COMPLÉMENTS À UN ARTICLE RÉCENT DE B. HASSETT ET Y. TSCHINKEL

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. B. Hassett et Y. Tschinkel [10] ont récemment examiné la question de la rationalité des intersections lisses de deux quadriques, particulièrement dans $\mathbb{P}^5_k$, sur un corps k non algébriquement clos. On généralise un de leurs résultats en dimension supérieure et l'on répond à une de leurs questions dans $\mathbb{P}^5_k$.

Dans toute cette note, k désigne un corps de caractéristique différente de 2.

1. Quadriques avec une sous-variété de degré impair

On a le lemme bien connu de T. A. Springer (voir [11, Chap. VII, Thm. 2.3]) :

Lemme 1.1. *Si une forme quadratique sur un corps k possède un zéro non trivial sur une extension impaire du corps de base, alors elle possède un zéro non trivial sur k.* □

La proposition suivante est aussi bien connue [9, Prop. 68.1].

Proposition 1.2. *Soit k un corps. Soit $Q \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, une quadrique lisse déployée, c'est-à-dire définie par une forme quadratique déployée.*

(i) La dimension maximale d'un sous-espace linéaire de Q est $[(n-1)/2]$.

(ii) Considérons l'application image directe $CH_r(Q) \to CH_r(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ entre les groupes de Chow de cycles de dimension r, avec $0 \leq r \leq n-1$. Pour $r \leq [(n-1)/2]$, cette application est surjective. Pour $r > [(n-1)/2]$, son image est $2.\mathbb{Z}$: toute sous-variété intègre de Q de dimension $r > [(n-1)/2]$ est de degré pair. □

Il serait surprenant que l'énoncé suivant n'ait pas été déjà établi.

Théorème 1.3. *Soit k un corps. Soit $Q \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 1$, une quadrique lisse. S'il existe une sous-k-variété géométriquement intègre $W \subset Q \subset \mathbb{P}^n_k$ de dimension r et de degré impair dans $\mathbb{P}^n_k$, alors Q contient un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$.*

Démonstration. Supposons la quadrique donnée par l'annulation d'une forme quadratique $q(x_0, \ldots, x_n)$. Si la forme q est de rang pair et hyperbolique, alors $n+1 = 2d$ et $q = 0$ contient un espace linéaire $\mathbb{P}^d_k$. Si q est de rang $n+1$, avec $n = 2d$ et s'écrit comme somme orthogonale d'une forme quadratique hyperbolique de rang $2d$ et d'une forme de rang 1, alors $q = 0$ contient un espace linéaire $\mathbb{P}^{d-1}_k$. Dans ces deux cas, d'après la proposition 1.2, la démonstration est achevée.

Toute k-variété $W \subset \mathbb{P}^n_k$ de degré impair contient des points fermés P de degré $[k(P) : k]$ impair. Si de plus W est géométriquement intègre, alors ses points fermés

Date: 17 avril 2019.

de degré impair sont denses pour la topologie de Zariski de W. D'après le lemme 1.1, l'hypothèse exclut donc que la forme quadratique q soit anisotrope.

On peut donc supposer que $q(x_0, \ldots, x_n)$ s'écrit sous la forme

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0x_1 + \cdots + x_{2s}x_{2s+1} + g(x_{2s+2}, \ldots, x_n)$$

avec $s \geq 0$ et avec g une forme quadratique anisotrope en au moins 2 variables. Considérons l'application rationnelle de $\mathbb{P}^n_k$ vers $\mathbb{P}^{n-2s-2}$ envoyant $(x_0, \ldots, x_n)$ sur $(x_{2s+2}, \ldots, x_n)$. Cette application est définie hors du fermé défini par

$$(x_{sr+2}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0).$$

Sa restriction à $W \subset Q$ est donc définie hors du fermé $F \subset W$ défini par ces mêmes équations, donc en dehors du fermé de W défini par

$$(x_{2s+2}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$$

et

$$x_0x_1 + \cdots + x_{2s}x_{2s+1} = 0.$$

Si $F \neq W$, on a alors une application rationnelle de W dans la quadrique anisotrope de $\mathbb{P}^{n-2s-2}$ définie par $g(x_{2s+2}, \ldots, x_n) = 0$. Comme les points fermés de degré impair sont Zariski denses dans W, et que la quadrique anisotrope ci-dessus ne possède pas de point fermé de degré impair par le lemme 1.1, ceci est impossible.

On a donc $F = W$. La variété W de dimension r est contenue dans le fermé de $\mathbb{P}^n_k$ défini par $(x_{2s+2}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, qui est un sous-espace projectif $\mathbb{P}^{2s+1}_k$, et dans la quadrique de cet espace projectif définie par $x_0x_1 + \cdots + x_{2s}x_{2s+1} = 0$. Comme W est de degré impair, d'après la proposition 1.2, ceci force $r \leq s$. Ainsi $q = 0$ contient un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$. □

2. Intersection de deux quadriques avec une sous-variété de degré impair

Le théorème suivant est dû à M. Amer [1]. Le cas $d = 1$ fut établi indépendamment par A. Brumer. Le théorème général est établi de nouveau, en toute caractéristique, dans un tapuscrit de D. Leep [12].

Théorème 2.1. *Soient f et g deux formes quadratiques en $n + 1$ variables sur le corps k. La forme quadratique $f + tg$ s'annule sur un sous-espace linéaire de dimension d de $k(t)^{n+1}$ si et seulement si $f = g = 0$ s'annule sur un espace linéaire de dimension d de k^{n+1}.* □

Le cas $n = 5, r = 1$ du théorème suivant est établi, par une autre méthode, dans [10, Thm. 14].

Théorème 2.2. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$, une intersection complète lisse de deux quadriques.*

(i) S'il existe une sous-k-variété géométriquement intègre $W \subset X \subset \mathbb{P}^n_k$ de dimension r et de degré impair dans $\mathbb{P}^n_k$, alors X contient un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$.

(ii) Si de plus $r \geq 1$, alors X est k-birationnelle à $\mathbb{P}^{n-2}_k$.

Démonstration. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f = g = 0$. La quadrique lisse Q sur le corps $K = k(t)$ définie par $f + tg = 0$ contient la sous-K-variété géométriquement intègre $W \times_k K$, qui est de degré impair et de dimension r. D'après le théorème 1.3, elle contient un espace linéaire $\mathbb{P}^r_K$. D'après le théorème 2.1, la K-variété X contient un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$. Ceci établit (i), et (ii) en résulte d'après [7, Prop. 2.2]. □

3. Intersection de deux quadriques qui contiennent une paire rationnelle de droites gauches

On répond ici négativement à la question du §7 de [10], et on donne simultanément des exemples un peu plus simples que ceux du Corollaire 27 du paragraphe 9 de [10].

Commençons par des exemples sur le corps des réels, variantes de [6, §2, p. 128] et [3, §1, Prop. 1.3].

Proposition 3.1. *Soient $n \geq 5$ un entier et $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par un système d'équations homogènes :*

$$f(x_2, \ldots, x_n) - x_0x_1 = 0 = g(x_2, \ldots, x_n) - (x_0 - x_1)(x_0 - 2x_1),$$

avec $f(x_2, \ldots, x_n)$ et $g(x_2, \ldots, x_n)$ deux formes quadratiques à coefficients réels définies positives.

Alors :

(i) L'espace topologique $X(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

(ii) La $\mathbb{R}$-variété X n'est pas stablement rationnelle, ni même rétractilement rationnelle.

(iii) La $\mathbb{C}$-variété $X_{\mathbb{C}}$ contient un espace linéaire $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ avec $m = [(n-3)/2]$ qui ne rencontre pas son congugué complexe.

Démonstration. Il n'y a pas de point de $X(\mathbb{R})$ avec $(x_0, x_1) = (0, 0)$. On dispose donc de l'application continue $X(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ définie par (x_0, x_1). Son image est la réunion des intervalles $[0, 1]$ et $[2, \infty]$. L'espace $X(\mathbb{R})$ a donc au moins deux composantes connexes, et c'est le maximum possible pour une intersection lisse de deux quadriques. Pour les conséquences de la non connexité de $X(\mathbb{R})$ sur la non rationalité d'une $\mathbb{R}$-variété projective et lisse $X/\mathbb{R}$, je renvoie aux références données dans [3, Théorème 1.1]. Pour l'énoncé (iii), il suffit d'observer que la section Y de X par $x_0 + x_1 = 0$ est une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ qui satisfait $Y(\mathbb{R}) = \emptyset$. On sait que toute intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ contient un espace linéaire de dimension $m = [(n-3)/2]$; ceci résulte par exemple de la combinaison du théorème 2.1 et du théorème de Tsen. Comme on a $Y(\mathbb{R}) = \emptyset$, un tel sous-espace linéaire de $Y_{\mathbb{C}}$ ne saurait rencontrer son conjugué dans $Y_{\mathbb{C}}$. □

La proposition suivante utilise la méthode de spécialisation sur une variété pas trop singulière possédant des invariants non ramifiés non triviaux [5].

Proposition 3.2. *Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p assez gros. Sur tout corps K avec $\mathbb{F}(x) \subset K \subset \mathbb{F}((x))$, sur tout corps K avec $\mathbb{C}(x)(y) \subset K \subset \mathbb{C}((x))((y))$, sur tout corps de nombres K, et sur tout corps p-adique K, il existe une intersection lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^5_K$ qui contient un K-point, qui possède une paire de droites gauches définies sur une extension quadratique de K, et qui n'est pas rétractilement rationnelle, et en particulier n'est pas stablement K-rationnelle.*

Démonstration. On utilise les exemples donnés avec Coray et Sansuc dans [4] ; voir aussi la liste d'exemples de [8, §15].

Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et $a \in k$ non carré. Soient (x, y, z, t, u, v) des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^5_k$.

Soit $\alpha = \sqrt{a}$. Soit $X \subset \mathbb{P}^5_k$ définie par le système

$$q_1 = x^2 - ay^2 - uv = 0$$

$$q_2 = z^2 - at^2 - (u - cv)(u - dv) = 0,$$

avec $uv(u - cv)(u - dv)$ sans facteur multiple.

Elle contient le point rationnel lisse M de coordonnées $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$.

La classe de l'algèbre de quaternions $((u-cv)/v, a) \in \mathrm{Br}(k(X))$ est non ramifiée sut tout modèle projectif et lisse de X. Comme a n'est pas un carré dans k, cette classe ne provient pas de $\mathrm{Br}(k)$. Ces deux énoncés sont établis dans [4, Prop. 6.1 (iii)].

Le lieu non lisse de X est formé des deux points fermés R et S définis l'un par $u = v = 0 = z = t = 0$ et donc $x^2 - ay^2 = 0$, l'autre par $u = v = x = y = 0$ et $z^2 - at^2 = 0$. On dispose d'une résolution des singularités $f : \tilde{X} \to X$ qui est un isomorphisme au-dessus du complémentaires de R et S et telle que les fibres $f^{-1}(R)$ et $f^{-1}(S)$ sont des quadriques lisses de dimension 2 sur le corps $k(\sqrt{a})$ possédant un $k(\sqrt{a})$-point : les $k(\sqrt{a})$-variétés $f^{-1}(R)$ et $f^{-1}(S)$ sont donc universellement CH_0-triviales.

La variété X contient deux droites gauches conjuguées

$$x - \alpha y = z - \alpha t = u = v = 0$$

et

$$x + \alpha y = z + \alpha t = u = v = 0.$$

On déforme maintenant X en une intersection lisse de deux quadriques contenant deux droites conjuguées et contenant le point M. Il suffit pour cela de prendre une intersection lisse $f_1 = f_2 = 0$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$ contenant les deux droites gauches ci-dessus et contenant le point M (voir [7, §4 et §1] ; c'est ici que l'on suppose le corps fini assez gros). On considère alors l'intersection complète lisse de deux quadriques X_λ sur le corps $K = k(\lambda)$ donnée par

$$q_1 + \lambda f_1 = 0,$$

$$q_2 + \lambda f_2 = 0.$$

La K-variété X_λ possède un point K-rationnel et contient deux droites conjuguées. Le théorème de spécialisation sous la forme [5, Thm. 1.12] montre que X_λ n'est pas K-rétractilement rationnelle.

On peut prendre pour k tout corps assez gros de caractéristique différente de 2 pour lequel $k \neq k^2$. Par exemple un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de 2 assez gros, ou $k = \mathbb{C}((T))$ ou $k = \mathbb{C}(T)$.

L'argument donne ainsi des exemples de $X \subset \mathbb{P}^5_K$ non rétractilement rationnels sur $K = \mathbb{C}((T_1))((T_2))$, sur $K = \mathbb{C}(T_1, T_2)$, sur $K = \mathbb{F}((T))$, sur $K = \mathbb{F}(T)$. On peut aussi faire une déformation en inégale caractéristique et faire des exemples sur tout corps p-adique (de corps résiduel assez gros et non dyadique), et de là sur tout corps de nombres. $\square$

On trouvera un exemple analogue pour les hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}_p}$ dans [5, Thm. 1.21].

4. Intersection de deux quadriques non rationnelles en dimension quelconque sur des corps non ordonnables

On a déjà donné de tels exemples sur les réels (Prop. 3.1). On peut donner des exemples sur des corps non ordonnables. L'argument donné ici a déjà été développé dans [3, Thm. 4.1] pour les hypersurfaces cubiques diagonales. On renvoie à [3] pour plus de détails sur les outils employés (cohomologie galoisienne, cohomologie non ramifiée).

Soit k un corps de caractéristique différente de 2, contenant $a \in k^* \setminus k^{*2}$. Soit $K_n = k(s_1, \dots, s_n)$ le corps des fonctions rationnelles en $n \geq 0$ variables. Soient $b_1, \dots, b_n \in k$ et $X_n \subset \mathbb{P}^{n+4}_{K_n}$ l'intersection complète de deux quadriques donnée par le système d'équations :

$$\phi = x^2 - ay^2 - uv + \sum_{i=1}^{n} s_i y_i^2 = 0$$

$$\psi = 2(x^2 - az^2) - (u+v)(2u-v) + \sum_{i=1}^{n} b_i s_i y_i^2 = 0$$

en les variables homogènes $(x, y, z, u, v, y_1, \dots, y_n)$. La K_n-variété X_n possède le K_n-point $(x, y, z, u, v, y_1, \dots, y_n) = (1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)$. On supposera X lisse. C'est le cas si le polynôme homogène $det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ est séparable. Si k est infini ou fini avec assez d'éléments, il existe des éléments $b_1, \dots, b_n \in k$ qui satisfont ces conditions.

Proposition 4.1. *Soit $K_n(X_n)$ le corps des fonctions de la K_n-variété X_n. Le cup-produit*

$$\alpha_n := ((u+v)/v, a, s_1, \dots, s_n) \in H^{n+2}(K_n(X_n), \mathbb{Z}/2)$$

des classes de $((u{+}v/v), a, s_1, \dots, s_n)$ dans $K_n(X)^*/K_n(X_n)^{*2} = H^1(K_n(X_n), \mathbb{Z}/2)$ est non ramifié sur la K_n-variété X_n, et n'appartient pas à l'image de $H^{n+2}(K_n, \mathbb{Z}/2)$. Ainsi la K_n-variété X_n n'est pas CH_0-triviale et en particulier n'est pas rétractilement rationnelle.

Démonstration. Pour $n = 0$, la classe de quaternions $((u+v)/v, a)$ est un élément non constant de la 2-torsion du groupe de Brauer de la surface $X_0 \subset \mathbb{P}^4_k$, voir [2, §4]. Cela définit donc une classe dans $H^2_{nr}(k(X_0)/k, \mathbb{Z}/2)$ qui ne vient pas de $H^2(k, \mathbb{Z}/2)$. On notera que cela exclut la présence d'un couple de droites gauches conjuguées sur X_0.

Soit $n \geq 1$. Supposons l'énoncé démontré pour $n-1$. Sur la K_n-variété lisse X_n, la classe α_n est non ramifiée en dehors des diviseurs définis par $v = 0$ et par $u + v = 0$. Le diviseur Δ défini par $v = 0$ est intègre, donné par le système

$$x^2 - ay^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i y_i^2 = 0,$$

$$2(x^2 - az^2) - 2u^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i s_i y_i^2 = 0.$$

Le résidu de α_n en Δ est le cup-produit $\beta_n := (a, s_1, \dots, s_n) \in H^{n+1}(K_n(\Delta), \mathbb{Z}/2)$. L'identité $x^2 - ay^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i y_i^2 = 0$ sur Δ implique que β_n est nul.s L'argument sur le diviseur intègre défini par $u + v = 0$ est identique. La classe α_n est donc non ramifiée sur la K_n-variété X_n.

On considère par ailleurs le modèle propre sur $K_{n-1}[s_n]$ défini par le même système d'équations que X_n. La fibre au-dessus de $s_n = 0$ n'est autre que le cône sur la K_{n-1}-variété X_{n-1} définie par le système d'équations :

$$x^2 - ay^2 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i y_i^2 = 0,$$

$$2(x^2 - az^2) - 2u^2 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i s_i y_i^2 = 0.$$

Le résidu de α_n au point générique de cette variété est la classe

$$\alpha_{n-1} = ((u+v)/v, a, s_1, \ldots, s_{n-1}),$$

qui par hypothèse de récurrence n'est pas dans l'image de $H^{n+1}(K_{n-1}, \mathbb{Z}/2)$. Comme la fibre $s_n = 0$ a multiplicité 1, la comparaison des résidus en $s_n = 0$ montre que α_n n'est pas dans l'image de $H^{n+2}(K_n, \mathbb{Z}/2)$. □

L'argument ci-dessus peut s'adapter en inégale caractéristique et donne sur tout corps p-adique K avec $p \neq 2$ des exemples d'intersection lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^5_K$ non rétractilement rationnelle.

Références

[1] M. Amer, Quadratische Formen über Funktionenkörpern, Dissertation, Johannes Gutenberg Universität, Mainz (1976).

[2] B. J. Birch and H. P. F. Swinnerton-Dyer, The Hasse problem for rational surfaces, J. für die reine und ang. Mathematik, **274/275** (1975), 164–174.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, Non rationalité stable d'hypersurfaces cubiques sur des corps non algébriquement clos, in *K-Theory*, Proceedings of the International Colloquium, Mumbai, 2016, Hindustan Book Agency, 2018, p. 349–366.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, Crelle **320** (1980) 150–191.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable : Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. 4e série, **49** (2016) 371–397.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, In *Journées de géométrie algébrique d'Angers* (Juillet 1979), édité par A.Beauville, Sijthof and Noordhof (1980) 223–237.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, Crelle **373** (1987) 37–107.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, II, Crelle **374** (1987) 72–168.

[9] R. Elman, N. Karpenko, A. Merkurjev, The algebraic and geometric theory of quadratic forms. American Mathematical Society Colloquium Publications **56**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[10] B. Hassett et Y. Tschinkel, Rationality of complete intersections of two quadrics, https ://arxiv.org/abs/1903.08979

[11] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1973.

[12] D. Leep, The Amer–Brumer theorem over arbitrary fields, disponible sur la page http ://www.ms.uky.edu/ leep/Preprints.html

Université Paris Sud Paris Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail address: `jlct@math.u-psud.fr`