

RÉSOLUTIONS FLASQUES ET APPROXIMATION PRESQUE FORTE

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

RÉSUMÉ. L'approximation presque forte pour les tores et plus généralement les groupes réductifs sur un corps de nombres vient d'être étudiée par Rapinchuk et Tralle d'une part, et par Cao et Wang d'autre part. On observe que l'on peut établir le cas général à partir du cas des tores quasi-triviaux, en utilisant les tores flasques et les résolutions flasques de groupes réductifs. On porte une attention particulière au corps de déploiement minimal qui apparaît dans les théorèmes.

Almost strong approximation for reductive groups over number fields was recently discussed and established in works of Rapinchuk and Tralle, and of Cao and Wang. In this note I show how systematic use of flasque tori and flasque resolutions enables one to quickly reduce the proof of their main result to the case of quasi-trivial tori.

INTRODUCTION

Soit G un groupe réductif (par définition connexe) sur un corps de nombres K . Soit S un ensemble de places de K . Soit $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$ le groupe des adèles de G hors de S .

Supposons désormais que S est infini et contient les places archimédiennes. L'adhérence de $G(K)$ dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe normal, et le quotient est abélien [CW25, Remark 1.8 and Prop. 4.1]. Ces faits remontent à des résultats de Kneser (approximation forte pour les groupes semi-simples simplement connexes) et Sansuc [Sa81, Théorème 3.3].

Suivant [RT25], on dit que G satisfait l'approximation presque forte hors de S si ce quotient est fini. Quitte à ajouter un nombre fini de places à S , l'image de $G(K)$ dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est alors dense (voir [RT25, Definition 2.4] et les commentaires suivant cette définition).

A. Rapinchuk et W. Tralle [RT25], ainsi que Y. Cao et Y. Wang [CW25], se sont récemment intéressés à la validité de ces propriétés

pour des groupes réductifs connexes quelconques lorsque S est un ensemble infini convenable de places de K . Leurs travaux se sont influencés mutuellement. Selon [CW25], l'approximation presque forte pour les tores, relativement à certains ensembles S de places définis par des progressions arithmétiques, avait déjà été étudiée par G. Prasad et A. Rapinchuk [PR01].

Pour énoncer leur résultat sous sa forme précise, on aura besoin des définitions suivantes. Soit K un corps de caractéristique zéro. Soit G un K -groupe réductif. Notons $Z \subset G$ le centre connexe de G (c'est un tore). Soit $G^{ss} \subset G$ le groupe dérivé de G . Soit $G^{tor} = G/G^{ss}$ le quotient torique maximal. Soit $G^{sc} \rightarrow G^{ss}$ le revêtement simplement connexe. La flèche composée $Z \rightarrow G \rightarrow G^{tor}$ est une isogénie de K -tores. Les corps de décomposition de Z et de G^{tor} coïncident. La multiplication dans G induit un homomorphisme surjectif

$$G^{sc} \times Z \rightarrow G.$$

Soit ν son noyau, qui est un K -groupe de type multiplicatif fini. On note K_ν le corps de décomposition de ν et K_Z le corps de décomposition de Z , c'est-à-dire le corps de décomposition de leurs groupes de caractères. On note $K_{\nu,Z}$ le composé de ces deux extensions.

Pour K un corps de nombres et L/K une extension finie galoisienne on note $\text{Spl}(L/K)$ l'ensemble des places de K qui sont totalement décomposées dans L . On note $\partial_K(\bullet)(S) \in [0, 1]$ la densité de Dirichlet d'un ensemble S de places de K (si elle existe).

Le théorème suivant a été établi par Y. Cao et Y. Wang [CW25, Thm. 1.10]. Une version légèrement plus faible avait été obtenue par A. Rapinchuk et W. Tralle [RT25, Thm. 1.3].

Théorème 0.1. *Soit K un corps de nombres et soit G un K -groupe réductif connexe. Avec les notations ci-dessus, soit $L = K_{\nu,Z}$. Pour tout ensemble infini S de places de K , contenant les places archimédiennes et satisfaisant*

$$\partial_K(S \cap \text{Spl}(L/K)) > 0,$$

l'approximation presque forte hors de S vaut : l'adhérence de $G(K)$ dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe d'indice fini.

Si l'on remplace L par une extension finie L' qui contient $K_{\nu,Z}$, l'hypothèse sur la densité des places devient plus contraignante. L'hypothèse faite sur le groupe G dans [RT25, Thm. 1.3] donne le théorème ci-dessus pour l'extension L'/K composée de K_Z et de l'extension minimale sur laquelle le groupe G^{ss} devient une forme interne d'un groupe

déployé. On a $K_{\nu,Z} \subset L'$ ([CW25, Thm. 1.9] et sa démonstration à la fin du §5 de [CW25]).

Pour $G = T$ un K -tore de corps de déploiement K_T , auquel cas $T = Z$ et $K_{\nu,Z} = K_T$, le théorème 0.1 est établi dans [RT25, Thm. 2.6].

Les travaux [RT25] et [CW25] contiennent aussi des bornes pour l'indice de l'adhérence $G(K)$ dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$. Nous ne discutons pas ici cet aspect du problème.

Si G est un K -tore, le corps $K_{\nu,Z}$ coïncide avec le corps de décomposition du K -tore. Les auteurs de [RT25] commencent par établir le théorème 0.1 lorsque G est un K -tore T quasi-trivial. C'est l'objet de la section 3 de [RT25]. Dans les sections 4 et 5, les auteurs établissent ensuite le théorème 0.1 pour tout K -tore.

Les auteurs de [CW25] obtiennent le théorème 0.1 ci-dessus directement pour tout groupe algébrique linéaire connexe ([CW25], Thm. 1.10). Leur travail utilise les théorèmes sur l'obstruction de Brauer–Manin entière pour les groupes linéaires connexes, en particulier ceux obtenus par C. Demarche.

Dans ce travail, on montre que l'on peut passer rapidement du théorème 0.1 pour les tores quasi-triviaux au théorème pour les groupes réductifs quelconques. On éclaire par ailleurs le rôle de l'extension $K_{\nu,Z}/K$ dans le théorème 0.1.

Au §1, on montre comment pour certains homomorphismes surjectifs de groupes réductifs, la propriété d'approximation presque forte de l'un peut se déduire de celle de l'autre.

Au §2, on montre que l'on peut réaliser rapidement le passage du théorème 0.1 pour les K -tores quasi-triviaux (établi au §3 de [RT25]) au théorème 0.1 pour tout K -tore T . On s'appuie pour cela sur la théorie connue des résolutions flasques de tores

$$1 \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow 1$$

(avec P K -tore quasi-trivial et F K -tore flasque, tous deux déployés par le corps de décomposition de T) (Endo et Miyata, Voskresenskiï, Colliot-Thélène et Sansuc [CTSa77], [CTSa87]).

Au §3, en utilisant d'une autre façon les tores flasques [CTSa87], on montre ensuite que l'on peut passer rapidement du théorème 0.1 pour tout K -tore (considéré au §2) au théorème 0.1 pour un K -groupe réductif G quelconque.

La combinaison des §2 et §3 donne le théorème 0.1 à partir du cas des tores quasi-triviaux.

Tout K -groupe réductif G admet des résolutions flasques ([CT04] et [CT08])

$$1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

avec F un K -tore flasque et H un K -groupe quasi-trivial, c'est-à-dire un groupe extension d'un K -tore quasi-trivial P par un K -groupe semi-simple simplement connexe. Le K -tore P est déterminé par le K -groupe H , c'est son quotient torique maximal. À toute telle résolution, on associe le corps $K_H := K_P$ de décomposition du K -tore P .

Au §4, on imite pour les groupes réductifs la méthode du §2 pour les tores. On voit ainsi qu'à partir du cas des tores quasi-triviaux, on peut établir une version a priori plus faible du théorème 0.1 pour un K -groupe réductif G quelconque. Partant d'une résolution flasque

$$1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

on obtient le théorème 0.1 avec L remplacé par K_H . On a $K_{\nu,Z} \subset K_H$ mais on n'a pas forcément l'égalité.

Les résultats du §5 sont motivés par cette difficulté. Certains des arguments dans ce paragraphe ont été suggérés dans des discussions (en français) avec ChatGPT-5.6 Sol.

Pour G un K -groupe réductif, au §5 on montre que *le corps $K_{\nu,Z}$ coïncide avec le corps de déploiement $K_{\pi_1(G)}$ du groupe fondamental algébrique $\pi_1(G)$, comme défini par M. Borovoi.*

Dans [CT08], Remarque 6.4.1, on avait soulevé la question :

Question *Pour tout K -groupe réductif G , existe-t-il une résolution flasque*

$$1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

avec $K_H = K_{\pi_1(G)}$?

Au §5, on explique comment une réponse affirmative à cette question, combinée aux résultats du §4 et à l'égalité $K_{\nu,Z} = K_{\pi_1(G)}$ donne une démonstration du théorème 0.1 directement à partir du cas des tores quasi-triviaux, démonstration alternative à celle donnée aux §2 et §3.

Une esquisse de réponse affirmative à la question m'a été proposée par ChatGPT. Une démonstration d'un résultat plus général vient d'être donnée par P. Gille [Gi26], ce qui rend inconditionnelle cette démonstration du théorème 0.1 directement à partir du cas des tores quasi-triviaux.

On utilise librement les notations de l'article [CT08].

Je remercie Yang Cao et Philippe Gille pour diverses remarques.

Les utilisations de ChatGPT-5.6 Sol sont indiquées dans le texte. J'ai aussi eu recours à ChatGPT pour les corrections stylistiques finales.

1. SUR L'APPROXIMATION PRESQUE FORTE : RÉDUCTIONS

Soit K un corps de nombres. Soit Ω_K l'ensemble de ses places. Soit X une K -variété, c'est-à-dire un K -schéma séparé de type fini. Soit $S \subset \Omega_K$ un ensemble de places de K . On note $\mathbf{A}_K^{(S)} \subset \prod_{v \notin S} K_v$ l'ensemble des adèles hors de S . Cet espace est muni d'une topologie naturelle.

Si $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ est une suite exacte de K -groupes réductifs, alors l'application induite $G_2(\mathbf{A}_K^{(S)}) \rightarrow G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est ouverte. C'est un cas particulier d'un énoncé plus général [Co12, Thm. 4.5]. Le point clé est que G_1/K est lisse et géométriquement connexe.

Comme rappelé dans l'introduction, si S est infini et contient toutes les places archimédiennes, et G est un K -groupe réductif, l'adhérence de $G(K)$ dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe normal, et le quotient est abélien.

Proposition 1.1. *Soient K un corps de nombres et S un ensemble infini de places contenant les places archimédiennes. Soit*

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$$

une suite exacte de K -groupes réductifs. Si $\prod_{v \notin S} H^1(K_v, G_1)$ est fini, et si G_2 satisfait l'approximation presque forte par rapport à S , alors G_3 satisfait l'approximation presque forte par rapport à S .

Démonstration. L'image de $p_S : G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ dans $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe ouvert qui est la fibre au point neutre de l'application $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)}) \rightarrow \prod_{v \notin S} H^1(K_v, G_1)$. Il est donc d'indice fini. Si l'adhérence de $G_2(K)$ dans $G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe d'indice fini, alors l'adhérence de $G_3(K)$ dans $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est un sous-groupe d'indice fini. $\square$

Proposition 1.2. *Soient K un corps de nombres et S un ensemble infini de places contenant les places archimédiennes. Soit*

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$$

une suite exacte de K -groupes réductifs. Supposons G_1 semi-simple simplement connexe. Si G_3 satisfait l'approximation presque forte par rapport à S , alors G_2 satisfait l'approximation presque forte par rapport à S .

Démonstration. On note $p : G_2 \rightarrow G_3$.

(a) Soit G/K simplement connexe. Pour toute place finie v de K , on a $H^1(K_v, G) = 0$ (Kneser). L'application

$$H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_K^\infty} H^1(K_v, G)$$

est une bijection d'ensembles finis (Eichler, Landherr, Kneser, Harder, Chernousov). Ainsi $G_2(K_v) \rightarrow G_3(K_v)$ est surjectif pour toute place finie v , et l'image de $G_2(K)$ dans $G_3(K)$ est un sous-groupe $H \subset G_3(K)$ d'indice fini.

(b) Comme S est infini, l'image de $G_1(K)$ dans $G_1(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est dense. C'est un argument connu. D'après le théorème d'approximation forte classique de Kneser et Platonov, pour G un K -groupe semisimple simplement connexe et S_0 un ensemble fini de places de K tel que tout facteur presque simple de G soit isotrope en au moins une place de S_0 , l'approximation forte vaut pour G hors de S_0 . Comme chaque facteur presque simple de G est isotrope en toutes les places de K sauf un nombre fini, et S est infini, le résultat suit.

(c) Pour chaque place v l'application $p_v : G_2(K_v) \rightarrow G_3(K_v)$ est ouverte. Par ailleurs, sur un ouvert du spectre de l'anneau des entiers de K , la suite exacte donnée s'étend en une suite exacte de groupes réductifs

$$1 \rightarrow \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_3 \rightarrow 1.$$

Pour v place dans cet ouvert, notant O_v l'anneau local complété, on a $H^1(O_v, G_1) = 0$ via Hensel et le théorème de Lang, donc $\tilde{G}_2(O_v) \rightarrow \tilde{G}_3(O_v)$ est surjectif. On conclut que l'application $p_S : G_2(\mathbf{A}_K^{(S)}) \rightarrow G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est ouverte et surjective.

(d) Comme le sous-groupe $H = p(G_2(K)) \subset G_3(K)$ est d'indice fini, et l'adhérence de $G_3(K)$ dans $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est par hypothèse d'indice fini, l'adhérence D de H dans $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est d'indice fini.

(e) Montrons que $p_S^{-1}(D) \subset G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est dans l'adhérence de $G_2(K)$. Soit $x \in p_S^{-1}(D)$ et soit $U \subset G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ un voisinage ouvert de x . Puisque l'application p_S est ouverte, $p_S(U)$ est un ouvert de $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$ contenant $p_S(x) \in D$. Comme H est dense dans D , il existe $h \in H \cap p_S(U)$. Choisissons $y \in G_2(K)$ tel que $p(y) = h$. Choisissons $u \in U$ tel que $p_S(u) = h$. On a alors $y^{-1}.u \in G_1(\mathbf{A}_K^{(S)}) \subset G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$. L'ouvert

$$y^{-1}U \cap G_1(\mathbf{A}_K^{(S)}) \subset G_1(\mathbf{A}_K^{(S)})$$

est non vide. D'après le point (b), il contient donc un point $g \in G_1(K)$. On a $yg \in U \cap G_2(K)$. Donc tout voisinage de $x \in p_S^{-1}(D) \subset G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ rencontre $G_2(K)$. En d'autres termes, le groupe $p_S^{-1}(D)$ est contenu dans l'adhérence de $G_2(K)$ dans $G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$. Le sous-groupe fermé D est d'indice fini dans $G_3(\mathbf{A}_K^{(S)})$. Ceci implique que $p_S^{-1}(D)$ est d'indice fini dans $G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$. On conclut que l'adhérence de $G_2(K)$ dans $G_2(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est d'indice fini. $\square$

Remarque 1.3. La démonstration de la Proposition 1.2 est une variante de celle de [CTXu13, Proposition 3.1]. Elle a été suggérée par l’auteur et peaufinée par ChatGPT-5.6 Sol, puis par l’auteur. Dans un premier temps, ChatGPT avait proposé une autre démonstration, via le groupe de Brauer et [CW25, Thm. 1.13].

Terminons par un énoncé bien connu, qui sera utilisé plusieurs fois dans la suite.

Proposition 1.4. *Soient K un corps et F un K -tore flasque. Soit L/K le corps de décomposition de F .*

(a) *Si les sous-groupes de Sylow de $\text{Gal}(L/K)$ sont cycliques, alors $H^1(K, F) = 0$.*

(b) *Si K est un corps de nombres, le produit $\prod_v H^1(K_v, F)$, où v parcourt l’ensemble des places du corps K , et K_v est le complété de K en v , est fini.*

Démonstration. Sous l’hypothèse (a), le K -tore F est un facteur direct d’un K -tore quasi-trivial. C’est un théorème d’Endo et Miyata ([CTSa77, Prop. 2, p. 184]). Le théorème 90 de Hilbert donne alors $H^1(K, F) = 0$. Sous l’hypothèse (b), pour toute place v de K sauf un nombre fini d’entre elles, le groupe de décomposition en v est cyclique, donc $H^1(K_v, F)$ est nul. Pour toute place v de K , le groupe $H^1(K_v, F)$ est fini, comme c’est le cas pour tout tore sur un corps local. Ainsi $\prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, F)$ est un groupe fini. $\square$

2. DES TORES QUASI-TRIVIAUX AUX TORES QUELCONQUES

On établit le théorème suivant pour les tores quelconques à partir du cas des tores quasi-triviaux, établi dans [RT25], §3.

Théorème 2.1. *Soit K un corps de nombres et soit T un K -tore. Avec les notations ci-dessus, soit $L = K_T$ son corps de décomposition. Pour tout S ensemble infini de places de K , contenant les places archimédiennes et satisfaisant*

$$\partial_K(S \cap \text{Spl}(L/K)) > 0,$$

l’approximation presque forte hors de S vaut : l’adhérence de $T(K)$ dans $T(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est d’indice fini.

Démonstration. Soit T un K -tore et soit $L = K_T$ son corps de décomposition. On prend une résolution flasque du K -tore T , déployée par L/K ([CTSa77, Lemme 3, p. 181]) :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow T \longrightarrow 1.$$

Le K -tore P est quasi-trivial et le K -tore F est flasque. D'après la proposition 1.4, le produit $\prod_v H^1(K_v, F)$ est fini. Le corps de déploiement K_P est contenu dans le corps $L = K_T$, on a $\text{Spl}(L/K) \subset \text{Spl}(K_P/K)$. La section 3 de [RT25] établit le théorème 0.1 pour le tore quasi-trivial P : L'adhérence de $P(K)$ dans $P(\mathbf{A}_K^{(S)})$ est d'indice fini. Le théorème résulte alors de la Proposition 1.1. $\square$

3. DES TORES QUELCONQUES AUX GROUPES RÉDUCTIFS

Soit K un corps de caractéristique zéro. Soit G un K -groupe réductif. Notons $Z \subset G$ le centre connexe de G (c'est un tore). Soit $G^{ss} \subset G$ le groupe dérivé de G . Soit $G^{tor} = G/G^{ss}$. Soit $G^{sc} \rightarrow G^{ss}$ le revêtement simplement connexe. La flèche composée $Z \rightarrow G \rightarrow G^{tor}$ est une isogénie de K -tores. Les corps de décomposition de Z et de G^{tor} coïncident donc.

La multiplication dans G induit un homomorphisme surjectif

$$G^{sc} \times Z \rightarrow G.$$

Soit ν son noyau, qui est un K -groupe de type multiplicatif fini. Soit K_ν le corps de décomposition de ν . On a la suite exacte de K -groupes algébriques

$$1 \rightarrow \nu \rightarrow G^{sc} \times Z \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Le groupe ν est noté μ dans [CT08, Prop. 3.1].

D'après [CTSa87, Lemma 0.6, (0.6.2)], il existe une suite exacte de K -groupes de type multiplicatif

$$1 \rightarrow \nu \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 1$$

avec F un K -tore flasque et P un K -tore quasi-trivial, tous déployés par K_ν .

La poussette par $\nu \rightarrow F$ donne un diagramme commutatif de suites exactes courtes de K -groupes algébriques (où l'on omet les injections et surjections) :

$$\begin{array}{ccccc} \nu & \longrightarrow & G^{sc} \times Z & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ F & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ P & \xrightarrow{=} & P & & \end{array}$$

Les K -tores F et P sont déployés par K_ν . Le K -tore F est central dans H . Le sous-groupe $G^{sc} \subset G^{sc} \times Z \subset H$ est un sous-groupe normal, c'est

le groupe dérivé de H . On a alors le diagramme commutatif de suites exactes courtes de K -groupes algébriques (où l'on omet les injections et surjections) :

$$\begin{array}{ccccc}
 G^{sc} & \xrightarrow{=} & G^{sc} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 G^{sc} \times Z & \longrightarrow & H & \longrightarrow & P \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 Z & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P
 \end{array}$$

Le quotient M de H par l'image de G^{sc} est un K -groupe algébrique extension d'un K -tore par un K -tore, c'est donc un K -tore. (Voir dans [CT08, 0.7] les références à SGA3, Exp. IX et Exp. XVII). La suite exacte de K -tores

$$1 \rightarrow Z \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 1$$

est duale de la suite exacte de modules galoisiens des réseaux de caractères

$$0 \rightarrow P^* \rightarrow M^* \rightarrow Z^* \rightarrow 0.$$

L'extension K_ν/K déploie P^* , l'extension K_Z/K déploie Z^* . Il s'en suit que l'extension composée $K_{\nu,Z}/K$ déploie le module galoisien M^* (cf. Lemme 5.1 ci-dessous). On a donc obtenu les deux suites exactes suivantes de K -groupes algébriques.

La première est

$$(3.1) \quad 1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

avec F un K -tore flasque déployé par $K_\nu \subset K_{\nu,Z}$ et central dans H .

La seconde est

$$(3.2) \quad 1 \rightarrow G^{sc} \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow 1$$

avec M un K -tore déployé par $K_{\nu,Z}$.

Ceci suffit à démontrer le théorème 0.1, que nous répétons ici.

Théorème 3.1. *Soient K un corps de nombres et G un K -groupe réductif. Dans la situation ci-dessus, soit $L = K_{\nu,Z}$. Soit S un ensemble infini de places de K , contenant les places archimédiennes et satisfaisant*

$$\partial_K(S \cap \text{Spl}(L/K)) > 0.$$

Alors G satisfait l'approximation presque forte hors de S : quitte à ajouter à S un ensemble fini de places, $G(K)$ est dense dans $G(\mathbf{A}_K^{(S)})$.

Démonstration. On a $K_M \subset K_{\nu, Z}$, donc $\text{Spl}(K_{\nu, Z}/K) \subset \text{Spl}(K_M/K)$. D'après le théorème 2.1, le K -tore M satisfait l'approximation presque forte par rapport à S . Comme F est flasque, l'argument de la preuve du théorème 2.1 donne que le produit $\prod_{v \notin S} H^1(K_v, F)$ est fini. La suite exacte (3.2) et la Proposition 1.2 donnent alors que le K -groupe H satisfait l'approximation presque forte par rapport à S . La suite exacte (3.1) et la Proposition 1.1 donnent alors que G satisfait l'approximation presque forte par rapport à S . $\square$

Remarque 3.2. Pour un groupe semisimple simplement connexe, l'approximation faible en un nombre fini de places est connue. Les arguments ci-dessus donnent les énoncés suivants, connus dans de nombreux cas. Soient K un corps de nombres et G un K -groupe réductif.

(a) Si les sous-groupes de Sylow de $\text{Gal}(K_{\nu, Z}/K)$ sont cycliques, alors le groupe G satisfait l'approximation faible en tout ensemble fini de places.

(b) Plus généralement, si S est un ensemble fini de places de K et pour toute place $v \in S$ les sous-groupes de Sylow des groupes de décomposition de $K_{\nu, Z}/K$ en $v \in S$ sont cycliques, alors $G(K)$ est dense dans $\prod_{v \in S} G(K_v)$.

On sait en effet que sur tout corps k , tout k -tore flasque F déployé par une extension finie galoisienne L/k dont tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques est un facteur direct d'un k -tore quasi-trivial (Endo-Miyata), donc satisfait $H^1(k, F) = 0$.

4. DES TORES QUASI-TRIVIAUX AUX GROUPES RÉDUCTIFS

Peut-on passer directement du cas des tores quasi-triviaux aux groupes réductifs, sans passer par le paragraphe précédent ?

Comme il est montré dans [CT04] et [CT08, Proposition-Définition 3.1], pour G/K réductif connexe, on dispose de suites exactes

$$(4.1) \quad 1 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

$$(4.2) \quad 1 \longrightarrow G^{\text{sc}} \longrightarrow H \longrightarrow P \longrightarrow 1,$$

où F est un K -tore flasque, le K -groupe $G^{\text{sc}} = H^{\text{sc}}$ est semi-simple simplement connexe et $P = H^{\text{tor}}$ est un K -tore quasi-trivial. On note $K_H = K_P$.

Théorème 4.1. *Soient K, G, H, F, P comme ci-dessus. Soit L/K le corps de déploiement du K -tore $P = H^{\text{tor}}$. Soit S un ensemble infini de places de K , contenant les places archimédiennes et satisfaisant*

$$\partial_K(S \cap \text{Spl}(L/K)) > 0.$$

Alors G satisfait l'approximation presque forte hors de S .

Démonstration. D'après [RT25, §3], le K -tore quasi-trivial P satisfait l'énoncé du théorème 2.1 ci-dessus par rapport à S .

La suite exacte (4.2) et la proposition 1.2 donnent alors que le K -groupe H satisfait l'approximation presque forte par rapport à S . La suite exacte (4.1), la proposition 1.4 et la proposition 1.1 donnent alors que G satisfait l'approximation presque forte par rapport à S . $\square$

Remarque 4.2. Comme observé à la remarque 3.1.1 de [CT08], la construction d'une résolution flasque de G faite dans [CT08] donne un K -tore P déployé par la plus petite extension galoisienne $L = K_{\rho, Z}$ sur laquelle le K -tore Z et le centre ρ de G^{sc} sont déployés. On a $\nu \subset \rho$ et donc une inclusion $K_{\nu, Z} \subset K_{\rho, Z}$.

Par cette méthode, on n'obtient donc pas immédiatement le théorème 0.1 avec $L = K_{\nu, Z}$.

On l'obtient si le groupe dérivé G^{ss} est simplement connexe, car alors $G^{sc} = G^{ss}$ et $\nu = \rho$.

Si ρ est déployé sur K , alors $K_{\nu, Z} = K_{\rho, Z}$. On obtient alors une démonstration du théorème 1.3 de [RT25] et du théorème 1.9 de [CW25].

5. GROUPE FONDAMENTAL ALGÈBRIQUE DES GROUPE RÉDUCTIFS

Dans toute cette section, K désigne un corps de caractéristique zéro. On utilise ici librement les notations et résultats de [CT08]. Rappelons seulement que pour tout K -groupe de type multiplicatif M on note M^* le module galoisien donné par son groupe des caractères. Pour T un K -tore, on note T_* son groupe des cocaractères. On a $T_* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T^*, \mathbb{Z})$. Pour ν un K -groupe de type multiplicatif fini, on définit

$$\nu(-1) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\nu^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Les résultats principaux de cette section m'ont été fournis par ChatGPT en réponse à mes questions.

Lemme 5.1. *Soit G un groupe fini. Soit*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte de G -modules.

- (a) *Si G agit trivialement sur B , il agit trivialement sur A et sur C .*
- (b) *Si A est sans torsion et si G agit trivialement sur A et sur C , alors G agit trivialement sur B .*

Démonstration. L'énoncé (a) est clair. On compare ensuite la suite exacte donnée avec le début de la suite exacte obtenue en prenant les points fixes :

$$0 \rightarrow A^G \rightarrow B^G \rightarrow C^G \rightarrow H^1(G, A).$$

Dans la situation de (b), on a $H^1(G, A) = \text{Hom}(G, A) = 0$. Le lemme du serpent donne $B^G = B$. $\square$

Je n'ai pas trouvé l'énoncé suivant sous cette forme dans la littérature.

Proposition 5.2. *Soit $G_1 \rightarrow G_2$ une isogénie de K -groupes réductifs connexes, et soit ν son noyau. On a alors une suite exacte de modules galoisiens*

$$0 \rightarrow \pi_1(G_1) \rightarrow \pi_1(G_2) \rightarrow \nu(-1) \rightarrow 0.$$

Démonstration. On utilise la définition de Borovoi [Bor98] du groupe fondamental algébrique d'un groupe réductif (voir [CT08, Appendice A]). Pour G un groupe réductif connexe, on considère l'application composée $G^{sc} \rightarrow G^{ss} \subset G$. On prend un K -tore maximal $T \subset G$, son image réciproque $T^{sc} \subset G^{sc}$. C'est un K -tore maximal. Le module galoisien conoyau de $T_*^{sc} \rightarrow T_*$ est indépendant du choix du K -tore T . D'après [CT08, Prop. A.2], il est isomorphe au module galoisien $\pi_1(G)$ défini dans [CT08, Prop. 4.2]. On fixe un tore maximal $T_2 \subset G_2$. Son image réciproque $T_1 \subset G_1$ est un tore maximal de G_1 . On a une suite exacte

$$1 \rightarrow \nu \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow 1,$$

et un isomorphisme $T_1^{sc} = T_2^{sc}$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$ à la suite exacte de groupes de caractères

$$0 \rightarrow T_2^* \rightarrow T_1^* \rightarrow \nu^* \rightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow T_{1*} \rightarrow T_{2*} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\nu^*, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et l'on a $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\nu^*, Z) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\nu^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \nu(-1)$. L'énoncé résulte alors du diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} T_{1*}^{sc} & \longrightarrow & T_{1*} & \longrightarrow & \pi_1(G_1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T_{2*}^{sc} & \longrightarrow & T_{2*} & \longrightarrow & \pi_1(G_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\nu^*, Z) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

où la flèche $T_{1*} \rightarrow T_{2*}$ est injective. $\square$

Théorème 5.3. *Soit G un K -groupe réductif. Soit $Z \subset G$ son centre connexe. Soit ν le K -groupe de type multiplicatif fini*

$$\nu := \text{Ker}[G^{sc} \times Z \rightarrow G].$$

(a) *On a une suite exacte de modules galoisiens de type fini*

$$0 \rightarrow Z_* \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \nu(-1) \rightarrow 0.$$

(b) *Le corps de décomposition du module $\pi_1(G)$ est le composé $K_{\nu,Z}$ du corps de décomposition K_Z de Z_* (qui est aussi celui de G_*^{tor}) et du corps K_ν de déploiement de ν .*

Démonstration. On a $\pi_1(G^{sc} \times Z) = \pi_1(G^{sc}) \oplus \pi_1(Z)$. On a $\pi_1(G^{sc}) = 0$ et $\pi_1(Z) = Z_*$. C'est un cas particulier de [CT08, Prop. 6.4]¹. L'énoncé (a) est donc un cas particulier de la proposition 5.2.

Le corps de décomposition de ν est le même que celui de $\nu(-1)$. Le lemme 5.1 (a) appliqué à la suite de (a) donne $K_{\nu,Z} \subset K_{\pi_1(G)}$. Comme le module Z_* est sans torsion, le lemme 5.1 (b) appliqué à la suite de (a) donne $K_{\pi_1(G)} \subset K_{\nu,Z}$. $\square$

Proposition 5.4. *Soit G un K -groupe réductif. Pour toute résolution flasque de G*

$$1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

on a $K_{\pi_1(G)} \subset K_H$.

Démonstration. On a $H^{ss} = H^{sc}$. En notant $P = H/H^{ss} = H^{tor}$, d'après [CT08], Prop. 6.2 ou [CT08], Prop. 6.8, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow F_* \rightarrow P_* \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow 0,$$

donc $K_F \subset K_P$ et $K_{\pi_1(G)} \subset K_P = K_H$. $\square$

Hypothèse 5.5. Soit G un K -groupe réductif. Il existe une résolution flasque H de G telle que $K_{\pi_1(G)} = K_H$.

La validité de cette hypothèse avait été soulevée dans [CT08, Remarque 6.4.1]. Une démonstration de cette hypothèse m'a été esquissée par ChatGPT5.6 Sol en août 2026. Après la rédaction du présent article, Philippe Gille [Gi26] a donné une démonstration d'un résultat plus général.

En combinant le théorème 5.3, l'hypothèse 5.5 et le théorème 4.1, on obtient une démonstration du théorème 0.1, avec le bon corps $L =$

1. Dans la démonstration de cette proposition dans [CT08], dans les trois suites exactes de caractères, il faut permuter P^* et S^* .

$K_{\nu, Z}$. Cette démonstration repose directement sur le cas des tores quasi-triviaux, sans passage par le cas des tores quelconques. Cette méthode est alternative à celle développée au §2 et au §3.

Le résultat de P. Gille [Gi26] rend cet argument inconditionnel.

RÉFÉRENCES

- [Bor98] M. Borovoi, Abelian Galois cohomology of reductive groups, Mem. AMS **132**, Number 626 (1998).
- [CW25] Yang Cao et Yijin Wang, *On almost strong approximation for linear algebraic groups*, arXiv :2511.00824v2.
- [CT04] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes réductifs connexes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 331–334.
- [CT08] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. **618** (2008), 77–133.
- [CTSa77] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **10** (1977), 175–229.
- [CTSa87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.
- [CTXu13] J.-L. Colliot-Thélène et Fei Xu, *Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations*, Acta Arithmetica **157** (2013) 169–199.
- [Co12] B. Conrad, Weil and Grothendieck approaches to adelic points, L’Enseignement Mathématique (2) **58** (2012) 61–97.
- [Gi26] P. Gille, *Flasque resolutions of linear reductive group schemes*, prépublication (Septembre 2026).
- [PR01] G. Prasad et A. S. Rapinchuk, *Irreducible tori in semi-simple groups*, Int. Math. Res. Not. **2001**, no. 23, 1229–1242.
- [RT25] A. S. Rapinchuk et W. Tralle, *On almost strong approximation in reductive algebraic groups*, arXiv :2503.00696v6.
- [Sa81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

CNRS ET UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 307, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr