NOTES SUR L'APPLICATION D'ALBANESE POUR LES ZÉRO-CYCLES

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. Pour X une variété projective et lisse sur un corps k, on a un homomorphisme du groupe de Chow $A_0(X)$ des zéro-cycles de degré zéro vers le groupe des points k-rationnels $\mathrm{Alb}_X(k)$ de la variété d'Albanese de X. On discute la question de la surjectivité de cette application. Pour k corps p-adique ou réel, on donne des exemples de non surjectivité. Pour $k = \mathbb{C}$ le corps des complexes, on considère l'application $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ pour F extension de $\mathbb{C}$ et en particulier F égal au corps des fonctions de Alb_X. On fait le lien avec des travaux récents de C. Voisin sur la notion de zéro-cycle universel et sur les cycles de codimension deux sur les solides rationnellement connexes.

1. Introduction

Soit k un corps. Dans cet article, sauf mention expresse du contraire, on supposera k de caractéristique zéro. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G = G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ le groupe de Galois.

Soit X une k-variété propre. On note $Z^0(X)$ le groupe des zéro-cycles sur X, qui est le groupe abélien libre sur les points fermés de X. Le degré des points fermés sur k induit une application degré $Z^0(X) \to \mathbb{Z}$. On note $Z^0_0(X)$ son noyau. On note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle et $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro.

Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement connexe. Soit $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Soit $\mathrm{Alb}_X = \mathrm{Alb}_{X/k}$ la variété d'Albanese de X. C'est une variété abélienne sur k. Il y a un torseur $E := \mathrm{Alb}^1_X$ sous Alb_X et un k-morphisme naturel $\varphi : X \to E$. On consultera [S59], [Gr62, Thm. 3.3], [Kl05], [W08].

Soit K un corps algébriquement clos. Soit C/K une courbe connexe, projective, lisse. Soit $Jac(C) := Pic^0_{C/K}$ la jacobienne de C. C'est une variété abélienne. On a un morphisme $C \to J$ associé au choix d'un point m de $C(K)$. Il induit un isomorphisme $A_0(C) \simeq J_C(K)$, qui ne dépend pas du choix de m.

Soit A/K une variété abélienne sur un corps K algébriquement clos. Soit C/K une courbe connexe, projective et lisse, et $f : C \to A$ un K-morphisme envoyant le point $m \in C(K)$ sur le point $0 \in A(k)$. Cette application se factorise

$$C \to Jac(C) \to A,$$

avec $J(C) \to A$ un homomorphisme de variétés abéliennes. On obtient ainsi un homomorphisme $A_0(C) \to A(K)$ indépendant du choix de m.

Date: 30 avril 2025.

Soit E/K un torseur sous A. À tout zéro-cycle de degré zéro $\sum_i n_i P_i$ sur E, avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $P_i \in E(K)$, on associe le point $\sum_i' n_i P_i \in A(K)$, où la somme est prise via la structure de torseur de E sous A.

Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement connexe. Soit $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Soit $\mathrm{Alb}_X = \mathrm{Alb}_{X/k}$ la variété d'Albanese de X. C'est une variété abélienne sur k. Il y a un torseur $E := \mathrm{Alb}^1_X$ sous $A := \mathrm{Alb}_X$ et un k-morphisme naturel $\varphi : X \to E$ [S59] [W08]. La variété d'Albanese de E s'identifie à A.

Ceci induit un homomorphisme Galois-équivariant

$$Z_0^0(\overline{X}) \to Z_0^0(\overline{E}) \to A(\overline{k}) = \mathrm{Alb}_X(\overline{k}).$$

La définition de l'équivalence rationnelle et le cas des courbes montre que cet homomorphisme induit un homomorphisme Galois-équivariant

$$A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k}).$$

On en déduit un homomorphisme

$$A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})^G = \mathrm{Alb}_X(k)$$

Cet homomorphisme est fonctoriel en le corps k et fonctoriel covariant en la k-variété X.

Proposition 1.1. *(1) L'homomorphisme $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G$ a noyau et conoyau de torsion.*

(2) (Roitman) Le noyau de l'homomorphisme surjectif $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ est uniquement divisible.

(3) L'homomorphisme $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ induit un homomorphisme surjectif $A_0(\overline{X})^G \to \mathrm{Alb}(\overline{X})^G = \mathrm{Alb}_X(k)$ à noyau uniquement divisible.

(4) Le conoyau de l'homomorphisme composé

$$A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})^G = \mathrm{Alb}_X(k)$$

est de torsion.

(5) (B. Kahn) Il existe un entier $n(X)$ tel que pour tout corps F contenant k, le conoyau de $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ soit annulé par $n(X)$.

Démonstration. L'énoncé (1) résulte de l'énoncé analogue pour la flèche

$$A_0(X) \to A_0(X_K)^{Gal(K/k)}$$

pour K/k fini galoisien. Ce dernier se voit en utilisant les propriétés de l'application norme $A_0(X_K) \to A_0(X)$. L'énoncé (2) est un théorème de Roitman identifiant la torsion de $A_0(\overline{X})$ avec la torsion de $\mathrm{Alb}_X(\overline{k})$. On a donc une suite exacte

$$0 \to K \to A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k}) \to 0$$

avec K un $\mathbb{Q}$-vectoriel, donc satisfaisant $H^1(G, K) = 0$. La suite exacte de cohomologie galoisienne donne l'énoncé (3). L'énoncé (4) suit de (1) et (3).

L'énoncé (5) m'a été signalé par Bruno Kahn. On considère le corps $E = k(Alb_X)$. Soit $\eta \in \mathrm{Alb}_X(E)$ le point générique. D'après l'énoncé (4), il existe un entier $N = n(X)$ et un zéro-cycle z de degré zéro dans $Z_0(X_E)$ tel que $N(\eta - 0_E)$ soit image de z. Tout point de $Alb_X(F)$ s'obtient par spécialisation à partir de $\eta \in \mathrm{Alb}_X(E)$. Ceci donne le résultat. □

Sous l'hypothèse que la k-variété X possède un point k-rationnel, ou du moins possède un zéro-cycle de degré 1, on peut se poser les questions suivantes :

(a) L'homomorphisme $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G$ est-il surjectif ?

(b) Pour tout corps L contenant k, l'homomorphisme $A_0(X_L) \to A_0(X \times_k \overline{L})^{G_L}$ est-il surjectif ?

(c) L'homomorphisme $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(k)$ est-il surjectif ?

(d) Pour tout corps L contenant k, l'homomorphisme $A_0(X_L) \to \mathrm{Alb}_X(L)$ est-il surjectif ?

Dans ce texte, nous rassemblons des résultats divers sur ces problèmes.

On donne des contre-exemples à la surjectivité parmi les variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe, en particulier sur des corps "arithmétiques", comme les corps p-adiques ou le corps des réels.

On s'intéresse par ailleurs au cas où le corps de base k est le corps $\mathbb{C}$ des complexes et L varie parmi les corps de fonctions de variétés sur $\mathbb{C}$. On considère tout particulièrement le cas des solides $X/\mathbb{C}$ qui sont rationnellement connexes (Théorème 4.3) et des hypersurfaces cubiques de dimension 3 (Théorème 4.6).

2. Fibrations

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $f : X \to B$ un k-morphisme dominant de k-variétés projectives et lisses géométriquement intègres.

Lemme 2.1. *Soit $f : X \to B$ un k-morphisme dominant de k-variétés projectives, lisses, géométriquement intègres, à fibre générique géométriquement intègre. Si pour la fibre générique $Z/\overline{k}(B)$ de $\overline{X} \to \overline{B}$ le groupe $\mathrm{Pic}(Z)$ est de type fini, alors la flèche $f^* : \mathrm{Pic}^0_{B/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est un isomorphisme, et la flèche $f_* : \mathrm{Alb}_X \to \mathrm{Alb}_B$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On voit immédiatement que la flèche $f^* : \mathrm{Pic}(\overline{B}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ a un conoyau fini. On en conclut que la flèche $f^* : \mathrm{Pic}^0_{B/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est un épimorphisme.

Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut supposer k algébriquement clos. On trouve un ouvert $U \subset B$ et un morphisme fini étale $V \to U$ tel que $X \times_B V \to X \times_B U$ admette une section. On en déduit que $\mathrm{Ker}[\mathrm{Pic}(B) \to \mathrm{Pic}(X)]$ est de type fini. Donc $\mathrm{Pic}^0_{B/k} \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ a un noyau fini. Toute classe z dans ce noyau définit un élément de $H^1_{\text{ét}}(B, \mu_n)$ d'image nulle dans $H^1_{\text{ét}}(X, \mu_n)$. Comme la fibre générique est géométriquement intègre, on a $z = 0$. □

Remarque 2.2. Si l'on a $H^1(Z, O_Z) = 0$, la condition $\mathrm{Pic}(Z)$ de type fini est satisfaite, car le groupe de Néron-Severi est un groupe de type fini.

J'avais démontré l'énoncé suivant dans deux cas particuliers : base Y une courbe, ou $X \to Y$ schéma de Severi-Brauer, ce qui suffit pour certains des exemples donnés plus bas. Je dois à Claire Voisin (6 octobre 2022) la démonstration du résultat général.

Théorème 2.3. *(Voisin) Soient k un corps algébriquement clos de car. zéro. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme de variétés projectives et lisses connexes. Si la fibre générique de f est une variété rationnellement connexe, alors l'application $f_* : A_0(X) \to A_0(Y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Par sections hyperplanes générales on peut trouver un plongement fermé $i : Z \subset X$ projectif et lisse tel que la projection $p : Z \to Y$ obtenue par composition $Z \subset X \to Y$ soit génériquement finie. Soit $n \geq 1$ son degré. Soit $U \subset Y$ ouvert non vide tel que $p^{-1}(U) \to U$ soit fini étale et que les fibres de $X_U \to U$ soient lisses. Elles sont alors rationnellement connexes. Tout zéro-cycle sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle à support dans X_U. Comme tous les points fermés des fibres X_y, $y \in U(k)$ sont R-équivalents, on en conclut que l'application $i_* : CH_0(Z) \to CH_0(X)$ est surjective.

On a l'application $p^* : CH_0(Y) \to CH_0(Z)$, et l'application composée

$$\varphi = i_* \circ p^* : CH_0(Y) \to CH_0(Z) \to CH_0(X).$$

Pour $P \in Z_y, y \in U(k)$, le zéro-cycle nP est rationnellement équivalent sur X_y au zéro-cycle $p^{-1}(y)$. En utilisant le lemme de déplacement, on conclut que l'application φ a son conoyau annulé par n.

Par ailleurs le composé de φ avec la projection $CH_0(X) \to CH_0(Y)$ coïncide avec le composé de $CH_0(Y) \to CH_0(Z) \to CH_0(Y)$, qui est la multiplication par n. Donc le noyau de φ est annulé par n.

On obtient ainsi un homomorphisme $\theta_Z : A_0(Y) \to A_0(X)$ (dépendant du choix de $Z \subset X$) tel que la composition

$$A_0(Y) \to A_0(X) \to A_0(Y)$$

soit la multiplication par n et que le conoyau de $\theta_Z : A_0(Y) \to A_0(X)$ soit annulé par n. On en conclut que la flèche surjective $f_* : A_0(X) \to A_0(Y)$ est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}$.

Plus précisément, soit z dans le noyau de $f_* : A_0(X) \to A_0(Y)$. On sait que l'on a $nz = \theta_Z(\rho)$ avec $\rho \in A_0(Y)$. Alors ρ est dans le noyau de $n : A_0(Y) \to A_0(Y)$. Donc $n\rho = 0 \in A_0(Y)$. Donc $n^2 z = \theta_Z(n\rho) = 0 \in A_0(X)$.

D'après le lemme 2.1, la flèche $\mathrm{Alb}_X \to \mathrm{Alb}_B$ est un isomorphisme. Le théorème de Roitman assure que le noyau des applications (fonctorielles) surjectives $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(k)$ et $A_0(Y) \to \mathrm{Alb}_Y(k)$ est un $\mathbb{Q}$-vectoriel. On conclut que le noyau de l'application $A_0(X) \to A_0(Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Comme ce noyau est de torsion, il est nul. □

Remarque 2.4. Olivier Wittenberg m'indique que ce théorème résulte aussi du Lemme 2.3 de [W12].

Proposition 2.5. *Soient B et X des k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes, et $f : X \to B$ un k-morphisme à fibre géométrique générique une variété rationnellement connexe.*

(a) Le morphisme f induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & A_0(\overline{X})^G \arrow[r] \arrow[d, "f_*", "\simeq"'] & \mathrm{Alb}_X(k) \arrow[d, "f_*", "\simeq"'] \\
A_0(B) \arrow[r] & A_0(\overline{B})^G \arrow[r] & \mathrm{Alb}_B(k)
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches horizontales de droite sont des flèches surjectives à noyau uniquement divisible.

(b) Supposons que $A_0(\overline{B}) \to \mathrm{Alb}_B(\overline{k})$ est un isomorphisme. Alors $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ est un isomorphisme.

(c) Supposons de plus que $A_0(B) \to A_0(\overline{B})^G$ est un isomorphisme. Alors l'homomorphisme $f_* : A_0(X) \to A_0(B)$ est surjectif si et seulement si l'homomorphisme $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \simeq \mathrm{Alb}_X(k)$ est surjectif.

Démonstration. On utilise les lemmes 1.1, 2.1 et le théorème 2.3. □

Proposition 2.6. *Soient C une k-courbe projective, lisse, géométriquement connexe, et $f : X \to C$ un C-schéma de Severi-Brauer. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(C)$ la classe associée. S'il existe un zéro-cycle z de degré zéro sur C tel que $\alpha(z) \neq 0 \in \mathrm{Br}(k)$, alors $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \simeq \mathrm{Alb}_X(k)$ n'est pas surjectif.*

Démonstration. Pour toute courbe C projective, lisse, connexe avec un k-point, les flèches $A_0(C) \to \mathrm{Alb}_C(k)$ et $A_0(C) \to A_0(\overline{C})^G$ sont des isomorphismes, et l'énoncé analogue vaut sur tout corps contenant k.

On utilise la fonctorialité, sur les variétés projectives, de l'accouplement entre le groupe de Chow des zéro-cycles et le groupe de Brauer.

Si $z = f_*(w)$, alors

$$\alpha(z) =< z, \alpha >_C =< f_*(w), \alpha >_C =< w, f^*(\alpha)_X >= 0 \in \mathrm{Br}(k),$$

puisque $f^*(\alpha) = 0 \in \mathrm{Br}(X)$. Donc $f_* : A_0(X) \to A_0(C)$ n'est pas surjectif. La proposition 2.5 (c) donne le résultat. □

Remarque 2.7. On peut formuler un énoncé sur une base B de dimension quelconque. Soient k un corps de car. zéro, B une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, et $f : X \to B$ un B-schéma de Severi-Brauer. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(B)$ la classe associée.

Soit $F = k(B)$. Supposons que $A_0(B_{\overline{F}}) \to \mathrm{Alb}_B(\overline{F})$ est un isomorphisme. Supposons $X(k) \neq \emptyset$ et $\alpha \in \mathrm{Br}(B)$ non nul. Alors $A_0(X_F) \to A_0(B_F)$ n'est pas surjectif comme on voit en appliquant α au point générique de B, et on a au moins l'une des propriétés suivantes :

(i) $A_0(B_F) \to \mathrm{Alb}_B(F)$ n'est pas injectif.

(ii) $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ n'est pas surjectif.

Proposition 2.8. *Soit C une k-courbe projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to C$ un schéma de Severi-Brauer non trivial. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(C)$ la classe associée. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Soit F un corps contenant k.*

Dans chacun des cas suivants, l'application $A_0(X_F) \to A_0(\overline{X}_F)^{G_F} \simeq \mathrm{Alb}_{X_F}(F)$ n'est pas surjective.

(i) L'application $f_F : X(F) \to C(F)$ n'est pas surjective.

(ii) L'application d'évaluation

$$ev_\alpha : A_0(C_F) \to \mathrm{Br}(F)$$

n'est pas nulle.

(iii) On a $F = k(C)$ et la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(C)$ n'est pas dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$.

Démonstration. Si $X(k) \neq \emptyset$ et on a l'hypothèse (i), alors α prend au moins deux valeurs différentes sur $C(F)$, et (ii) est satisfait. On applique la proposition 2.6 sur le corps F. Sous l'hypothèse (iii), la classe α s'annule sur l'image d'un point de $X(k)$ et ne s'annule pas au point générique de C. On applique la proposition 2.6 sur le corps $F = k(C)$. □

Corollaire 2.9. *Soient k un corps p-adique et C/k une k-courbe connexe projective et lisse de genre au moins 1 avec $C(k) \neq \emptyset$. Il existe alors un schéma de Severi-Brauer $X \to C$ tel que l'application $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \simeq \mathrm{Alb}_X(k)$ n'est pas surjective.*

Démonstration. Si k est un corps p-adique, on a la dualité de Tate et Lichtenbaum [Li69]

$$A_0(C) \times \mathrm{Br}(C)/\mathrm{Br}(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(groupe compact, groupe discret) que l'on peut encore écrire

$$J(k) \times H^1(k, J) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le groupe $A_0(C) = J(k)$ n'est pas nul, ce groupe compact contient un sous-groupe ouvert isomorphe à O_k^G, où O_k est l'anneau des entiers de k et g est le genre de la courbe C. □

Corollaire 2.10. *Soit $C/\mathbb{R}$ une $\mathbb{R}$-courbe connexe projective et lisse telle que l'espace topologique $C(\mathbb{R})$ possède au moins deux composantes connexes. Il existe alors un schéma de Severi-Brauer $X \to C$ tel que l'application $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^G \simeq \mathrm{Alb}_X(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.*

Démonstration. D'après Witt, pour $P, Q \in C(\mathbb{R})$ dans deux composantes distinctes, il existe $\alpha \in \mathrm{Br}(C)$ prenant des valeurs non constantes sur $C(\mathbb{R})$. □

Remarque 2.11. Par approximation, on peut donner des exemples sur un corps de nombres.

Proposition 2.12. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{R}$-variétés projectives, lisses, à fibre générique une variété rationnellement connexe. Supposons $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Supposons que l'application induite sur les composantes connexes $\pi_0(X(\mathbb{R})) \to \pi_0(Y(\mathbb{R}))$ n'est pas surjective. Alors :*

(i) L'application $f_* : A_0(X)/2 \to A_0(Y)/2$ n'est pas surjective.

(ii) Si Y est une courbe et si la fibre générique de f est une variété géométriquement rationnellement connexe, alors l'application $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Démonstration. D'après [CTI81], on a un isomorphisme naturel

$$CH_0(X)/2 \simeq (\mathbb{Z}/2)^{\pi_0(X)}.$$

Ceci établit (i). L'énoncé (ii) résulte alors de la Proposition 2.5. □

Remarque 2.13. Lorsque k est un corps fini $\mathbb{F}$, la théorie du corps de classes supérieur (K. Kato et S. Saito) montre que pour toute $\mathbb{F}$-variété projective et lisse géométriquement connexe X, l'application $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{F})$ est surjective, l'application $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{\mathbb{F}})$ est un isomorphisme, et l'application $A_0(X) \to A_0(\overline{X})^{G_{\mathbb{F}}}$ est surjective.

Lorsque k est un corps de nombres, c'est une conjecture de Bloch et Beilinson que l'application $A_0(\overline{X}) \to \mathrm{Alb}_X(\overline{k})$ est un isomorphisme (c'est une conséquence facile de [Bl84, p. 121, Conjecture]).

3. Variétés complexes avec un zéro-cycle universel

On donne ici des variations sur le thème de l'article [V24a] de C. Voisin, où est introduite la notion de zéro-cycle universel pour une variété projective et lisse sur les complexes.

Soient $X/\mathbb{C}$ une variété projective et lisse, $m \in X(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Alb}_X/\mathbb{C}$ la variété abélienne d'Albanese. Soit $f : X \to \mathrm{Alb}_X$ le morphisme d'Albanese envoyant m sur $0 \in \mathrm{Alb}_X(\mathbb{C})$. Comme rappelé ci-dessus, ceci induit un homomorphisme

$$A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{C}).$$

Le noyau de cet homomorphisme est uniquement divisible (théorème de Roitman).

Proposition 3.1. *Avec les notations ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe un entier $d > 0$ tel que l'application

$$X(\mathbb{C})^d \times X(\mathbb{C})^d \to A_0(X)$$

envoyant $(x_1, \ldots, x_d); (y_1, \ldots, y_d)$ sur la classe de $x_1 + \cdots + x_d - y_1 - \cdots - y_d$ soit surjective.

(b) Il existe une courbe $\Gamma/\mathbb{C}$ connexe, projective et lisse et un morphisme $\Gamma \to X$ tels que l'application induite $A_0(\Gamma) \to A_0(X)$ est surjective.

(c) La flèche surjective

$$A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

(d) Pour tout corps algébriquement clos Ω contenant $\mathbb{C}$, la flèche surjective

$$A_0(X_\Omega) \to \mathrm{Alb}_X(\Omega)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Supposons (c). Soit $\Gamma \subset X$ une courbe intersection complète de sections hyperplanes de X. On a alors un isomorphisme $A_0(\Gamma) \simeq \mathrm{Alb}_\Gamma(\mathbb{C})$ et, par un théorème de Lefschetz, une surjection $\mathrm{Alb}_\Gamma(\mathbb{C}) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{C})$. Si $A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(\mathbb{C})$ est un isomorphisme, alors $A_0(\Gamma) \to A_0(X)$ est surjectif. Ainsi (c) implique (b).

Que (b) implique (a) résulte immédiatement du cas $X = \Gamma$ pour laquelle le résultat suit du théorème de Riemann-Roch sur une courbe.

Que (a) implique (c) est un théorème de Roitman [V02, Thm. 22.12].

L'énoncé (d) généralise (c). La $\mathbb{C}$-variété X s'écrit $X = X_0 \times_{k_0} \mathbb{C}$ avec $k_0 \subset \mathbb{C}$ un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$. Pour F variant parmi les corps extensions de k_0, chacun des foncteurs $F \mapsto CH_0(X_0 \times_{k_0} F)$ et $F \mapsto \mathrm{Alb}_{X_0}(F)$ commute aux limites inductives, et pour $F \subset F'$ les applications $Alb_{X_0}(F) \to \mathrm{Alb}_{X_0}(F')$ sont injectives. On en déduit que (c) est équivalent à (d).

□

Si les conditions équivalentes de la proposition 3.1 sont satisfaites, on dit (classiquement) que *le groupe de Chow des zéro-cycles de la variété projective et lisse $X/\mathbb{C}$ est représentable.*

Proposition 3.2. *Considérons les énoncés :*

(i) Pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'application $A_0(X_F) \to A_0(X_{\overline{F}})^{G_F}$ est surjective.

(ii) Pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'application $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ est surjective.

(iii) Soit $F = \mathbb{C}(\mathrm{Alb}_X)$. L'application $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ a le point générique de Alb_X dans son image.

La condition (i) implique (ii), et la condition (ii) est équivalente à (iii).

Si le groupe de Chow des zéro-cycles de X est représentable, alors les trois propriétés sont équivalentes.

Démonstration. Comme conséquence du théorème de Roitman sur la torsion du groupe de Chow, on a vu que l'application $A_0(X_{\overline{F}})^{G_F} \to \mathrm{Alb}_X(F)$ est surjective. Donc (i) implique (ii). Que (ii) implique (iii) est évident.

On montre que (iii) implique (ii) par un argument de spécialisation. On trouve un ouvert de Zariski non vide $U \subset \mathrm{Alb}_X$ tel que pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'ensemble $U(F) \subset \mathrm{Alb}_X(F)$ soit dans l'image de $A_0(X_F)$. Comme l'application

$$U(F) \times U(F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$$

donnée par la soustraction est surjective, ceci donne le résultat.

Montrons la dernière assertion. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
A_0(X_F) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_X(F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A_0(X_{\overline{F}})^G) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_X(\overline{F})^G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A_0(X_{\overline{F}}) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_X(\overline{F})
\end{array}$$

Sous l'hypothèse (ii), la flèche horizontale supérieure est surjective. La représentabilité sous la forme (d) dans la Proposition 3.1 assure que les deux autres flèches horizontales sont des isomorphismes. Comme les flèches verticales de droite sont des isomorphismes, on conclut que la flèche $A_0(X_F) \to A_0(X_{\overline{F}})^{G_F}$ est surjective. $\square$

Dans la terminologie de Voisin [V24b], si la propriété (ii) de la proposition 3.2 est satisfaite, on dit que *la variété X possède un zéro-cycle universel paramétré par* Alb_X.

C'est par exemple le cas si $X = C$ est une courbe. Dans ce cas, pour tout corps $F/\mathbb{C}$, les flèches

$$A_0(C_F) \to A_0(C_{\overline{F}})^{G_F} \to \mathrm{Alb}_C(F)$$

sont des isomorphismes.

Si $X = A$ est une variété abélienne, alors on a encore que A possède un zéro-cycle universel paramétré par $A = \mathrm{Alb}_X$. Mais ici, si $dim(A) \geq 2$, le groupe de Chow des zéro-cycles n'est pas représentable : la flèche $A_0(A) \to \mathrm{Alb}_A(\mathbb{C}) = A(\mathbb{C})$ n'est pas un isomorphisme (cas particulier du théorème de Mumford).

Voisin [V24b, Cor. 0.13, Cor. 2.1] donne des exemples de variétés M, et même de surfaces M, pour lesquelles il n'existe pas de zéro-cycle universel paramétré par Alb_M. En d'autres termes, pour $F = \mathbb{C}(\mathrm{Alb}_M)$, la flèche $A_0(M_F) \to \mathrm{Alb}_M(F)$ n'est pas surjective, et la flèche $A_0(M_F) \to A_0(M_{\overline{F}})^{G_F}$ n'est pas surjective.

Question 3.3. *Peut-on donner un exemple de variété projective et lisse M sur $\mathbb{C}$ dont le groupe de Chow des zéro-cycles de M est représentable, c'est-à-dire que*

$$alb : A_0(M) \to \mathrm{Alb}_M(\mathbb{C})$$

est un isomorphisme (et donc $H^i(M, O_M) = 0$ pour $i \geq 2$), mais il existe un corps $F/\mathbb{C}$ avec

$$A_0(M_F) \to \mathrm{Alb}_M(F)$$

non surjectif ?

Remarque 3.4. On peut donner des exemples de variété X projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et de corps $F/\mathbb{C}$ avec $A_0(X) = 0$ mais $A_0(X_F) \neq 0$, par exemple une surface d'Enriques.

Pour $X \to Y$ un schéma de Severi-Brauer, et plus généralement pour $X \to Y$ un morphisme dominant à fibre générique géométrique rationnellement connexe, on a un isomorphisme $\mathrm{Alb}_X \simeq \mathrm{Alb}_Y$ (lemme 2.1).

Pour Y possédant un zéro-cycle universel paramétré par Alb_Y, dans [V24a], Voisin examine la question s'il existe pour X un zéro-cycle universel paramétré par $\mathrm{Alb}_X \simeq \mathrm{Alb}_Y$.

Lemme 3.5. *Soit $X = Y \times_{\mathbb{C}} Z$ un produit pointé de variétés projectives et lisses. Pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'homomorphisme*

$$A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$$

est surjectif si et seulement si il l'est pour Y et pour Z.

Démonstration. Cela résulte de la fonctorialité covariante de l'application $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ et du fait que la variété d'Albanese d'un produit est le produit des variétés d'Albanese. □

Lemme 3.6. *Si X et Y sont deux variétés projectives, lisses sur $\mathbb{C}$, stablement birationnelles entre elles, X admet un zéro-cycle universel sur X paramétré par Alb_X si et seulement si il en est de même de Y.*

Démonstration. Un k-morphisme $p : Z \to X$ de $\mathbb{C}$-variétés projectives et lisses géométriquement intègres induit pour tout corps $F/\mathbb{C}$ un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_0(Z_F) & \longrightarrow & A_0(X_F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Alb}_Z(F) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_X(F) \end{array}$$

Pour $Z = \mathbf{P}^n \times_{\mathbb{C}} X$ et la projection sur X, et lorsque $Z \to X$ est un morphisme birationnel, on sait que les flèches horizontales sont des isomorphismes. Par résolution des singularités on est ramené à ces deux cas. □

Proposition 3.7. *Soit $A = J(C)$ est la jacobienne d'une courbe projective et lisse C. Soit $X \to A$ un morphisme dominant à fibre générique géométrique rationnellement connexe. Pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'application*

$$A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$$

est surjective.

Démonstration. Le cas $C = \mathbf{P}^1$ est clair. Supposons C de genre au moins 1. Par translation, on peut supposer que l'on a un plongement $C \hookrightarrow J(C) = A$ tel que la restriction de $X \to A$ au-dessus du point générique de C est une variété projective et lisse géométriquement intègre rationnellement connexe. Par le théorème de Graber-Harris-Starr (ou par le théorème de Tsen si $X \to A$ est un schéma de Severi-Brauer), la projection $Y := X_C \to C$ admet une section rationnelle. Comme C est une courbe lisse et le morphisme $Y \to C$ est propre, toute telle section rationnelle est un morphisme.

Pour tout corps $F/\mathbb{C}$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} A_0(Y_F) & \longrightarrow & A_0(X_F) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_X(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_0(C)(F) & \longrightarrow & A_0(A_F) & \longrightarrow & \mathrm{Alb}_A(F) \end{array}$$

La flèche composée $A_0(C)(F) \to A_0(A_F) \to \mathrm{Alb}_A(F) = \mathrm{Alb}_C(F)$ est un isomorphisme. La flèche $\mathrm{Alb}_X \to \mathrm{Alb}_A$ est un isomorphisme (lemme 2.1). La flèche $A_0(Y_F) \to A_0(C)(F)$ est surjective puisque le morphisme $Y \to C$ admet une section. On conclut que la flèche $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ est surjective. $\square$

En combinant le lemme 3.5, le lemme 3.6 et la proposition 3.7, on obtient la proposition suivante, légère généralisation de [V24a, Prop. 1.7].

Proposition 3.8. *Si une variété projective et lisse Y est facteur direct birationnel d'un produit de courbes et de jacobiennes de courbes, et si $f : X \to Y$ est un morphisme projectif dominant de variétés lisses à fibre générique géométrique rationnellement connexe, alors la variété X possède un zéro-cycle universel paramétré par* $\mathrm{Alb}_X \simeq \mathrm{Alb}_Y$.

4. Solides rationnellement connexes sur les complexes

On donne ici des variations sur le thème de la section 2 de l'article [V24b] de Voisin.

Soit $X/\mathbb{C}$ une variété connexe, projective et lisse. Pour tout corps $F/\mathbb{C}$ on note $A^2(X_F) := CH^2(X_F)_{alg} \subset CH^2(X_F)$ le sous-groupe formé des classes de cycles de codimension 2 dont l'image dans $CH^2(X_{\overline{F}})$ est algébriquement équivalente à zéro. Étant donné une variété connexe, projective et lisse $M/\mathbb{C}$ et un cycle Z de codimension 2 sur $M \times X$, pour tout corps $F/\mathbb{C}$, on a une application induite

$$\Theta_Z : CH_0(M_F) \to CH^2(X_F)$$

et donc une application $A_0(M_F) \to A^2(X_F)$ fonctorielle en $F/\mathbb{C}$. On note ici $A_0(X_F) \subset CH_0(X_F)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro. On a par ailleurs l'homomorphisme $A_0(X_F) \to \mathrm{Alb}_M(F)$, qui est fonctoriel en $F/\mathbb{C}$.

Généralisant des travaux de Murre, Bloch, Srinivas, Voisin [V24b, Cor. 0.9] montre [1] :

Théorème 4.1. *Soit $X/\mathbb{C}$ un solide projectif et lisse rationnellement connexe. Il existe une surface projective et lisse S et un cycle Z de codimension 2 sur $S \times X$ qui, pour tout corps $F/\mathbb{C}$, induit un homomorphisme $A_0(S_{\overline{F}}) \to A^2(X_{\overline{F}})$ Galois-équivariant qui se factorise par l'application d'Albanese de S :*

$$A_0(S_{\overline{F}}) \to \mathrm{Alb}_S(\overline{F}) \to A^2(X_{\overline{F}}),$$

l'application $Alb_S(\overline{F}) \to A^2(X_{\overline{F}})$ étant un isomorphisme Galois équivariant.

1. Pour l'aspect fonctoriel en le corps F, voir les travaux de Achter, Casalaina-Martin et Vial [ACMV23].

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_0(S_{\overline{F}}) \arrow[r] & \mathrm{Alb}_S(\overline{F}) \arrow[r, "\simeq"] & A^2(X_{\overline{F}}) \\
A_0(S_{\overline{F}})^G \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Alb}_S(\overline{F})^G \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u] & A^2(X_{\overline{F}})^G \arrow[u] \\
A_0(S_F) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Alb}_S(F) \arrow[u, "\simeq"'] & A^2(X_F) \arrow[u] \\
A_0(S_F) \arrow[rr] \arrow[u, "="] & & A^2(X_F) \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

Via l'isomorphisme $Alb_S(\overline{F}) \simeq A^2(X_{\overline{F}})$, ce diagramme induit un homomorphisme $\theta : A^2(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$, et le composé $A_0(S_F) \to A^2(X_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$ est égal à la flèche $A_0(S_F) \to \mathrm{Alb}_X(F)$, comme on voit en composant avec les injections dans $A^2(X_{\overline{F}})^G$.

Remarque 4.2. Il n'y a pas de raison a priori pour que la flèche $A_0(S_F) \to A^2(X_F)$ se factorise via l'homomorphisme $A_0(S_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$. La flèche θ n'est a priori ni surjective ni injective.

Théorème 4.3. *Soit $X/\mathbb{C}$ un solide projectif et lisse rationnellement connexe. Soient $S/\mathbb{C}$ et $Z/\mathbb{C}$ comme ci-dessus. Supposons que l'on a $\mathrm{Br}(X) = 0$. Soit $F/\mathbb{C}$ un corps.*

L'application $A^2(X_F) \to A^2(X_{\overline{F}})$ est injective.

Considérons les hypothèses suivantes.

A) L'application $A_0(S_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$ est surjective.

(B) L'application $\theta : A^2(X_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$ est un isomorphisme.

(C) L'application $A^2(X_F) \to A^2(X_{\overline{F}})^G$ est un isomorphisme.

(D) L'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est un isomorphisme.

(E) On a $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

On a les implications suivantes

- *(A) implique (B)*
- *(B), (C) et (D) sont équivalents*
- *Chacune des hypothèses précédentes implique (E).*

Démonstration. Pour $X/\mathbb{C}$ rationnellement connexe, le module galoisien $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$ est un réseau avec action triviale de G_F. Si de plus X est de dimension 3, alors $H^3_{nr}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ [CTV12, Cor. 6.2]. Pour X rationnellement connexe de dimension 3 avec $\mathrm{Br}(X) = 0$, le corollaire 4.2 de [CT15] donne donc d'une part une injection

$$CH^2(X_F) \hookrightarrow CH^2(X_{\overline{F}}),$$

et donc une injection

$$A^2(X_F) \hookrightarrow A^2(X_{\overline{F}})$$

d'autre part une injection

$$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G].$$

On a les suites exactes compatibles

$$0 \to A^2(X) \to CH^2(X) \to NS^2(X) \to 0$$

$$0 \to A^2(X_F) \to CH^2(X_F) \to NS^2(X_F) \to 0$$

$$0 \to A^2(X_{\overline{F}}) \to CH^2(X_{\overline{F}}) \to NS^2(X_{\overline{F}}) \to 0.$$

Pour X comme ci-dessus, l'application $NS^2(X) \to NS^2(X_{\overline{F}})$ est un isomorphisme [CT15, Prop. 5.1 (iv)], donc l'application $NS^2(X_F) \to NS^2(X_{\overline{F}})^{G_F}$ est surjective. Ainsi les conoyaux de

$$A^2(X_F) \to A^2(X_{\overline{F}})^G$$

et de

$$CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$$

coïncident.

La démonstration des implications du théorème suit alors de la considération du diagramme suivant le théorème 4.1. □

Remarque 4.4. Les hypothèses "(C) pour tout $F/\mathbb{C}$" ou "(D) pour tout $F/\mathbb{C}$" sont des versions de l'hypothèse : " La variété X possède un cycle de codimension deux universel" dans le contexte de Voisin [V15] (voir [CT15, §5.2]. L'équivalence des conditions "(B) pour tout $F/\mathbb{C}$" et "(E) pour tout $F/\mathbb{C}$" dans ce cadre est [V15, Cor. 3.3]). Des énoncés dans un cadre plus général sont [V15, Thm. 1.10, Thm. 3.1] et [CT15, Thm. 5.4].

Remarque 4.5. Comme établi dans [V15, Thm. 1.9, Cor. 1.11], il existe des solides rationnellement connexes X avec $\mathrm{Br}(X) = 0$ pour lesquels il existe un corps F tel qu'aucune des propriétés (A), (B), (C), (D), (E) ne valent. Cette remarque est une variante de [V24b, Cor. 0.14, Cor. 3.1].

Pour les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$, un couple (S, Z) comme dans le théorème 4.1 est bien connu.

Théorème 4.6. *Soit $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse. Soit $S/\mathbb{C}$ la surface de Fano des droites tracées sur X et $Z \subset S \times_{\mathbb{C}} X$ la correspondance associée. Soit $F/\mathbb{C}$ un corps. Avec les notations ci-dessus, les énoncés suivants sont équivalents.*

(A) L'application $A_0(S_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$ est surjective.

(B) L'application $A^2(X_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$ est un isomorphisme.

(C) L'application $A^2(X_F) \to A^2(X_{\overline{F}})^G$ est un isomorphisme.

(D) L'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est un isomorphisme.

(E) On a $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Démonstration. Soit donc $Z \subset S \times X$ la variété d'incidence des droites contenue dans X. Soit $p : Z \to S$ et $q : Z \to X$. On a une application $q_* \circ p^* : A_0(S_F) \to A^2(X_F)$ et un isomorphisme $p_* \circ q^* : CH^2(X)_{alg} \to \mathrm{Pic}^0(S)$. D'où une application $A_0(S) \to \mathrm{Pic}^0(S)$ qu'on peut composer avec l'isomorphisme $\mathrm{Pic}^0_S \simeq \mathrm{Alb}_S$ ([H23, Chap. 5, §3]). Voir aussi [CTP18, §2B]. Mingmin Shen [MSh, Thm. 1.7, Thm. 4.1] a établi le résultat remarquable suivant : pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'application $A_0(S_F) \to A^2(X_F)$ est surjective. Ceci montre que (B) implique (A).

Pour $X/\mathbb{C}$ une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$, on a $\mathrm{Br}(X) = 0$, et l'on sait que pour $F/\mathbb{C}$ un corps, on a $H^3_{nr}(\overline{F}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ [CTV12, Cor. 6.2], [CTV12, Thm. 8.1, Cor. 8.2]. Il résulte alors de [CT15, Lemme 5.7, Thm. 5.8] avec la correction [CT19, thm. 2.1] que l'on a

$$H^3_{nr}(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G].$$

Ainsi (E) implique (D).

Les autres implications ont été établies dans le théorème 4.3. ☐

Corollaire 4.7. *Soit $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ une hypersurface cubique lisse. Soit $F/\mathbb{C}$ un corps de fonctions d'une variable. Alors toutes les propriétés du théorème 4.3 valent pour X_F.*

Démonstration. Pour F et X comme dans l'énoncé, on a établi dans [CTP18, Thm. 1.2] que l'on a $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. QED ☐

Remarque 4.8. Il existe une surface projective et lisse $Y/\mathbb{C}$ et un corps de fonctions d'une variable $F/\mathbb{C}$ pour lesquels l'application $A_0(Y_F) \to \mathrm{Alb}_Y(F)$ n'est pas surjective. C. Voisin vient de donner un tel exemple. On part d'une variété X qui est un solide double quartique très général avec 7 points singuliers ordinaires, qui comme montré dans [V15] n'a pas de cycle de codimension deux universel. La jacobienne intermédiaire J de X est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 3, c'est la jacobienne d'une courbe Γ de genre 3. On utilise [V24b, Cor. 0.9]. On prend $Y = S$ une surface comme dans le théorème 4.1 ci-dessus, avec $\mathrm{Alb}_S = J$. On prend pour F le corps $\mathbb{C}(\Gamma)$. On montre que le plongement de Γ dans J donne un point de $\mathrm{Alb}_S(F)$ qui n'est pas dans l'image de $A_0(S_F)$.

Remarque 4.9. Soit X comme dans le théorème 4.3. Si X est stablement rationnelle, ou rétractilement rationnelle, ou simplement universellement CH_0-triviale, i.e. deg : $CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme pour tout corps $F/\mathbb{C}$, alors

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

et toutes les propriétés du théorème valent pour tout corps $F/\mathbb{C}$. On ne connaît pas d'exemple d'hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ pour laquelle les propriétés du théorème 4.6 sont en défaut. On sait qu'il existe des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ qui sont universellement CH_0-triviales, par exemple la cubique de Fermat. Pour de telles hypersurfaces cubiques lisses, la surface de Fano S des droites a donc la propriété remarquable que pour tout corps $F/\mathbb{C}$, l'application $A_0(S_F) \to \mathrm{Alb}_S(F)$ est surjective : la surface de Fano S possède un zéro-cycle universel paramétré par Alb_S.

Je remercie Federico Scavia, Claire Voisin et Olivier Wittenberg pour leurs remarques sur cet article.

Références

[ACMV23] J. Achter, S. Casalaina-Martin, Ch. Vial, A functorial approach to regular homomorphisms, Algebraic Geometry 10 (1) (2023) 87–129. 10

[Bl84] S. Bloch, Height pairings for algebraic cycles, Journal of Pure and Applied Algebra 34 (1984) 119–145. 6

[CT15] J.-L. Colliot-Thélène, Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications, Documenta math. Extra volume Merkurjev (2015) 195–220. 11, 12, 13

[CT19] J.-L. Colliot-Thélène, Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano, Journal tunisien de mathématiques (2019) vol. 1 no. 1, 47–57. 13

[CTI81] J.-L. Colliot-Thélène et F. Ischebeck, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des variétés algébriques réelles, CRAS Paris t. 292 (1981) Série I 723–725. 6

[CTP18] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Troisième groupe de cohomologie non ramifiée d'un solide cubique sur un corps de fonctions d'une variable. Épijournal de Géométrie Algébrique Volume 2 (2018), Article Nr. 13. 12, 13

[CTV12] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. 161 (2012) 735–801. 11, 12, 13

[Gr62] A. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales, Exp. No. 236, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/1962, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. 221–243. 1

[H23] D. Huybrechts, The geometry of cubic hypersurfaces, Cambridge studies in advanced mathematics vol. 206 (2023) Cambridge University Press. 12

[Kl05] S. Kleiman, The Picard scheme, in *Fundamental Algebraic Geometry*, Grothendieck's FGA explained, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 123, American Mathematical Society, 2005. 1

[Li69] S. Lichtenbaum, Duality theorems for curves over p-adic fields, Invent. math. **7** (1969) 120–136. 6

[MSh] Mingmin Shen, Rationality, universal generation and the integral Hodge conjecture, Geom. Topology 23 (2019) no. 6 2861–2898. 12

[S59] J-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités scientifiques et industrielles 1264, Publications de l'institut mathématique de Nancago, VII , Hermann, Paris (1959). 1, 2

[V02] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, Cours spécialisés 10, SMF (2002). 7

[V15] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, Invent. math. 201 (2015) 207–237. 12, 13

[V24a] C. Voisin, Cycle classes on abelian varieties and the geometry of the Abel-Jacobi map. PAMQ, Volume 20, Number 5 (volume in honour of Enrico Arbarello), pp. 2469–2496 (2024). 7, 9, 10

[V24b] C. Voisin, Geometric representability of 1-cycles on rationally connected threefolds, in *Perspectives on four decades of Algebraic Geometry : in Memory of Alberto Collino*, Progress in Mathematics, volume 352 (2024). 8, 10, 12, 13

[W08] O. Wittenberg, On Albanese torsors and the elementary obstruction, Mathematische Annalen 340 (2008), no. 4, 805–838. 1, 2

[W12] O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, Duke Mathematical Journal 161 (2012), no. 11, 2113–2166. 4

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr