Reprinted from

Catherine Goldstein
Editor

Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989

1990

Birkhäuser
Boston · Basel · Berlin

Séminaire de Théorie des Nombres
Paris 1988–89

Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé : Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les torseurs universels sur les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective, lorsque le nombre de fibres géométriques dégénérées est au plus 4. Ainsi la seule obstruction à la validité du principe de Hasse et à l'approximation faible pour de telles surfaces est l'obstruction de Brauer-Manin.

Introduction

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $X/\mathbb{P}^1_k$ une surface fibrée en coniques standard au-dessus de $\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire une surface X projective lisse intègre définie sur k, possédant un k-morphisme dominant $p : X \to \mathbb{P}^1_k$ dont (toutes) les fibres sont des coniques. La géométrie d'une telle surface est bien connue ([7], [8]). Toute fibre géométrique dégénérée de p est réduite et consiste en une paire de courbes exceptionnelles de première espèce se coupant transversalement en un point. Si r est le nombre de fibres géométriques dégénérées de p, qu'on appellera ici l'invariant de la fibration, et si ω_X désigne le faisceau canonique, on a pour le degré $(\omega_X \cdot \omega_X)$ de X l'égalité $(\omega_X \cdot \omega_X) = 8 - r$.

L'arithmétique de telles surfaces est essentiellement triviale lorsque $0 \leq r \leq 3$: l'existence d'un point k-rationnel implique la k-rationalité de la surface, et, lorsque k est un corps de nombres, le principe de Hasse vaut.

Sauf mention du contraire, nous supposerons désormais que p possède exactement $r = 4$ fibres géométriques dégénérées. Deux cas se présentent alors (Iskovskih [7], Prop. 1 ; [8], Thm. 5). Ou bien le faisceau $(-\omega_X)$ n'est pas ample et la surface X est k-birationnelle à une surface de Châtelet généralisée. Ou bien le faisceau $(-\omega_X)$ est ample, et X est une surface de Del Pezzo de degré 4, c'est-à-dire une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$. Plus précisément ([9], Cor. 3.4), dès que X possède un point k-rationnel, X est alors une intersection de deux quadriques donnée par un système :

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0 \\ g(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_3x_4 = 0. \end{aligned}$$

Inversement, toute intersection complète lisse définie par un tel système (1) est une surface fibrée en coniques d'invariant 4.

Comme toute surface fibrée en coniques sur la droite projective, X est une variété rationnelle, i.e. est birationnelle à l'espace projectif après extension finie du corps de base. La théorie de la descente développée par Sansuc et l'auteur [4] permet de résoudre la plupart des questions arithmétiques (qualitatives) sur les points rationnels d'une telle variété (projective et lisse) X dès que l'on sait établir les propriétés (R) et (PH) pour les torseurs universels sur X :

(R) Tout torseur universel qui possède un point k-rationnel est une variété k-rationnelle.

(PH) Si k est un corps de nombres, tout torseur universel T satisfait le principe de Hasse.

Faute d'établir (R), on se contente parfois de la propriété

(AF) Si k est un corps de nombres, tout torseur universel qui possède un point k-rationnel satisfait l'approximation faible.

Le théorème principal de la théorie de la descente affirme en effet :

THÉORÈME 0 ([4], Thm. 3.8.1 et Prop. 3.8.7). — *Soient k un corps de nombres et X une k-variété rationnelle. Si la propriété (PH) (resp. les propriétés (PH) et (AF)) valent pour X, et si X possède des points rationnels dans tous les complétés de k, alors les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X sont les seules obstructions. En particulier, si le groupe de Brauer de X est réduit au groupe de Brauer de k, alors le principe de Hasse (resp. l'approximation faible) valent pour X.*

Soit désormais X une surface fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$ d'invariant $r = 4$. Lorsque X est une surface de Châtelet généralisée, (R) (et donc (AF)) et (PH) sont établis dans [5] Thm. 8.1 et 8.2. Grâce à [4], Prop. 2.9.2, ceci suffit à établir (PH) et (AF) lorsque X est seulement k-birationnelle à une telle surface. Supposons donc $(-\omega_X)$ ample, et donc X de Del Pezzo de degré 4.

Pour une telle surface, et d'un point de vue différent, relevant de la théorie des ordres et de la K-théorie, Salberger a obtenu des résultats très proches de (R) et (PH). Lorsque $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$, il a ainsi établi le principe de Hasse pour une telle surface (des cas particuliers sont traités dans [11] Thm. 5.2 et [12], Thm. 5.3, en s'appuyant en partie sur [5]; le cas général, qui fait l'objet du Corollaire 0.10 de [15], repose sur une méthode nouvelle [14]). Lorsque $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \neq 0$, Salberger peut montrer que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule, là encore de deux façons différentes ([13]; remarque après le Théorème (0.8) de [15]).

Il est possible d'obtenir ces résultats en restant dans le cadre de la théorie de la descente. Les cas particuliers de (PH) obtenus dans [11], Thm. 5.2 sont ainsi établis à nouveau dans [3], Cor. 2 et Cor. 3. L'énoncé (R) (et donc (AF)) est établi par Skorobogatov et l'auteur dans [6]. Le but du présent article, qui constitue une suite naturelle de [6], est d'établir (PH) (et, de nouveau, (AF)) :

THÉORÈME 1. — *Soient k un corps de nombres et X une surface fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$, d'invariant $r = 4$. Tout torseur universel sur X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Pour établir le théorème, nous utilisons la géométrie des surfaces considérées et les équations explicites des torseurs universels [4] pour nous ramener à des variétés pour lesquelles le principe de Hasse et l'approximation faible ont déjà été établis dans [5].

Comme rappelé plus haut, le théorème 1 implique le :

THÉORÈME 2. — *Soient k un corps de nombres et X une surface fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$, d'invariant $r = 4$. Si X possède des points rationnels dans tous les complétés de k, alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X, et en particulier à l'existence d'un point k-rationnel sur X, est la seule obstruction. Si le groupe de Brauer de X est réduit au groupe de Brauer de k, alors X a des points rationnels et satisfait l'approximation faible.*

Exemple : Supposons X donnée par un système (1). Le polynôme homogène $P(\lambda,\mu) = \text{dét}(\lambda f + \mu g)$ est un polynôme séparable (car X est lisse) de degré 5. Si ce polynôme ne possède pas un couple de racines globalement rationnel sur k (ce qui ici équivaut au fait qu'il est produit d'un facteur linéaire par un facteur irréductible de degré 4), le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X. On sait en effet qu'alors $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$ ([5] Prop. 3.18).

Le présent article, qui constitue une suite naturelle de l'article [6], auquel nous renvoyons pour certaines références bibliographiques, a été directement inspiré par une lettre de Salberger [13], que je lui sais gré de m'avoir communiquée : en de nombreux points, notre démonstration est simplement une transcription de la sienne.

Salberger et Skorobogatov ont récemment établi (PH) et (AF) pour les surfaces fibrées en coniques d'invariant 5 (qui ne sont autres que les surfaces cubiques munies d'une droite rationnelle). La méthode de descente seule ne permet pas à l'heure actuelle d'obtenir ce résultat. Leur méthode combine descente et K-théorie, ainsi qu'un résultat d'effectivité sur les 0-cycles.

Démonstration du théorème 1

Comme expliqué dans l'introduction, seul reste à établir le cas où $(-\omega_X)$ est ample, ce que nous supposerons désormais.

(i) Soit $p : X \to \mathbb{P}^1_k$ la projection structurale. Soit $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t]) \subset \mathbb{P}^1_k$. Quitte à faire un changement de variables, on peut supposer la fibre à l'infini lisse. Soit $P(t) \in k[t]$ le polynôme unitaire séparable de degré 4 qui s'annule aux points de $\mathbb{A}^1_k$ à fibre singulière, et soit $K = k[\theta] = k[t]/P(t)$, où θ désigne la classe de t, la k-algèbre séparable de degré 4 associée. Soit $L = K[y]/(y^2 - f)$, avec $f = f(\theta) \in K^*$, l'extension quadratique de K correspondant aux fibres singulières. On notera U_0 l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{A}^1_k$ des points de dégénérescence de p.

(ii) Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, et $g = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. La suite exacte naturelle de g-modules ([4] (2.6.5))

$$0 \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\bar{X} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où la flèche $\mathrm{Pic}\,\bar{X} \to \mathbb{Z}$ est obtenue par restriction du groupe de Picard de $\bar{X}$ à la fibre générique de la projection de $\bar{X}$ sur $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$, définit le g-module $\widehat{S}$ et la flèche $\lambda : \widehat{S} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\bar{X} = \widehat{S}_0$.

On a la suite exacte de k-tores

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow S_0 \longrightarrow S \longrightarrow 1 \tag{2}$$

duale de la suite de g-modules ci-dessus. Si T_u est un torseur universel sur X, par le changement de groupe structural $S_0 \to S$ on obtient un torseur T sur X, de groupe S, de type λ. La projection $T_u \to T = T_u \times^{S_0} S$ fait de T_u un torseur sur T sous $\mathbb{G}_{m,k}$. Ainsi (théorème 90 de Hilbert-Grothendieck) T_u est k-birationnel au produit $T \times_k \mathbb{G}_{m,k}$.

(iii) Soit T un torseur de type λ. Rappelons ([3]; [4] paragraphe 2.6) comment obtenir des équations concrètes (*équations locales*) pour un tel torseur sur une surface rationnelle fibrée en coniques.

Soit $\alpha = \alpha(\theta) \in K^*$, et soit $W = W_\alpha$ la variété affine donnée dans $\mathbb{A}_k^2 \times R_{K/k}\mathbb{A}_K^2 \simeq \mathbb{A}_k^{10}$ par l'équation :

$$u - \theta v = \alpha(\theta)(U^2 - f(\theta)V^2) \tag{3}$$

où $U = u_0 + u_1\theta + u_2\theta^2 + u_3\theta^3$ et $V = v_0 + v_1\theta + v_2\theta^2 + v_3\theta^3$. La projection sur $R_{K/k}\mathbb{A}_k^2 \simeq \mathbb{A}_k^8$ induit un isomorphisme de W avec une variété $W_1 \subset \mathbb{A}_k^8$ définie par l'annulation de deux formes quadratiques. Ainsi W_1 est-elle le cône affine sur une variété $Z \subset \mathbb{P}_k^7$, elle-même une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}_k^7$. Par passage à la clôture algébrique et changement de variables, on vérifie aisément que Z est une intersection pure, géométriquement intègre, n'est pas un cône, et que son lieu singulier consiste en huit points isolés.

Soit $W_0 \subset W$ l'ouvert défini par

$$v \cdot N_{K/k}(u - \theta v) \neq 0.$$

Soit $U = p^{-1}(U_0)$ et $T_U = T \times_X U$ la restriction de T à U. La description locale des torseurs de type λ pour les surfaces fibrées en coniques assure qu'il existe un $\alpha \in K^*$ et un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} T_U & \longrightarrow & W_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & U_0, \end{array} \tag{4}$$

où $U \to U_0$ est induit par p et où le morphisme composé $W_0 \to U_0 \subset \mathbb{P}^1_k$ associe au point $(u, v, \{u_i\}_{i=0,\cdots,3}, \{v_i\}_{i=0,\cdots,3})$ le point de coordonnées homogènes (u, v).

De plus, l'hypothèse que k est un corps de nombres permet d'appliquer le théorème 2.6.4 de [4] (qui repose sur une variante du lemme d'Abhyankar) : la fibration en coniques $T_U \to W_0$ est constante sur un ouvert, et la k-variété T est donc k-birationnelle au produit de W_0 et d'une conique lisse C.

(iv) LEMME 1. — *Si T possède un point k-rationnel, alors $T(k)$ est dense pour la topologie de Zariski sur T.*

Démonstration : Soit $\pi : T \to X$ la projection structurale. L'hypothèse $T(k) \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$. Comme X est une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$ et que la caractéristique de k est nulle, on sait qu'alors X est k-unirationnelle ([10] IV.7.8 et IV.8.1 (= IV.29.4 et IV.30.1)). L'une au moins des classes pour la R-équivalence sur X est donc Zariski-dense. En utilisant alors les transformations k-birationnelles de X, on établit alors que toute classe pour la R-équivalence est Zariski-dense (voir [5], Prop. 3.23 et Prop. 3.24). Un point $M \in X(k)$ est dans $\pi(T(k))$ si et seulement si la fibre de T en M est triviale dans $H^1(k, S)$. Comme les fibres d'un torseur en deux points R-équivalents sont isomorphes ([4] 2.7.2), l'image de $T(k)$ contient la classe de R-équivalence de la projection par π d'un point de $T(k)$, et est donc Zariski-dense. Comme par ailleurs chaque fibre de T au-dessus d'un point de $\pi(T(k))$, est k-isomorphe à un k-tore, dont les k-points sont Zariski-denses, et que π est un morphisme dominant, on conclut, en utilisant le théorème de constructibilité de Chevalley, que $T(k)$ est Zariski-dense dans T.

(v) LEMME 2. — *Supposons $T(k)$ non vide. Il existe une courbe $Y = \mathbb{P}^1_k$ sur X possédant les propriétés suivantes :*

(a) *La projection p induit un revêtement double $\varphi : Y \to \mathbb{P}^1_k$.*

(b) *Y ne contient aucun point singulier d'une fibre de p.*

(c) *Il existe un point k-rationnel de $U_0 \subset \mathbb{P}^1_k$ dont l'image réciproque sur Y consiste en deux points k-rationnels $\{N, N'\}$ appartenant à $\pi(T(k))$.*

(d) *Si $Q \in U_0$ est un point fermé de dégénérescence de p, l'extension quadratique $\varphi^{-1}(Q)/Q$ est la composante en Q de l'extension quadratique L/K, définie en* (i), *qui mesure la dégénérescence de p.*

Démonstration : D'après Iskovskih [8], une surface rationnelle fibrée en coniques d'invariant 4 qui est une surface de Del Pezzo possède une seconde fibration en coniques, soit $q : X \to \mathbb{P}^1_k$. Si F_1, resp. F_2, est une fibre (géométrique) de p, resp. q, dans le groupe de Picard de $\bar{X}$, on a l'égalité

$$(-\omega_X) = F_1 + F_2,$$

et donc $(F_1 \cdot F_2) = 2$. En outre, si E est une composante irréductible d'une fibre dégénérée de la fibration p, c'est une courbe exceptionnelle de première espèce (et une droite dans $\mathbb{P}^4_k$), et l'on a $(E \cdot F_2) = (-E \cdot \omega_X) = 1$.

D'après le lemme 1, $\pi(T(k))$ est Zariski-dense dans X. On peut donc trouver un point rationnel $M \in \pi(T(k))$ tel que $p(M)$ appartienne à l'ouvert U_0. La fibre $F = p^{-1}(p(M))$ est donc une courbe lisse k-isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$. La même référence à [4], Prop. 2.7.2, que ci-dessus montre que tout point de $F(k)$ appartient à $\pi(T(k))$. Via la seconde fibration q, la courbe F est un revêtement double de $\mathbb{P}^1_k$. On peut donc trouver un point $N \in F(k)$ non situé sur une fibre dégénérée de la fibration q, et tel que la projection $q : F \to \mathbb{P}^1_k$ soit non ramifiée en N. La courbe $Y = q^{-1}(q(N))$ satisfait alors les conditions (a), (b), (c), (d) (la propriété (d) résulte du calcul de nombres d'intersection ci-dessus).◇

(vii) LEMME-CLÉ. — *Si $T(k)$ est non vide, alors l'intersection de deux quadriques $Z \subset \mathbb{P}^7_k$ contient une droite de $\mathbb{P}^7_k$ définie sur k.*

(N.B. : la démonstration utilise l'hypothèse $T(k) \neq \emptyset$, qui est plus forte que $Z(k) \neq \emptyset$.)

Démonstration : Soit Y une courbe, $N \in Y(k) \subset X(k)$, $N \in \pi(T(k))$, comme dans le lemme 2. Il existe donc un point $R \in T_U(k)$ tel que $N = \pi(R)$. Par la projection de T_U sur W_0 (voir le diagramme (4)), on obtient un point $(a, b, a_i, b_i) \in W_0(k) \subset W(k) \subset k^{10}$. Si l'on définit A et B dans K par

$$A = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \qquad \text{et} \qquad B = b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3,$$

on a :

$$a - \theta b = \alpha(\theta)(A^2 - f(\theta)B^2) \in K^* \tag{5}$$

et $b \neq 0$, puisque le point $(a, b) \in \mathbb{P}^1_k(k)$ est dans U_0. Posons $r = a/b \in k$.

Nous pouvons maintenant multiplier (3) et (5), et un changement linéaire de variables réduit alors (3) à

$$u - \theta v = (r - \theta)^{-1}(U^2 - f(\theta)V^2). \tag{6}$$

Pour Y une courbe comme dans le lemme, la restriction du revêtement $Y \to \mathbb{P}^1_k$ à $\mathbb{A}^1_k \subset \mathbb{P}^1_k$ est un revêtement fini de degré 2 donné par une équation $y^2 = g(t)$, avec $g \in k[t]$ polynôme de degré 1 ou 2. Comme le revêtement $Y \to \mathbb{P}^1_k$ n'est pas ramifié aux points de dégénérescence du morphisme p (Lemme 2 (b)), l'image $g(\theta) \in K$ de g dans $k[t]/P(t) = K$ est inversible. On sait bien que si E est un *corps* (car.$(E) \neq 2$) et $a \in E^*$, le noyau de l'homomorphisme $E^*/E^{*^2} \to E(\sqrt{a})^*/E(\sqrt{a})^{*^2}$ est le sous-groupe $\{1, a\} \subset E^*/E^{*^2}$. Il résulte alors du lemme 2 (d) que le quotient $f(\theta)/g(\theta)$ est un carré dans K^*.

Un changement linéaire de coordonnées réduit alors (6) à

$$(r - \theta)(u - \theta v) = g(r)U^2 - g(\theta)V^2. \tag{7}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, posons

$$u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0. \tag{8.1}$$

Si de plus nous faisons

$$u_0 - v_0 = -ru_1 \tag{8.2}$$

nous voyons que la trace de (7) sur l'espace linéaire défini par (8.1) et (8.2) est donnée par ces égalités jointes à

$$(r - \theta)(u - \theta v) = g(r)(u_0 + u_1\theta)^2 - g(\theta)(u_0 + ru_1)^2. \tag{8.3}$$

Mais le second membre de cette égalité, tout comme le premier, s'annule "lorsque l'on fait $r = \theta$". Par division par $(r - \theta) \in K^*$, on voit ainsi que (8.3) peut se réécrire

$$u - \theta v = q_0(u_0, u_1) - q_1(u_0, u_1)\theta, \tag{8.4}$$

i.e.

$$u = q_0(u_0, u_1) \qquad \text{et} \qquad v = q_1(u_0, u_1),$$

où q_0 et q_1 sont des formes quadratiques à coefficients dans k.

Ainsi la droite définie par

$$u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0 \tag{8.1}$$

et

$$u_0 - v_0 = -ru_1 \tag{8.2}$$

est-elle contenue dans l'intersection de deux quadriques $Z \subset \mathbb{P}^7_k$. ◇

(viii) Fin de la démonstration du théorème.

Soit T_u un torseur universel. Il existe alors un torseur T de type λ et tel que T_u est k-birationnel au produit $\mathbb{P}^1_k \times T$. D'après (ii) et (iii), la k-variété T est k-birationnelle à un produit $\mathbb{P}^1_k \times C \times \mathbb{P}^1_k \times Z$, avec C une conique lisse et Z une intersection de deux quadriques $Z \subset \mathbb{P}^7_k$ comme ci-dessus.

Supposons que la k-variété lisse T_u possède des points dans tous les complétés k_v de k. Il en est alors de même de T. D'après le théorème des fonctions implicites pour la variété lisse T, pour chaque place v, $T(k_v)$ est Zariski-dense dans la k-variété T. Ainsi la conique C a alors aussi des points dans tous les complétés de k, donc aussi dans k, elle est donc isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$, et T est k-birationnel à $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \times Z$. Par ailleurs, le même argument montre que Z possède des points lisses dans tous les complétés de k.

Soit E/k une extension galoisienne finie avec $T(E) \neq \emptyset$, et soit F, avec $k \subset F \subset E$, le corps fixe d'un 2-sous-groupe de Sylow $H = \mathrm{Gal}(E/F) \subset G = \mathrm{Gal}(E/k)$. Comme H est un groupe nilpotent, l'extension E/F se décompose en une chaîne d'extensions de degré 2 : $E = E_n \supset \cdots \supset E_i \supset E_{i-1} \supset \cdots \supset E_0 = F$. Supposons $T(E_i) \neq \emptyset$. En appliquant le lemme-clé au niveau du corps E_i, on voit que Z contient une droite définie sur E_i, et donc $Z_{E_{i-1}}$ contient deux droites définies sur une extension au plus quadratique de E_{i-1} et globalement rationnelles sur E_{i-1}. Comme par ailleurs $Z_{E_{i-1}}$ a des points rationnels lisses dans tous les complétés de E_{i-1} puisqu'il en est ainsi de Z sur k, le théorème 13.2 (et la remarque 13.2.1) de [5] sur les intersections complètes, géométriquement intègres et non coniques, de deux quadriques, assure que $Z \subset \mathbb{P}^7_k$ possède des points rationnels (lisses) sur le corps de nombres E_{i-1}. Ainsi $Z_{E_{i-1}}$ est E_{i-1}-unirationnelle ([5], Prop. 2.3), donc $Z(E_{i-1})$ est Zariski-dense dans $Z_{E_{i-1}}$ (cela résulte aussi de la validité de l'approximation faible pour $Z_{E_{i-1}}$, [5], Thm. 3.11), et de l'équivalence k-birationnelle de T à $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \times Z$, on déduit que $T(E_{i-1})$ est non vide.

Une récurrence descendante évidente montre alors que Z possède des points rationnels (lisses) sur $E_0 = F$. Comme l'extension F/k a un degré impair, un théorème de Amer [1] et Brumer [2] assure alors que la variété Z possède un point rationnel sur k. Si Z possède un point singulier k-rationnel, la projection depuis ce point dans $\mathbb{P}^7_k$ induit un isomorphisme k-birationnel de Z avec une quadrique ([5], Prop. 2.1), quadrique qui possède des points lisses dans tous les complétés de k, et est donc k-birationnelle à un espace projectif. Ainsi, Z possède un point k-rationnel lisse, et l'on conclut comme ci-dessus que les points k-rationnels sont Zariski-denses dans Z. Ceci implique $T(k) \neq \emptyset$ et donc $T_u(k) \neq \emptyset$, ce qui établit le principe de Hasse pour T_u. Une nouvelle application du lemme assure que l'intersection de deux quadriques Z contient une droite rationnelle sur k. On peut alors utiliser [5], Prop. 2.2, et conclure que Z est k-birationnelle à un espace projectif, donc aussi T et T_u. La k-variété lisse T_u étant k-rationnelle, elle satisfait l'approximation faible.

Remarques :

(1) Une fois connue l'existence sur Z d'une droite définie sur F, on peut aussi conclure en utilisant le théorème d'Amer [1], qui est une généralisation du théorème de Brumer, pour en déduire directement l'existence d'une droite définie sur k. Ceci évite la seconde utilisation du lemme-clé.

(2) Lorsque la surface fibrée en coniques X est aussi une surface de Del Pezzo de degré 4, la k-rationalité des torseurs universels possédant un k-point est le principal résultat de [6]. Le résultat de [6] vaut sur un corps de caractéristique zéro arbitraire. La présente démonstration redonne ce résultat dans cette généralité :

Soit T_u un torseur universel avec $T_u(k) \neq \emptyset$, et soit T le torseur de type λ associé. Alors $T(k)$ est non vide, et le théorème 2.6.4 de [5] assure que T est

k-birationnelle à un produit $C \times \mathbb{P}^1_k \times Z$, avec C une conique lisse. Par ailleurs, l'hypothèse $T(k) \neq \emptyset$ assure comme ci-dessus que $T(k)$ est Zariski-dense dans T. On en déduit $C(k) \neq \emptyset$, et donc $C \simeq \mathbb{P}^1_k$, et le lemme-clé, valable sur un corps de caractéristique zéro quelconque, assure alors que Z contient une droite k-rationnelle : Z est donc k-birationnelle à un espace projectif, et il en est de même de T, puis de T_u.

(3) Il serait souhaitable de donner une preuve plus intrinsèque du lemme-clé et de son analogue chez Salberger [13].

Manuscrit reçu le 7 septembre 1989

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Amer. — *Quadratische Formen über Funktionenkörpen*, Dissertation, Mainz, 1976.

[2] A. Brumer. — Remarques sur les couples de formes quadratiques, *C.R. Acad. Sc. Paris, série A*, **286**, (1978), 679-681.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc. — La descente sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques, *C.R. Acad. Sc. Paris, Série I*, **303**, (1986), 303-306.

[4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc. — La descente sur les variétés rationnelles II, *Duke Math. J.* **54**, (1987), 375-492.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and Sir Peter Swinnerton-Dyer. — Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, *J. für die reine und ang. Math.* I, *Bd.* **373**, (1987), 37-107; II, *Bd.* **374**, (1987), 72-168.

[6] J.-L. Colliot-Thélène and A.N. Skorobogatov. — R-equivalence on conic bundles of degree 4, *Duke Math. J.* **54**, (1987), 671-677.

[7] V.A. Iskovskih. — Propriétés birationnelles des surfaces de degré 4 dans $\mathbb{P}^4_k$, *Mat. Sbornik (N.S.)* **88**, (1972) = *Math. USSR-Sbornik* **17**, (1972), 575-577.

[8] V.A. Iskovskih. — Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur des corps arbitraires, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 19-43, (engl. transl. : *Math. USSR Izv.* **14**, (1980), 17-39).

[9] B.È. Kunyavskiĭ, A.N. Skorobogatov, M.A. Tsfasman. — *Del Pezzo surfaces of degree 4*, Mémoires de la Société Mathématique de France, n° **37**, Supplément au Bulletin de la S.M.F. **117**, (1989), Fascicule 2.

[10] Yu. I. Manin. — *Formes cubiques : algèbre, géométrie, arithmétique*, Nauka, Moscou 1972. Trad. anglaise : *Cubic Forms, algebra, geometry, arithmetic* : Second edition, North-Holland 1986.

[11] P. Salberger. — Sur l'arithmétique de certaines surfaces de Del Pezzo, *C.R. Acad. Sc. Paris, Série I*, **303**, (1986), 273-276.

[12] P. Salberger. — On the arithmetic of conic bundle surfaces, *in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1985-86, éd. C. Goldstein*, Progr. Math. Birkhäuser **71**, (1987), 175-197.

[13] P. Salberger. — Lettre à A.N. Skorobogatov, 27/3/87.

[14] P. Salberger. — Zero-cycles on rational surfaces over number fields, *Invent. Math.* **91**, (1988), 505-524.

[15] P. Salberger. — Some new Hasse principles for conic bundle surfaces, *in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1987-88, éd. C. Goldstein,* Progr. Math. Birkhäuser **81**, (1989), 283-305.

J.-L. Colliot-Thélène
C.N.R.S. Mathématiques,
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex