

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'AMITSUR

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

RÉSUMÉ. Soient k un corps et k_s une clôture séparable. Soit M un k -groupe de type multiplicatif lisse. Soit X une k -variété lisse géométriquement intègre, telle que $k_s^\times = H^0(X^s, \mathbb{G}_m)$ et que $\text{Pic}(X^s) = H^1(X^s, \mathbb{G}_m)$ soit de type fini. Soit $k(X)$ le corps des fonctions de X . L'application de restriction $H^2(k, M) \rightarrow H^2(k(X), M)$ a un noyau fini.

1. RAPPELS

Sauf mention du contraire, la cohomologie employée est la cohomologie étale des schémas et la cohomologie galoisienne des corps. Pour k un corps, on note k_s une clôture séparable. On note $G = \text{Gal}(k_s/k)$. Pour X une k -variété algébrique, on note $X^s = X \times_k k_s$. On renvoie à [3, 2] pour les notations et résultats classiques, et à [1] pour les propriétés des groupes de type multiplicatif et celles des tores flasques.

Soient k un corps, A une k -algèbre centrale simple et $X = SB(A)$ la variété de Severi-Brauer sur k associée. Soit $k(X)$ son corps des fonctions. Amitsur démontra en 1955 que le noyau de l'application de groupes de Brauer $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(k(X))$ est fini, cyclique, engendré par la classe de A dans $\text{Br}(k)$. On trouvera une démonstration moderne de ce théorème dans [3, Thm. 5.4.1].

Proposition 1.1. [1, Lemma 0.6, Prop. 1.3]. *Soit k un corps. Soit M un k -groupe de type multiplicatif lisse. Il existe une suite exacte*

$$1 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 1$$

de k -groupes de type multiplicatif avec P un k -tore quasi-trivial et F un k -tore flasque.

Le théorème suivant est une généralisation de l'injectivité du groupe de Brauer d'une variété lisse intègre dans le groupe de Brauer de son corps des fonctions (cas $F = \mathbb{G}_{m,k}$).

Théorème 1.2. [1, Theorem 2.2 (ii) p. 161] *Soit X une k -variété lisse intègre. Soit $k(X)$ son corps des fonctions. Soit F un k -tore flasque. L'application de restriction $H^2(X, F) \rightarrow H^2(k(X), F)$ est injective.*

Date: Mumbai, LMSI, 4 avril 2026.

2. LE THÉORÈME

La proposition suivante est une extension immédiate d'un résultat classique.

Proposition 2.1. *Soit X une k -variété géométriquement intègre telle que $k_s^\times = H^0(X^s, \mathbb{G}_m)$. Soit T un k -tore et \hat{T} le groupe des caractères de T^s , qui est un G -réseau. Si $\text{Hom}_G(\hat{T}, \text{Pic}(X^s))$ est de type fini, en particulier si $\text{Pic}(X^s)$ est de type fini, le noyau de $H^2(k, T) \rightarrow H^2(X, T)$ est fini.*

Démonstration. La suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(k, H^q(X^s, T)) \implies H^n(X, T)$ donne la suite exacte

$$H^1(X, T) \rightarrow [H^1(X^s, T)]^G \rightarrow H^2(k, T) \rightarrow H^2(X, T).$$

Le noyau de $H^2(k, T) \rightarrow H^2(X, T)$ est annulé par un entier positif (comme on voit par restriction à un point fermé de X). Le groupe $H^1(X^s, T)$ est une somme direct d'exemplaires de $\text{Pic}(X^s)$, donc de type fini, donc aussi $[H^1(X^s, T)]^G$. \square

Remarque 2.2. Supposons X/k projective lisse géométriquement intègre sur k de caractéristique zéro. On a $k_s^\times = H^0(X^s, \mathbb{G}_m)$. Dans chacun des cas suivants, le groupe $[H^1(X^s, T)]^G = \text{Hom}_G(\hat{T}, \text{Pic}(X^s))$ est de type fini.

(a) On a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Dans ce cas $\text{Pic}(X^s)$ est un groupe abélien de type fini.

(b) Le corps k est de type fini sur \mathbb{Q} (Mordell-Weil, Néron, Severi).

Théorème 2.3. *Soit M un k -groupe de type multiplicatif lisse. Soit X une k -variété lisse géométriquement intègre, telle que $k_s^\times = H^0(X^s, \mathbb{G}_m)$. Supposons que pour toute extension sous-extension finie $k \subset K \subset k_s$, le groupe $\text{Pic}(X^s)^{\text{Gal}(k_s/K)}$ est de type fini, condition satisfaite si le groupe abélien $\text{Pic}(X^s)$ est de type fini. Soit $k(X)$ le corps des fonctions. L'application de restriction $H^2(k, M) \rightarrow H^2(k(X), M)$ a un noyau fini.*

Démonstration. Soit

$$1 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 1$$

une suite exacte comme dans la proposition 1.1. On considère la composition des flèches

$$\phi : H^2(k, M) \rightarrow H^2(k, F) \rightarrow H^2(X, F) \rightarrow H^2(k(X), F).$$

Elle se factorise par

$$H^2(k, M) \rightarrow H^2(k(X), M) \rightarrow H^2(k(X), F).$$

Le noyau de $H^2(k, M) \rightarrow H^2(k(X), M)$ est donc contenu dans le noyau de ϕ . Comme $H^1(k, P) = 0$ (Hilbert 90), la flèche $H^2(k, M) \rightarrow H^2(k, F)$ est injective. D'après la proposition 2.1, le noyau de $H^2(k, F) \rightarrow H^2(X, F)$ est fini. D'après le théorème 1.2, la flèche $H^2(X, F) \rightarrow H^2(k(X), F)$ est injective. \square

Comme indiqué ci-dessus, l'hypothèse sur le groupe de Picard est satisfaite si X/k est projective, lisse, géométriquement intègre et on a au moins une des hypothèses : $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ou le corps k est de type fini sur \mathbb{Q} .

Remarque 2.4. On notera que le défaut éventuel d'injectivité de $H^2(k, M) \rightarrow H^2(k(X), M)$ est borné par $\text{Ker}[H^2(k, F) \rightarrow H^2(X, F)]$, lui-même quotient fini du groupe de type fini $\text{Hom}_G(\hat{F}, \text{Pic}(X^s))$. Si l'on part de $M = \mu_n$, avec n inversible dans k , on peut prendre

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

avec l'application $x \mapsto x^n$ comme suite

$$1 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 1.$$

et l'on trouve la borne $\text{Ker}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(X)]$, soit encore $\text{Pic}(X^s)^G / \text{Pic}(X)$.

Ce texte a été écrit à Mumbai (Inde) en avril 2026, lors d'un séjour au Lodha Mathematical Science Institute.

RÉFÉRENCES

- [1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, *J. of Algebra* **106** (1987) 148–205.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*, *Ergebnisse der Math. u. ihre Grenzgebiete, 3. Folge*, Springer, 2021.
- [3] Philippe Gille et Tamás Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, *Cambridge studies in advanced mathematics* **165**, Second Edition, 2017.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 307, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr