générique de Δ est

$$\partial_\Delta(\alpha_{n+1}) = \pm(a,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in H^{n+2}(F_{n+1}(\Delta),\mathbb{Z}/3).$$

Mais dans le corps des fonctions de Δ, on a

$$1+a(w/z)^3+\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(t_i/z)^3=0$$

et cette égalité implique (cf. [**19**, Lemma 1.3]) :

$$(a,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) = 0 \in H^{n+2}(F_{n+1}(\Delta),\mathbb{Z}/3).$$

Le même argument s'applique pour le diviseur défini par $x+jy=0$. Ainsi α_{n+1} est une classe de cohomologie non ramifiée sur la F_{n+1}-hypersurface X_{n+1}.

Soit $\mathcal{X}_{n+1}$ le $F_n[[\lambda_{n+1}]]$-schéma défini par

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i t_i^3=0.$$

Le diviseur Z défini par $\lambda_{n+1}=0$ sur $\mathcal{X}$ est le cône d'équation

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i^3=0$$

dans $\mathbf{P}^{n+4}_{F_n}$, cône qui est birationnel au produit de $\mathbf{P}^1_{F_n}$ et de l'hypersurface cubique lisse $X_n \subset \mathbf{P}^{n+3}_{F_n}$ définie par

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i^3=0.$$

Le corps des fonctions rationnelles de $\mathcal{X}_{n+1}$ est $F_{n+1}(X_{n+1})$.

On a

$$\partial_Z(\alpha_{n+1}) = \pm((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in H^{n+2}(F_n(Z),\mathbb{Z}/3).$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in H^{n+2}(F_n(X_n),\mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+2}(F_n,\mathbb{Z}/3)$. Ceci implique que

$$((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in H^{n+2}(F_n(Z)),\mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+2}(F_n, \mathbb{Z}/3)$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccc} \partial_Z : & H^{n+3}(F_{n+1}(X), \mathbb{Z}/3) & \to & H^{n+2}(F_n(Z), \mathbb{Z}/3) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \partial_{\lambda_{n+1}=0} : & H^{n+3}(F_{n+1}, \mathbb{Z}/3) & \to & H^{n+2}(F_n, \mathbb{Z}/3) \end{array}$$

on conclut que

$$\alpha_{n+1} := ((x+jy)/(x+y), a, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in H^{n+3}(F_{n+1}(X), \mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+3}(F_{n+1}, \mathbb{Z}/3)$.

Ceci établit (A_n) pour tout entier n et implique (cf. [**17**]) que la F_n-variété X_n n'est pas universellement CH_0-triviale et n'est pas rétracte rationnelle. □

Lemme 4.2. — *Soit F un corps. Si une F-variété X projective, lisse, géométriquement connexe n'est pas universellement CH_0-triviale, alors la $F((t))$-variété $X \times_F F((t))$ n'est pas universellement CH_0-triviale, et donc n'est pas rétracte rationnelle.*

Démonstration. — Sur tout corps L contenant F, on dispose de l'application de spécialisation $CH_0(X_{L((t))}) \to CH_0(X_L)$, et cette application est surjective et respecte le degré. □

Remarque 4.3. — Il serait intéressant de comprendre la généralité de la construction faite dans le théorème 4.1. On utilise une classe de cohomologie non ramifiée non constante sur un modèle birationnel de la fibre spéciale d'une $k[[t]]$-schéma propre à fibres intègres, et on en tire une classe de cohomologie non ramifiée non constante de degré un de plus sur la fibre générique sur $k((t))$, essentiellement par cup-produit avec la classe d'une uniformisante de l'anneau $k[[t]]$.

On laisse au lecteur le soin d'établir l'analogue suivant du théorème 4.1.

Théorème 4.4. — *Soient $p \neq 3$ un nombre premier et k un corps p-adique dont le corps résiduel contient les racines cubiques primitives de 1. Soit $a \in k^*$ une unité qui n'est pas un cube. Soit π une uniformisante de k. Soient $0 \leq n \leq m$ des entiers. Soit F un corps avec*

$$\mathbb{Q}(a)(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \subset F \subset k((\lambda_1)) \ldots ((\lambda_m)).$$

L'hypersurface cubique X_n de $\mathbf{P}_F^{n+4}$ définie par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + aw^3 + \pi t^3 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i^3 = 0,$$

qui possède un point rationnel, n'est pas universellement CH_0-triviale et donc n'est pas rétracte rationnelle.

Exemples

En appliquant le théorème 4.1, on trouve $X_n \subset \mathbf{P}_F^{n+3}$ non rétracte rationnelle avec
$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subset F \subset k((\lambda_1)) \ldots ((\lambda_n))$$
dans les situations suivantes.

(i) Le corps $k = \mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique différente de 3 contenant les racines cubiques de 1.

(ii) Le corps k, de caractéristique différente de 3, possède une valuation discrète, par exemple k est le corps des fonctions d'une variété complexe de dimension au moins 1, ou est un corps p-adique, ou est un corps de nombres.

On trouve ainsi des hypersurfaces cubiques lisses non rétractes rationnelles dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_m)}$, avec un point rationnel, pour tout entier n avec $3 \leq n \leq m+2$.

En appliquant le théorème 4.4, sur un corps k p-adique ($p \neq 3$) contenant une racine cubique de 1, on trouve des hypersurfaces cubiques lisses non rétractes rationnelles dans $\mathbf{P}^n_{k(x_1,\ldots,x_m)}$, avec un point rationnel, pour tout entier n avec $4 \leq n \leq m+4$.

5. Comparaison des résultats obtenus par les diverses méthodes

Les hypothèses faites sur le corps k dans chacun des trois derniers paragraphes diffèrent. Pour comparer la qualité des résultats qu'ils produisent, on considère la situation sur le corps $E_n := \mathbb{C}((t_1)) \ldots ((t_n))$. Comme on va voir, aucune des trois méthodes ne donne des résultats entièrement couverts par les deux autres.

En outre les méthodes des §1, 2 et 3 donnent des hypersurfaces cubiques avec un indice de torsion (comme défini dans [**2**]) égal à 2 et celle du §4 donne des exemples avec un indice de torsion égal à 3.

La méthode du §2 (Chatzistamatiou et Levine) fournit des hypersurfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^N_{E_n}$, avec un point rationnel, non rétractes rationnelles, pour N entier avec $N \geq 3$ de la forme $N = 2^\ell \leq 2^{n-1}$.

La méthode du §3 fournit des hypersurfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^N_{E_n}$, avec un point rationnel, non rétractes rationnelles, pour tout N entier avec $3 \leq N \leq 2^{n-2}+1$.

La méthode du §4 fournit des hypersurfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^N_{E_n}$, avec un point rationnel, non rétractes rationnelles, pour tout N entier avec $3 \leq N \leq n+2$.

On obtient ainsi des exemples de telles hypersurfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^N_{E_n}$ pour les valeurs suivantes de N.

Pour $n = 1$, les méthodes classiques donnent des exemples non universellement CH_0-triviaux avec $N = 3$. On a donc de tels exemples avec $N = 3$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 2$, on a déjà $N = 3$. La méthode du §4 donne des exemples non universellement CH_0-triviaux avec $3 \leq N \leq 4$. Un exemple avec $N = 4$ avait été obtenu par Madore [**13**], qui a montré que pour l'hypersurface cubique X d'équation

$$x^3 + y^3 + \lambda z^3 + \mu u^3 + \lambda\mu v^3 = 0$$

sur le corps $\mathbb{C}((\lambda))((\mu))$ le groupe de Chow réduit $A_0(X)$ n'est pas nul.

On a donc de tels exemples avec $N = 4$ pour tout $n \geq 2$.

Pour $n = 3$, on a déjà $N = 3, 4$. La méthode du §2 donne des exemples non universellement CH_0-triviaux pour $N = 4$, celle du §3 donne des exemples non rétractes rationnels avec $N = 3$, celle du §4 donne des exemples non universellement CH_0-triviaux pour $N \leq 5$. Le cas $N = 5$ est nouveau. On a donc de tels exemples avec $N = 5$ pour tout $n \geq 3$.

Pour $n = 4$, on a déjà $N = 3, 4, 5$. La méthode du §2 donne des exemples non universellement CH_0-triviaux pour $N = 4$ et $N = 8$ (nouveau cas) celle du §3 donne des exemples non rétractes rationnels avec $N \leq 5$, cas déjà obtenu, celle du §4 donne des exemples non universellement CH_0-triviaux avec $N \leq 6$. Le cas $N = 6$ est nouveau. La situation reste ouverte pour $N = 7$ et $N > 8$. On a donc de tels exemples avec $N = 6, 8$ pour tout $n \geq 4$.

A partir de $n = 5$, on a $n + 2 \leq 2^{n-2} + 1$. On obtient des exemples non rétractes rationnels avec $N \leq 2^{n-2} + 1$ par la méthode du §3 et des exemples non universellement CH_0-triviaux $N = 2^\ell \leq 2^{n-1}$ par la méthode du §2.

Soit maintenant k un corps p-adique et $F = k((t_1))\ldots((t_n))$. On obtient $X \subset \mathbf{P}^N_F$, $N \geq 3$, hypersurface cubique lisse avec un point rationnel et non rétracte rationnelle pour $N \geq 3$ satisfaisant l'une des conditions suivantes :

$N = 2^\ell \leq 2^{n+1}$, par la méthode du §2 (Chatzistamatiou et Levine) ;

$N \leq 2^n + 1$, par la méthode du §3 ;

$N \leq n + 4$, pour $p \neq 3$ et k contenant les racines cubiques de 1 par la méthode du §4 (Théorème 4.4).

Le cas des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^4_k$ sur k un corps p-adique quelconque [**6**, Théorème 1.19] n'est pas couvert par les résultats du présent article.

Question : Pour un corps F donné, l'ensemble des entiers $n \geq 3$ tels qu'il existe une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^n_F$ avec un F-point et non universellement CH_0-triviale est-il un intervalle dans les entiers ?

Remerciements. L'exposé de Marc Levine au Colloque International de K-Théorie à Mumbai, en janvier 2016, et l'article de Chatzistamatiou et Levine [**2**] m'ont amené à ce travail. Le contenu du §4 a été trouvé à l'occasion de la rencontre EDGE 2016 à Edimbourg (juin 2016), rencontre où j'ai exposé les résultats de l'article. Je remercie Alena Pirutka pour diverses remarques. Je remercie l'IRSES Moduli et l'Institut Tata (Mumbai) pour leur soutien à l'occasion du colloque de Mumbai. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

Références

[1] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, in *Brauer Groups and Obstruction Problems : Moduli Spaces and Arithmetic* (Palo Alto, 2013), à paraître dans la série Birkhäuser Progress in Mathematics.

[2] André Chatzistamatiou et Marc Levine, Torsion orders of complete intersections, arXiv :1605.01913.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, Bulletin Soc. Math. France **106** (1978) 113–151.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques : deux compléments, Bulletin Soc. Math. France **108** (1980) 213–227.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et F. Ischebeck, L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **292** (1981) 723–725.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 4ème série, t. **49**, fasc. 2 (2016) 371–397.

[7] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II. Duke Math. J. **54** no. 2 (1987) 375–492.

[8] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzg. 3. Folge, Bd. **2**, Springer, Berlin, 1998.

[9] D. W. Hoffmann, Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric, Math. Zeitschrift **220** (1995), no. 3, 461–476.

[10] B. Kahn et R. Sujatha, Birational geometry and localisation of categories, Documenta Math. Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday (2015) 277–334.

[11] J. Kollár, Unirationality of cubic hypersurfaces, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 3, 467–476.

[12] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin/Cummings, 1973.

[13] D. Madore, Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques de mauvaise réduction, J. Number Theory **128** (2008), 926–944.

[14] D. Madore, Sur la spécialisation de la R-équivalence, prépublication `http://perso.telecom-paristech.fr/~madore/specialz.pdf`

[15] Yu. I. Manin, Formes cubiques : algèbre, géométrie, arithmétique (en russe), Nauka, Moscou, 1972.

[16] A. S. Merkurjev, Steenrod operations and degree formulas. J. für die reine u. angew. Math. (Crelle) **565** (2003) 13–26.

[17] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. Lond. Math. Soc.**78** (2008), 51–64.

[18] A. S. Merkurjev, Invariants of algebraic groups and retract rationality of classifying spaces, `http://www.math.ucla.edu/ merkurev/papers/retract-class-space-new.pdf`

[19] J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, Invent. math. **9** (1970) 318–344.

[20] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky, An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 1, 1–13.

[21] A. Pirutka, Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology, Report at the AMS Algebraic Geometry Summer School, Salt Lake City, July 2015.

[22] M. Rost, Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), no. 4, 189–192.

[23] B. Segre : Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali. Rend. Acc. Naz. Lincei, Sc. fis. mat. e nat. **10** (1951), 94–97.

[24] B. Totaro, Hypersurfaces that are not stably rational, J. Amer. Math. Soc. **29** 883–891, 2016.

[25] C. Voisin, On the universal CH_0 group of cubic hypersurfaces, arXiv :1407.7261, à paraître au JEMS.

Submitted June 30th, 2016, accepted September 24th, 2016

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS et Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France