C. R. Acad. Sc. Paris, t. 294 (28 juin 1982) **Série I — 749**

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Quelques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques.* Note (*) de **Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc** et **Christophe Soulé**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Nous donnons des résultats de finitude relatifs au groupe des classes de cycles de codimension 2 modulo l'équivalence rationnelle, pour les variétés algébriques lisses sur un corps fini, et pour les surfaces rationnelles sur un corps global de caractéristique positive.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — Some Finiteness Theorems on Algebraic Cycles.

For X either a smooth variety over a finite field or a rational surface over a global field of non-zero characteristic, we sketch a proof of the finiteness of appropriate subgroups of the codimension 2 Chow group $CH^2(X)$.

I. NOTATIONS ET RAPPELS. — Pour un schéma Y, on note $H^i(Y, .)$ le i-ième groupe de cohomologie étale, et $H^i_{Zar}(Y, .)$ le i-ième groupe de cohomologie pour la topologie de Zariski. Pour n un entier naturel inversible sur Y, et $j \in \mathbb{Z}$, on note μ_n le faisceau étale sur Y des racines n-ièmes de l'unité et $\mathscr{H}^i(\mu_n^{\otimes j})$ le faisceau Zariski sur Y associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U, \mu_n^{\otimes j})$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{K}_i$ le faisceau Zariski sur Y associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(U)$. Pour k un corps et X une k-variété, on note $CH^i(X)$ le groupe des classes de cycles algébriques de codimension i modulo l'équivalence rationnelle. Si A est un groupe abélien, on note ${}_nA$ le noyau de la multiplication par l'entier naturel n dans A, et A/n son conoyau. On note A_{tors} le sous-groupe de torsion de A, et, pour l un nombre premier, $A_{l\text{-tors}}$ désigne le sous-groupe de torsion l-primaire.

Mercuriev et Suslin [1] viennent d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME [1]. — *Pour tout corps* L *et tout entier naturel n tel que* $(n, \text{car}.\,L) = 1$, *le symbole galoisien* $K_2(L)/n \to H^2(L, \mu_n^{\otimes 2})$ *est un isomorphisme.*

Les énoncés suivants résultent alors aussitôt des travaux de Bloch [2] :

COROLLAIRE 1. — *Soient k un corps, n un entier naturel tel que* $(n, \text{car}.\,k) = 1$ *et* X *une k-variété algébrique lisse. On dispose alors d'un diagramme :*

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{ccc} H^1_{Zar}(X, \mathscr{K}_2/n) & \twoheadrightarrow & {}_nCH^2(X) \\ \downarrow \simeq & & \\ H^1_{Zar}(X, \mathscr{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})) & \hookrightarrow & H^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \end{array}$$

dont l'horizontale supérieure est surjective, l'inférieure injective, et qui est fonctoriel en n pour la divisibilité des entiers.

COROLLAIRE 2. — *Soient k, n et* X *comme au corollaire* 1. *Si k est séparablement clos, ou fini, ou local de dimension* 1, *le groupe* ${}_nCH^2(X)$ *est fini.*

Il résulte du corollaire 1 que, sous les mêmes hypothèses sur k et X et pour l un nombre premier $\neq \text{car}.\,k$, le groupe $CH^2(X)_{l\text{-tors}}$ s'identifie à un sous-quotient du groupe

$$H^3(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = \varinjlim_n H^3(X, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Bloch, Gabber et Kato [3] viennent d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME [3]. — *Pour k un corps de caractéristique* $p > 0$ *et* X *une k-variété algébrique lisse, le symbole différentiel définit un isomorphisme* $\mathscr{K}_2/p^n \xrightarrow{\sim} \nu_n(2)$ *de faisceaux Zariski sur* X.

Ici $\nu_n(r) = W_n\Omega^r_{X,\log}$ désigne le sous-faisceau étale « logarithmique » du faisceau de De Rham-Witt $W_n\Omega^r_X$ (Illusie [4], I, 5.7, p. 596). On déduit de ce théorème un diagramme analogue à (1) :

$$
(2) \qquad \begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathscr{K}_2/p^n) & \twoheadrightarrow & {}_{p^n}CH^2(X) \\ \downarrow\wr & & \\ H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \nu_n(2)) & \hookrightarrow & H^1(X, \nu_n(2)) \end{array}
$$

et fonctoriel en n relativement à l'ordre naturel des entiers. Notons $\nu_\infty(r)$ le faisceau étale $\varinjlim_n \nu_n(r)$. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, le groupe $CH^2(X)_{p\text{-tors}}$ s'identifie donc à un sous-quotient du groupe $H^1(X, \nu_\infty(2))$.

II. Cycles de torsion et de codimension 2 des variétés sur un corps fini.

Théorème 1. — *Si* X *est une variété projective et lisse sur le corps fini* $k = \mathbf{F}_q$ *de caractéristique* p, *le groupe* $CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$ *est fini.*

Corollaire 3. — *Si* X *est une surface projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini, le groupe* $A_0(X)$ *des classes de* 0*-cycles de degré* 0 *modulo l'équivalence rationnelle est fini.*

Ce corollaire est naturellement aussi contenu dans la théorie du corps de classes non ramifié que viennent d'établir Kato et Saito [5] pour une telle surface.

Au vu des préliminaires, le théorème 1 résulte des deux suivants :

Théorème 2. — *Soient* X *et* k *comme au théorème* 1. *Pour* l *premier* $\neq p$, *pour* $r \in \mathbf{Z}$ *et* $i \in \mathbf{N}$ *tels que* $i \neq 2r, 2r+1$, *le groupe* $H^i(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r))$ *est fini, et nul pour presque tout* l.

Théorème 3 (Gabber). — *Pour* X *et* k *comme ci-dessus et pour* r *et* $i \in \mathbf{N}$ *tels que* $i \neq r, r+1$, *le groupe* $H^i(X, \nu_\infty(r))$ *est fini.*

Nous nous contentons d'esquisser la démonstration du théorème 2 (celle du théorème 3 utilise le complexe de De Rham-Witt [4] et la conjecture de Weil pour la cohomologie cristalline [6]).

Pour $r \in \mathbf{Z}$, on pose par définition $H^i(X, \mathbf{Z}_l(r)) = \varprojlim_n H^i(X, \mu_{l^n}^{\otimes r})$. On définit de même $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(r))$, où, $\bar{k}$ étant une clôture algébrique de k, on a $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. On note $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \hat{\mathbf{Z}}$. Si A est un G-module continu discret, $H^0(G, A) = A^G$ est le sous-module des invariants et $H^1(G, A) = A_G$ est le module-quotient des coinvariants. Comme $\hat{\mathbf{Z}}$ est de dimension cohomologique 1, la suite spectrale d'Hochschild-Serre fournit des suites exactes :

[de torsion

$$
(3) \qquad 0 \to H^{i-1}(\overline{X}, \mu_{l^n}^{\otimes r})_G \to H^i(X, \mu_{l^n}^{\otimes r}) \to H^i(\overline{X}, \mu_{l^n}^{\otimes r})^G \to 0,
$$

qui, compte tenu des théorèmes de finitude connus pour $\overline{X}$, montrent la finitude des groupes $H^i(X, \mu_{l^n}^{\otimes r})$. Ainsi les groupes $H^i(X, \mathbf{Z}_l(r))$, comme les $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(r))$, sont des $\mathbf{Z}_l$-modules de type fini, et un passage licite aux limites projectives donne les suites exactes :

$$
(4) \qquad 0 \to H^{i-1}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(r))_G \to H^i(X, \mathbf{Z}_l(r)) \to H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(r))^G \to 0.
$$

Des suites exactes de cohomologie sur X tirées des suites exactes de faisceaux étales obtenues, pour m et n variables, par tensorisation par $\mu_{l^n}^{\otimes r}$ de la suite exacte

$0 \to \mathbf{Z}/l^m \xrightarrow{l^n} \mathbf{Z}/l^{m+n} \to \mathbf{Z}/l^n \to 0$, on déduit par passages à la limite projective (licite) sur m, puis à la limite inductive sur n, les suites exactes :

(5) $$0 \to \mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z}_l(r)) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \to \mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r)) \to \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{X}, \mathbf{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}} \to 0,$$

où $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r) = \varinjlim_n \mu_{l^n}^{\otimes r}$. La finitude de $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r))$ pour $i \neq 2r, 2r+1$ (et donc, pour $i=3$ et $r=2$, celle de $\mathrm{CH}^2(\mathrm{X})_{l\text{-tors}}$) résulte alors de :

PROPOSITION 1. — *Pour* $i \neq 2r, 2r+1$, *le module* $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z}_l(r))$ *est de torsion.*

D'après Deligne [7], les valeurs propres du Frobenius géométrique agissant sur $\mathrm{V}_{i,r} = \mathrm{H}^i(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Z}_l(r)) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de module $\sqrt{q}^{\,i-2r}$, donc différents de 1 pour $i \neq 2r$. Ainsi, sous cette condition, $(\mathrm{V}_{i,r})^{\mathrm{G}} = (\mathrm{V}_{i,r})_{\mathrm{G}} = 0$ et $\mathrm{H}^i(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Z}_l(r))^{\mathrm{G}}$ et $\mathrm{H}^i(\overline{\mathrm{X}}, \mathbf{Z}_l(r))_{\mathrm{G}}$ sont finis. La proposition résulte alors de (4).

La nullité, pour $i \neq 2r, 2r+1$, et presque tout l, de $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r))$ résulte alors de :

PROPOSITION 2. — *Pour* $i \neq 2r+1$ *et presque tout* l, *le module* $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathbf{Z}_l(r))$ *est sans torsion.*

Ceci se déduit de la suite exacte (4) en utilisant, outre les conjectures de Weil [7], le résultat suivant, dû à Gabber [8] et appliqué ici à $\overline{\mathrm{X}}$:

THÉORÈME [8]. — *Pour* Y *une variété algébrique projective et lisse sur un corps séparablement clos, et pour presque tout* l, *les modules* $\mathrm{H}^i(\mathrm{Y}, \mathbf{Z}_l)$ *sont sans torsion.*

III. ZÉRO-CYCLES DES SURFACES RATIONNELLES SUR UN CORPS GLOBAL DE CARACTÉRISTIQUE POSITIVE.

THÉORÈME 4. — *Soit* k *un corps de degré de transcendance* 1 *sur un corps fini* $\mathbf{F}_q$ *de caractéristique* p. *Pour* X *une* k*-surface rationnelle, projective, lisse et géométriquement connexe, le groupe* $\mathrm{A}_0(\mathrm{X})$ *des classes de* 0*-cycles de degré* 0 *modulo l'équivalence rationnelle est, à la torsion* p*-primaire près, fini.*

Démonstration (esquisse). — Par hypothèse, il existe une extension finie k'/k de degré n, une k'-surface Z et des k'-morphismes $\mathrm{X}_{k'} \leftarrow \mathrm{Z} \to \mathbf{P}^2_{k'}$ qui sont composés d'éclatements de k'-points rationnels. Par un argument standard (EGA IV 8) et une série de réductions utilisant essentiellement le fait que le groupe de Picard d'une courbe lisse sur un corps fini est de type fini, on montre l'existence d'un carré cartésien (celui de droite) induisant celui de gauche par restriction de C à k :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}_{k'} \xrightarrow{\psi} \mathrm{X} & \qquad & \mathrm{Y}' \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Y} \\ \downarrow \quad\ \downarrow & & \downarrow \quad\ \downarrow \pi \\ k' \to k & & \mathrm{C}' \xrightarrow{\lambda} \mathrm{C} \end{array}$$

où C (resp. C′) est une $\mathbf{F}_q$-courbe lisse intègre de corps des fonctions k (resp. k'), où λ est fini et π lisse, où $\mathrm{Pic}\,\mathrm{C}' = 0$, et où, de plus, il existe une C′-surface Z′ et des C′-morphismes $\mathrm{Y}' \leftarrow \mathrm{Z}' \to \mathbf{P}^2_{\mathrm{C}'}$ qui sont composés d'éclatements le long de sections des projections sur C′ et induisent, par restriction à k', les k'-morphismes initiaux $\mathrm{X}_{k'} \leftarrow \mathrm{Z} \to \mathbf{P}^2_{k'}$. Compte tenu de

Pic $C' = 0$, le calcul de l'anneau de Chow des fibrés projectifs et des variétés éclatées [9] donne alors : $CH^2(Y') \simeq CH^2(P^2_C) \simeq CH^2(P^2_{k'}) = Z$. Ceci donne le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} CH^2(Y) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\rho"'] & CH^2(Y') \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & Z \arrow[d, equal] \\ CH^2(X) \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[rr, bend right, "\deg"'] & CH^2(X_{k'}) \arrow[r, "\simeq"] & Z \end{tikzcd}$$

où ρ est clairement surjective. On en tire une surjection $\ker \varphi^* \twoheadrightarrow \ker \psi^*$. Mais $\ker \psi^* = A_0(X)$ et $\ker \varphi^* \subset {}_nCH^2(Y)$ car $\varphi_* \circ \varphi^* = n$. Le corollaire 2, appliqué à la F_q-variété lisse Y permet alors de conclure à la finitude de $A_0(X)_{p'\text{-tors}}$.

Remarques. — On peut, en utilisant le corollaire 3, étendre le théorème 4 au cas où k/F_q est de degré de transcendance 2. Par ailleurs, l'un des auteurs [10] vient, par une méthode différente, d'établir le théorème 4 pour k un corps de nombres.

(*) Remise le 10 mai 1982.

[1] A. S. Mercuriev et A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism* (prépublication).

[2] S. Bloch, *Lecture Notes in Math.*, n° 844, 1981, p. 75-102.

[3] S. Bloch, O. Gabber et K. Kato (article en préparation).

[4] L. Illusie, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e sér., 12, 1979, p. 501-661.

[5] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces* (prépublication).

[6] N. Katz et W. Messing, *Invent. Math.*, 23, 1974, p. 73-77.

[7] P. Deligne, *Publ. math. I.H.E.S.*, n° 48, 1974, p. 273-308.

[8] O. Gabber, *Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété* (version préliminaire rédigée par J.-J. Sansuc et C. Soulé).

[9] J.-P. Jouanolou, *Lecture Notes in Math.*, n° 589, 1977, p. 282-350.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, *The Chow Group of Rational Surfaces* (prépublication).

J.-L. C.-T. : *C.N.R.S. Mathématiques*, Bât. 425, *Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay;*

J.-J. S. : *E.N.S.*, 45, *rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex* 05;

C. S. : *C.N.R.S. Mathématiques, Université Paris-VII,*
2, *place Jussieu, F-75221 Paris Cedex* 05.