CYCLES DE CODIMENSION DEUX, COMPLÉMENT À DEUX ANCIENS ARTICLES

par

J.-L. Colliot-Thélène

1. Introduction

On donne des conséquences faciles de résultats établis dans [**CTR85**] (avec W. Raskind) et dans le rapport de synthèse [**CT91**], en particulier dans une section où je développais des arguments de S. Saito et de P. Salberger.

La présente note a été écrite en réponse à un article récent de Bruno Kahn [**K16**], texte auquel je renvoie pour les motivations. On la trouvera en appendice dudit article.

2. Notations et rappels

Pour simplifier les énoncés, on se limite ici aux variétés définies sur un corps de caractéristique nulle. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Pour une telle k-variété X, supposée projective, lisse, géométriquement connexe sur le corps k, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On note b_i le i-ième nombre de Betti l-adique de $\overline{X}$. On sait qu'il est indépendant du nombre premier l. On note ρ le rang du groupe de Néron-Severi géométrique $NS(\overline{X})$. Pour tout entier i, on note ici $H^i(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(j)) := \prod_l H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l(j))$. Le sous-groupe de torsion $H^i(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(j))_{tors}$ est fini. On note e_i son exposant. Pour $k = \mathbf{C}$ le corps des complexes, $H^i_{Betti}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_l \simeq H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_l)$. On sait que l'on a un isomorphisme de groupes finis $NS(\overline{X})_{tors} = H^2(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(1))_{tors}$. Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\overline{X})$ de $\overline{X}$ est extension du groupe fini $H^3(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(2))_{tors}$ par $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{b_2-\rho}$. La condition $H^1(X, O_X) = 0$ équivaut à $b_1 = 0$. La condition $H^2(X, O_X) = 0$ équivaut (théorie de Hodge) à $\rho = b_2$, c'est-à-dire à la finitude du groupe de Brauer de $\overline{X}$. Pour X une variété lisse, on note $CH^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i de X. Pour X une variété projective, on note $CH_i(X)$ le groupe de Chow des cycles de dimension i de X.

3. Exposant de torsion

L'énoncé suivant aurait pu être inclus dans [**CTR85**]. Comme indiqué formellement ci-dessus, l'entier e_i est l'annulateur de la torsion du i-ème groupe de cohomologie entière.

Théorème 3.1. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, connexe, satisfaisant $X(k) \neq \emptyset$. Supposons que le réseau $NS(\overline{X})/tors$ admet une base globalement respectée par le groupe de Galois absolu de k.*

(a) Supposons $b_1 = 0$ et $\rho = b_2$. Alors le groupe de torsion $\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X_{\overline{k}})]$ *est annulé par le produit $e_2.e_3$, qui est aussi le produit de l'exposant de $NS(\overline{X})_{tors}$ et de l'exposant du groupe* $\mathrm{Br}(\overline{X})$.

(b) Si de plus $b_3 = 0$, alors $CH^2(X)_{tors}$ est annulé par $e_2.e_3.e_4$.

Démonstration. — Il suffit de suivre les démonstrations du §3 de [**CTR85**]. On note $H^i(k, \bullet)$ les groupes de cohomologie galoisienne.

Sous l'hypothèse $H^1(X, O_X) = 0$, le théorème 1.8 de [**CTR85**] donne une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to D_0 \to H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \to H^2(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(1))_{tors} \to 0$$

où D_0 est uniquement divisible. Le groupe $K_2\overline{k}$ est uniquement divisible. On a la suite exacte

$$0 \to H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)/K_2\overline{k} \to K_2\overline{k}(X)/K_2\overline{k} \to K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \to 0.$$

Comme on a supposé $X(k) \neq \emptyset$, on a $H^1(k, K_2\overline{k}(X)/K_2\overline{k}) = 0$ [**CT83**, Theorem 1]. On voit alors que le groupe $H^1(k, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ est un sous-groupe de $H^2(k, H^2(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(1))_{tors})$ et donc est annulé par e_2.

Sous les deux hypothèses $H^2(X, O_X) = 0$ et $H^1(X, O_X) = 0$ (cette dernière garantissant $Pic(\overline{X}) = NS(\overline{X})$), le théorème 2.12 de [**CTR85**] donne une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to D_1 \to NS(\overline{X}) \otimes \overline{k}^* \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \to [D_2 \oplus H^3(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(2))_{tors}] \to 0,$$

où D_1 et D_2 sont uniquement divisibles. L'hypothèse que l'action du groupe de Galois sur $NS(\overline{X})/tors$ est triviale assure via le théorème 90 de Hilbert que l'on a $H^1(k, NS(\overline{X}) \otimes \overline{k}^*) = 0$. De la suite exacte ci-dessus on déduit que $H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ est un sous-groupe de $H^1(k, H^3(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(2))_{tors})$ et donc est annulé par e_3.

La proposition 3.6 de [**CTR85**] fournit une suite exacte

$$H^1(k, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

On voit donc que $\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]$ est annulé par le produit $e_2.e_3$.

Par Bloch et Merkurjev-Suslin, $CH^2(\overline{X})_{tor}$ est un sous-quotient de $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ ([**CT91**, Théorème 3.3.2]). Si $b_3 = 0$, alors $CH^2(\overline{X})_{tor}$, est un sous-quotient de $H^4(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(2))_{tors}$, d'exposant e_4. Sous les hypothèses du théorème, on obtient alors que $CH^2(X)_{tors}$ est annulé par $e_2.e_3.e_4$. □

Remarques 3.2. — 1) Soit Y une variété projective et lisse sur le corps des complexes $\mathbf{C}$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Pour tout corps k contenant $\mathbf{C}$, le théorème s'applique à la k-variété $X = Y \times_{\mathbf{C}} k$. L'hypothèse sur l'action galoisienne est alors automatiquement satisfaite pour la k-variété X, car on a $NS(Y) = NS(\overline{X})$.

2) Lorque $e_2 = 1 = e_3$, l'énoncé (a) est le théorème 3.10 b) de [**CTR85**].

3) Si X est une surface, $e_4 = 1$, et $b_1 = b_3$. En outre, $e_2 = e_3$. Sous les hypothèses du théorème, on trouve que le groupe $CH^2(X)_{tors} = CH_0(X)_{tors}$ est annulé par le carrré de l'exposant de la torsion de $NS(\overline{X})$.

4. Finitude

On utilise ici les notations et résultats du §7 de [**CT91**].

Théorème 4.1. — *Soient k un corps de car. zéro et $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement intègre. Notons $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Notons $b_i \in \mathbf{N}$ les nombres de Betti l-adiques de $\overline{X}$ et $\rho = rang(NS(\overline{X}))$. Supposons $H^1(X, O_X)$=0, ce qui équivaut à $b_1 = 0$. Supposons aussi $H^2(X, O_X) = 0$, ce qui équivaut à $\rho = b_2$. Supposons $b_3 = 0$. Alors le conoyau de l'application*

$$H^3_{\text{ét}}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus [H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}] \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est d'exposant fini.

Démonstration. — L'hypothèse $b_3 = 0$ implique que le groupe $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ s'identifie au groupe fini $H^4_{\text{ét}}(\overline{X}, \hat{\mathbf{Z}}(2))_{tors}$. L'énoncé est alors une conséquence immédiate du Théorème 7.3 de [**CT91**], auquel je renvoie pour les notations. □

Théorème 4.2. — *Soient k un corps de caractéristique zéro et $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement intègre. Notons $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Supposons que chacun des entiers b_1, $b_2 - \rho$ et b_3 associés à $\overline{X}$ est nul. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Alors il existe un entier $N > 0$*

annulant le groupe $CH^2(X)_{tors}$ et tel que pour tout entier $n > 0$ multiple de N, l'application

$$CH^2(X)_{tors} \to CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

composée de la projection naturelle et de l'application classe de cycle en cohomologie étale est injective.

Démonstration. — Il suffit de combiner le théorème 4.1 avec le théorème 7.2 de [**CT91**]. □

Remarque 4.3. — Si X est une surface, l'hypothèse $b_3 = 0$ est impliquée par $b_1 = 0$.

On dit qu'un corps k de caractéristique zéro est à cohomologie galoisienne finie si pour tout module fini galoisien M sur k, tous les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(k, M)$ sont finis. Parmi les corps de caractéristique zéro satisfaisant cette propriété, on trouve : les corps algébriquement clos, les corps réels clos, les corps p-adiques, les corps de séries formelles itérées sur un des corps précédents.

Théorème 4.4. — *Soit k un corps de caractéristique zéro à cohomologie galoisienne finie. Soit K un corps de type fini sur k. Soit X une K-variété projective et lisse satisfaisant $X(K) \neq \emptyset$. Notons $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$. Supposons que chacun des entiers b_1, $b_2 - \rho$ et b_3 associés à $\overline{X}$ est nul. Alors le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.2, il existe un entier $n > 0$ tel que le groupe $CH^2(X)_{tors}$ s'identifie à un sous-groupe de l'image de l'application classe de cycle

$$CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Soit Y une k-variété intègre de corps des fonctions K. Quitte à restreindre la k-variété Y à un ouvert non vide convenable, il existe un Y-schéma intègre, projectif et lisse $\mathcal{X} \to Y$ dont la fibre générique est la K-variété X. L'application de restriction $CH^2(\mathcal{X}) \to CH^2(X)$ est surjective, et les applications classe de cycle $CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ et $CH^2(\mathcal{X})/n \to H^4(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2})$ sont compatibles. L'image de $CH^2(X)/n \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est donc dans l'image de la restriction $H^4(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mu_n^{\otimes 2})$. Sous les hypothèses du théorème, les groupes $H^i(W, \mu_n^{\otimes j})$ sont finis pour toute variété W de type fini sur k, en particulier $H^4(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2})$ est fini. On conclut que $CH^2(X)_{tors}$ est fini. □

Remarque 4.5. — Si X est une K-surface, $b_1 = b_3$ et l'hypothèse est simplement que $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$, et la conclusion est que $CH_0(X)_{tors}$ est fini.

Références

[CT83] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983) 1–20.

[CTR85] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2-cohomology and the second Chow group, Math. Annalen **270** (1985) 165–199.

[CT91] J.-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in *Arithmetic Algebraic Geometry*, C.I.M.E., Trento, 1991. L.N.M. 1553, Springer-Verlag (1993).

[K16] B. Kahn, Torsion index of algebraic surfaces, `https://webusers.imj-prg.fr/~bruno.kahn/preprints/trivial_birational_motive5.pdf`

---

6 mai 2016

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS, Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`