UN CALCUL DE GROUPE DE BRAUER ET UNE APPLICATION ARITHMÉTIQUE

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. **—** Browning et Matthiesen ont récemment démontré le principe de Hasse et l'approximation faible pour une certaine classe de variétés algébriques. Skorobogatov a utilisé ce résultat pour montrer que sur une deuxième classe, plus large, de variétés, les points rationnels sont denses dans l'ensemble de Brauer-Manin. On considère ici une troisième classe de variétés, intermédiaire entre la première et la seconde, pour laquelle on établit, de façon purement algébrique, que le groupe de Brauer non ramifié est trivial. Le résultat de Skorobogatov donne alors le principe de Hasse et l'approximation faible pour ces variétés.

1. Un calcul algébrique

Soient k un corps, $K = \overline{k}$ une clôture séparable de k et $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ le groupe de Galois absolu. Pour toute k-variété X, on note $X_K = X \times_k K$.

On a la proposition bien connue (cf. [**CTS**, (1.5.0)]) :

Proposition 1.1. — *Pour toute k-variété X, on a une suite exacte naturelle*

$$0 \to H^1(G, K[X]^\times) \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, X_K)^G \to H^2(G, K[X]^\times) \to$$

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}X_K] \to H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K)$$

C'est la suite exacte des termes de bas degré de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour le faisceau $\mathbb{G}_m$ pour la topologie étale, et le revêtement $X_K \to X$.

Soient $L_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$ des formes linéaires à coefficients dans k, *linéairement indépendantes deux à deux*, et soient K_i/k, $i = 1, \ldots, m$, des k-algèbres finies étales.

Soit Y la k-variété affine définie par le système d'équations affines

$$L_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i),\ i = 1, \ldots, m.$$

Ici Ξ_i varie dans la k-variété $R_{K_i/k}\mathbf{A}^1$ définie par la restriction à la Weil de K_i à k de la droite affine $\mathbf{A}^1_{K_i}$.

Soit $p : Y \to \mathbf{A}^n_k$ la projection sur l'espace affine de dimension n définie par les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $F \subset \mathbf{A}^n$ le complémentaire de la réunion des fermés de codimension 2 définis par $L_i = L_j = 0$, $i < j$. Soit $U \subset \mathbf{A}^n_k$ l'ouvert complémentaire de F et soit $X = Y_U \subset Y$ l'ouvert image inverse de U dans Y.

Proposition 1.2. — *(i) La k-variété X est lisse et géométriquement intègre.*

(ii) Toute fonction inversible sur X est constante : $k^\times = k[X]^\times$.

(iii) Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}\, X$ *est nul.*

(iv) Pour toute compactification lisse Z de X, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}\, Z_K$ *est un G-réseau de permutation.*

(v) Supposons k de caractéristique zéro. Pour toute k-variété Z projective, lisse, géométriquement intègre k-birationnelle à Y, l'appplication naturelle de groupes de Brauer $\mathrm{Br} k \to \mathrm{Br} Z$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour les fonctions inversibles, on a $k[X]^\times = (K[X]^\times)^G$. Le théorème 90 de Hilbert donne $H^1(G, K^\times) = 0$. En utilisant la proposition 1.1, on voit que pour établir les énoncés (i), (ii) et (iii) on peut se limiter au cas $k = K$ séparablement clos, ce que nous supposons jusqu'à nouvel ordre.

Chaque norme $\mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i)$ est alors un produit de variables indépendantes :

$$\mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i) = \prod_{r \in I_i} \Xi_{i,r}.$$

Au-dessus de l'ouvert $V \subset U \subset \mathbf{A}^n_k$ défini par $\prod_i L_i \neq 0$, la fibration $p : X_V \to V$ est clairement lisse, les fibres sont des tores. Plus précisément, pour $i = 1, \ldots, m$, on a

$$\Xi_{i,1} = L_i(x_1, \ldots, x_n). \prod_{r \in I_i,\ r>1} \Xi_{i,r}^{-1}$$

si bien que X_V est le produit de $V \subset \mathbf{A}^n_k$ et d'un k-tore de groupe des caractères ayant pour base les $\Xi_{i,r}$ pour $r > 1$. Il est alors clair que l'on a

$\operatorname{Pic} X_V = 0$. Le groupe des fonctions inversibles sur X_V est engendré par les L_i et les $\Xi_{i,r}$, où, pour i donné, r varie dans I_i. Il est donc engendré par les $\Xi_{i,r}$. Ces éléments sont indépendants multiplicativement.

Comme L_1 n'est pas identiquement nul, la k-variété définie par

$$L_1(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_1/k}(\Xi_1)$$

est isomorphe à un espace affine, donc intègre et lisse sur k. La projection de la variété définie par

$$0 \neq L_i(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i),\ i = 2, \dots, m,$$

sur $\mathbf{A}^n_k$ est un morphisme lisse. La k-variété $X_1 \subset X$ définie par les équations

$$L_1(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_1/k}(\Xi_1)$$

$$0 \neq L_i(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i),\ i = 2, \dots, m,$$

On voit aisément qu'elle est intègre. Définissant X_i, pour chaque $i = 2, \dots, m$ de façon analogue à X_1, on voit que la k-variété X, qui est la réunion des ouverts X_i, est une k-variété lisse (cf. [**Sk1**, Lemma 4.4.5]). Notons $\Delta_{i,r}$ le diviseur de X défini par $\Xi_{i,r} = 0$, qui est inclus dans $L_i = 0$. Un élément $f \in k[X]^\times$ produit d'éléments $\Xi_{i,r}^{n_{i,r}}$ avec l'un des $n_{i,r} \in \mathbb{Z}$ non nul n'est pas inversible. Ceci établit $k^\times = k[X]^\times$.

Le complémentaire de X_V dans X est la réunion des diviseurs $\Delta_{i,r}$, et chacun d'eux est principal sur X. Comme on a $\operatorname{Pic} X_V = 0$, ceci implique $\operatorname{Pic} X = 0$.

Sur tout corps k, désormais quelconque et de clôture séparable K, on a donc établi les points (i) à (iii), et la suite exacte de la proposition 1.1 donne de plus un isomorphisme :

$$\mathrm{Br} k \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[\mathrm{Br} X \to \mathrm{Br} X_K].$$

Pour Z comme en (iv), le groupe $\mathrm{Div}_\infty Z_K$ des diviseurs à support dans le complémentaire de X_K dans Z_K est un G-réseau de permutation (possédant une base globalement respectée par l'action de G), et ce groupe est G-isomorphe à $\operatorname{Pic} Z_K$, comme le montre la suite exacte

$$K[Z]^\times \to K[X]^\times \to \mathrm{Div}_\infty Z_K \to \operatorname{Pic} Z_K \to \operatorname{Pic} X_K.$$

Ceci établit (iv).

On a vu plus haut que l'ouvert $X_{V,K}$ de X_K est le produit d'un ouvert de $\mathbf{A}^n_K$ et d'un K-tore. La K-variété X_K est donc K-birationnelle à un espace projectif.

Supposons désormais k de caractéristique zéro. Soit Z une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre k-birationnelle à X. Il existe donc un ouvert $W \subset X$ contenant tous les points de codimension 1 de X et un k-morphisme birationnel $f : W \to Z$, d'où l'on déduit par les propriétés standards du groupe de Brauer des injections $\mathrm{Br}Z \hookrightarrow \mathrm{Br}W$ (lissité des k-variétés), puis $\mathrm{Br}X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}W$ (pureté pour le groupe de Brauer en caractéristique zéro, [**Gr**, §6]), donc $\mathrm{Br}Z \hookrightarrow \mathrm{Br}X$. L'invariance birationnelle du groupe de Brauer en caractéristique zéro [**Gr**, §7], sa nullité sur l'espace affine $\mathbf{A}^n_K$ en caractéristique zéro et la K-rationalité de la K-variété propre et lisse Z_K donnent $\mathrm{Br}Z_K = 0$. On a donc

$$\mathrm{Br}Z = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}Z \to \mathrm{Br}Z_K] \hookrightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}X_K],$$

et comme la flèche $\mathrm{Br}k \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}X_K]$ est un isomorphisme, il en résulte que la flèche $\mathrm{Br}k \to \mathrm{Br}Z$ est un isomorphisme, ce qui établit (v). □

Remarque 1.1. — Le calcul ci-dessus est une généralisation du calcul fait au Lemme 2.6.1 de [**CTS**].

2. Application arithmétique

Le calcul du paragraphe précédent a été motivé par le théorème 1.3 de l'article [**BM**] de T. Browning et L. Matthiesen. Pour toute $\mathbb{Q}$-variété définie par un système

$$0 \neq L_i(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_i/\mathbb{Q}}(\Xi_i), \ i = 1, \dots, m$$

comme à la proposition 1.2, les algèbres K_i *étant de plus supposées être des corps*, les auteurs montrent que le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les points rationnels. Il ne saurait donc y avoir d'obstruction de Brauer-Manin associée au groupe de Brauer d'une compactification lisse.

On eût pu difficilement imaginer un tel théorème si le groupe de Brauer d'une telle compactification n'avait pas été réduit au groupe de Brauer du corps de base, ce qu'établit la proposition 1.2.

A. Skorobogatov [**Sk2**] a récemment combiné la théorie de la descente et le théorème de Browning et Matthiesen. Il a ainsi établi que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour certaines variétés plus générales que celles considérées par Browning et Matthiesen. La conjonction de [**Sk2**, Prop. 3.5] et de la proposition 1.2 ci-dessus donne l'énoncé suivant, qui étend directement celui de Browning et Matthiesen.

Théorème 2.1. — *Soient $L_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, m$ des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$, linéairement indépendantes deux à deux, et soient $K_i/\mathbb{Q},\ i = 1, \ldots, m$, des $\mathbb{Q}$-algèbres finies étales, c'est-à-dire des produits d'extensions finies de $\mathbb{Q}$.*

Soit Y la $\mathbb{Q}$-variété affine définie par le système d'équations affines

$$0 \neq L_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Norm}_{K_i/k}(\Xi_i),\ i = 1, \ldots, m.$$

Ici Ξ_i varie dans la $\mathbb{Q}$-variété $R_{K_i/\mathbb{Q}}\mathbf{A}^1$ définie par la restriction à la Weil de K_i à $\mathbb{Q}$ de la droite affine $\mathbf{A}^1_{K_i}$.

Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les points rationnels de Y. □

Ce travail, stimulé par un séjour à l'Institut Hausdorff à Bonn en avril 2013, a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

Références

[BM] T. Browning et L. Matthiesen, Norm forms for arbitrary number fields as products of linear polynomials, `http://arxiv.org/abs/1307.7641`

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II, Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[Gr] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson & North-Holland, 1968.

[Sk1] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in mathematics **144**, Cambridge University Press, 2001.

[Sk2] A. N. Skorobogatov, Descent on toric fibrations, prépublication, `http://arxiv.org/abs/1312.7539`

soumis le 17 janvier 2014

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`
Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France