Stuttgarter Tagung zum 100. Jahrestag Richard Brauers
22.-24. März 2001

Die Brauersche Gruppe ; ihre Verallgemeinerungen und Anwendungen in der arithmetischen Geometrie

J.-L. Colliot-Thélène

C.N.R.S.
Université de Paris-Sud
Orsay
France

I. Einige Urbegriffe und Ursätze

(Ur = vor Grothendieck)

Sei k ein Körper, k_s ein separabler Abschluß, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$.
Unter dem Tensorprodukt bilden die zentralen einfachen Algebren eine abelsche Torsionsgruppe, die *Brauersche Gruppe* oder *Brauergruppe* von k, geschrieben $\mathrm{Br}(k)$.

Der Standpunkt der Faktorensystemen (Brauer, Noether) (der eng mit den verschränkten Produkten verknüpft ist) führt zu den Isomorphismen (der zweite für n prim zu $\mathrm{Char}(k)$) :

$$\mathrm{Br}(k) \simeq H^2(\mathcal{G}, k_s^*)$$

$$_n\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathcal{G}, \mu_n).$$

Die Brauergruppe tritt in der Definition der *Clifford Invariante von quadratischen Formen* vor (Varianten : Artin, Hasse, Witt).

Sei k algebraisch abgeschlossen und $K = k(C)$ der Funktionenkörper einer Kurve. Dann ist K ein C_1-Körper und $\mathrm{Br}(K) = 0$ (Tsen).

Sei A ein *diskret bewerteter henselscher Ring* (vom Rang Eins), K sei der Fraktionskörper, k der Residuenklassenkörper. *Dann hat man eine exakte Folge*

$$0 \to \mathrm{Br}'(k) \to \mathrm{Br}'(K) \to H^{1'}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$

Strich heißt : prim zur Charakteristik von k. Diese Folge geht auf Witt zurück.
Sei A nicht unbedingt henselsch. Elemente im Kern der zusammengesetzten Abbildung $\mathrm{Br}'(K) \to \mathrm{Br}'(\hat{K}) \to H^{1'}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ nennt man *unverzweigt*.

Die Brauergruppe von $k(t)$ (k perfekt) wird dann leicht berechnet (Faddeev). Man erhält die exakte Folgen

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(t)) \to \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{1\,(1)}} H^1(k_x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0$$

und

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(t)) \to \sum_{x \in \mathbf{P}_k^{1\,(1)}} H^1(k_x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$

Unter Benutzung der Wittschen Folge und der Konstruktion von Bewertungen auf Schiefkörpern über lokalen Körpern erhält man die folgende schöne Formel (Tignol, ...). Sei eine K/k zyklische Erweiterung von Körpern, und A/k eine zentrale einfache Algebra. Dann ist

$$\mathrm{Index}_{k(t)}(A \otimes_k (K/k, t)) = [K : k].\mathrm{Index}_K(A_K).$$

Anwendung (*Index kann grösser als Exponent sein*) :
Wenn die K_i/k zyklisch und unabhaïgig sind, und die X_i Variablen, dann ist die Algebra $(K_1/k, X_1) \otimes \ldots \otimes (K_n/k, X_n)$ über dem Körper $k(X_1, \ldots, X_n)$ eine Divisionsalgebra (Nakayama, 1935 ; spezielle Fälle bei Brauer 1929 und bei Köthe 1931).

Eine **Severi-Brauer Varietät** ist eine getwistete Form des projektiven Raumes (Beispiel : ein Kegelschnitt). Solche Varietäten wurden bei beliebigen Körpern von Severi betrachtet, bei Zahlkörpern von F. Châtelet untersucht. Châtelet nannte sie "Brauer Varietäten". Der Name Severi-Brauer stammt aus einem Bericht von B. Segre.

Sei A/k eine zentrale einfache Algebra. Die zugehörige Severi-Brauer Varietät X_A ist die Varietät der (Rechts)idealen kleinster Dimension von A. Wenn n der Index von A ist, so ist X_A eine getwistete Form von $\mathbf{P}^{n-1}$.

Der Funktionenkörper $k(X_A)$ ist ein "generischer Zerfällungskörper" (Roquette, Amitsur).

Es gilt :

$$Ker\ [\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(X_A)] = \mathbf{Z}[A].$$

Allgemeiner, sei X/k glatt und vollständig, geometrisch irreduzibel. Dann gibt es eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(X)).$$

Die klassischen Sätze über Severi-Brauer Varietäten fliessen direkt aus dieser exakten Folge.

Algebren mit Involution und klassissche Gruppen (Weil)

Entwicklung der Galois-Kohomologie (Serre, Tate)

Wittgruppe $W(k)$, Ideale $I^n(k) \subset W(k)$.

Die Arbeiten von Pfister und Arason über quadratische Formen. Ker $W(k) \to W(k(X))$, wo X/k eine Quadrik ist (Pfister).

Hauptsatz von Arason-Pfister : q anisotrop in $I^n k$, dann ist $\dim(q)$ wenigstens 2^n.

Invariante $e_3 : I^3(k) \to H^3(k, \mathbf{Z}/2)$ (Arason).

Kern $H^3(k, \mathbf{Z}/2) \to H^3(k(X), \mathbf{Z}/2)$, für X eine Quadrik. (Arason)

Nicht verschränkte Produkte : Amitsur (generisch); Saltman, Wadsworth, Tignol, Jacob; Brussel auf $\mathbf{Q}(t)$ und $\mathbf{Q}((t))$.

"Tannaka-Artin Problem" (Platonov, Yanchevskiĭ, Draxl) : es gibt Beispiele von Algebren A/k, bei denen die Gruppe A^{*1} der Elemente von reduzierter Norm 1 größer als die Gruppe der Kommutatoren $[A^*, A^*]$ ist (der Quotient ist als $SK_1(A)$ bekannt). Beispiele mit $k = \mathbf{Q}_p((x))((y))$.

Unverzweigte Brauergruppe

Sei K/k ein Funktionenkörper, Char.(k)=0. Ein Element α von $\mathrm{Br}(K)$ heißt unverzweigt, wenn es bezüglich jedem diskret bewerteten (Rang Eins) Ring $A \subset K$ mit $k \subset A$ und Fraktionskörper von A gleich K unverzweigt ist. Die Menge aller solcher Elemente ist die unverzweigte Brauergruppe $\mathrm{Br}_{nr}(K/k)$ oder einfach $\mathrm{Br}_{nr}(K)$ wenn der Grundkörper k klar ist.

Ist K/k rein transzendent, so ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_{nr}(K/k)$ ein Isomorphismus.

Dies kann man benuzten, um rein Bewertungstheoretische Beweise der Nichtrationalität einiger unirationaler Varietäten zu geben (Problem von Lüroth; die Beispiele von Artin-Mumford kann man so darstellen).

(Witt) *Sei $k = \mathbf{R}$, und $C/\mathbf{R}$ eine glatte zusammenhängende projektive Kurve. Dann ist*

$$\mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{R}(C)) \simeq (\mathbf{Z}/2)^s$$

wo s die Anzahl der Zusammenhängskomponenten von $C(\mathbf{R})$ bezeichnet.

(Bogomolov) *Sei* $L/\mathbf{C}$ *ein Funktionenkörper beliebiger Dimension. Sei* G *eine endliche Gruppe von Automorphismen von* L*. Dann ist*

$$\mathrm{Br}_{nr}(L^G) = \{\alpha \in \mathrm{Br} L^G, \alpha_H \in \mathrm{Br}_{nr}(L^H) \text{ fuer } H \subset G \text{ bizyklisch}\}.$$

(Bogomolov, Saltman) *Sei* $G \subset GL(V)$ *eine endliche Automorphismengruppe eines Vektorraumes* $V/\mathbf{C}$*. Dann ist*

$$\mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{C}(V)^G) = \mathrm{Ker}\ [\ H^3(G, \mathbf{Z}) \to \prod_{A \subset G,\ A \text{ abelsch}} H^3(A, \mathbf{Z})\ ].$$

Auf diese Weise hat Saltman Beispiele von nichrationalen $\mathbf{C}(V)^G$ gegeben : der Noethersche Ansatz zur Realisierung endlicher Gruppen als Galoisgruppen über $\mathbf{Q}$ kann ohne weiteres nicht gelingen.

Sei $G/\mathbf{C}$ *eine reduktive zusammenhängende Gruppe, und sei* $G \subset GL(V)$ *eine Einbettung. Dann ist* $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{C}(V)^G) = 0$*.*
(Saltman für $G = PGL_n$; Bogomolov allgemein)

II. Schematen. Die Grothendiecksche Brauergruppe

Sei X ein Schema. Dann kann man zwei Brauerartige Gruppen definieren :

Die *Azumaya(-Auslander-Goldman) Brauergruppe* $\mathrm{Br}_{Az}(X)$: das ist die Gruppe der Klassen von Azumaya Algebren auf X. Falls $A = \mathcal{END}(\mathcal{E})$, mit $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel, dann ist A trivial.

Grothendiecks Brauergruppe : $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$.

Es gibt eine Einbettung $\mathrm{Br}_{Az}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(X)$. Die erste Gruppe ist eine Torsionsgruppe, die zweite nicht unbedingt. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hat Gabber angekündigt, daß $\mathrm{Br}_{Az}(X)$ mit der Torsion von $\mathrm{Br}(X)$ übereinstimmt.
Meistens ist man mit der Kohomologischen Gruppe $\mathrm{Br}(X)$ ganz zufrieden, besonders bei regulären Schematen.

Lokalisierungsfolge (X regulär)

$$0 \to \mathbf{G}_m \to i_{\eta *}\mathbf{G}_m \to \oplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}\mathbf{Z} \to 0.$$

Wenn X regulär und irreduzibel ist, mit Funktionenkörper K, dann ist $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K)$ injektiv (also ist $\mathrm{Br}(X)$ torsion.)

Für solch'ein X, darf man die Reinheitseigenschaft vermuten : Sei $\xi \in \mathrm{Br}(K)$. Nehmen wir an, für alle $x \in X$ der Kodimension Eins liegt ξ im Bild von $\mathrm{Br}(O_{X,x}) \to \mathrm{Br}(K)$. Gehört ξ zur Gruppe $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(K)$? Dies ist in vielen Fällen bewiesen, z.B. wenn $\dim(X) \leq 2$. Wenn X/k glatt ist und der Körper k der Charakteristik null ist, so gibt es eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K) \to \oplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Sei A ein diskret bewerteter (Rang Eins) Ring, K der Fraktionskörper, k der Residuenklassenkörper. *Dann hat man eine exakte Folge* (Strich heißt : prim zur Charakteristik von k)

$$0 \to \mathrm{Br}'(A) \to \mathrm{Br}'(K) \to H^{1\prime}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0.$$

Bei glatten vollständigen Varietäten X/k (Char.(k)=0) folgt daraus die Birationale Invarianz von $\mathrm{Br}(X)$. $\mathrm{Br}(X)$ stimmt mit der unverzweigten Brauergruppe von $k(X)$ (über k) überein.

Man kann letztere benutzen, um bestimmte nicht triviale Elemente vorzuführen.

Die Grothendieck-Brauergruppe kann man dagegen global berechnen, wie wir in einer Minute sehen werden.

Grothendieck bietet höhere birationale Invarianten an. Sei k ein Körper der Charakteristik null, und sei X/k eine irreduzibel vollständige glatte Varietät. Für $i, j \in \mathbf{N}$ hängt das Bild der Restriktionsabbildung

$$H^i(X, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j})$$

nur vom Funktionenkörper $k(X)$ ab. Für $i = 2, n = 1$ erhält man die n-torsion von $\mathrm{Br}(X)$.

Sei l eine Primzahl, l eine Einheit auf X. Aus der Kummerschen exakten Folgen :

$$1 \to \mu_{l^n} \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \to 1$$

$(x \mapsto x^{l^n})$ erhält man die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \otimes (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \to \mathrm{Br}(X)\{l\} \to 0.$$

Falls $k = \mathbf{C}$, $X/\mathbf{C}$ projektiv glatt, dann ist

$$\mathrm{Br}(X)\{l\} = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho} \oplus H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})_{\text{tors}}.$$

$b_2 - \rho > 0$ ist zu $H^2(X, O_X) \neq 0$ äquivalent (Hodge-Theorie).

Eine andere wichtige Methode zum Berechnen von Brauergruppen liefert die Leray Spektralfolge. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus. Dann hat man eine Spektralfolge

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q\pi_*\mathbf{G}_m) \Longrightarrow H^n(X, \mathbf{G}_m).$$

Natürlich braucht man dann die Garben $R^q\pi_*\mathbf{G}_m$ zu berechnen.

Sei X/k eine geometrisch irreduzibel vollständige glatte Varietät. Sei k_s ein separabler Abschluß von k, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, $X_s = X \times_k k_s$. Dann hat man eine exakte Folge :

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_s)^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Br}(k) \to$$
$$\to Ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_s)] \to H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Pic}(X_s)) \to H^3(\mathcal{G}, k_s^*)$$

Ist X eine projektive Kurve über einem endlichen Körper $\mathbf{F}$, dann folgt $\mathrm{Br}(X) = 0$. Zusammen mit der Lokalisierungsfolge bekommt man daraus (bis auf die p-Torsion) die exakte Folge der geometrischen Klassenkörpertheorie :

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathbf{F}(X)) \to \sum_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Sei $\pi : X \to Y$ eine eigentliche surjektive Abbildung, sei X regulär, der Dimension 2, sei Y lokal henselsch. Sei Z die spezielle Faser. Unter angemessenen Annahmen, $\mathrm{Br}(X) \simeq \mathrm{Br}(Z)$ (Satz von M. Artin : Verschwinden von $R^2\pi_*\mathbf{G}_m$).)

Sei $\pi : X \to Y$ eine eigentliche surjektive Abbildung, sei X regulär, der Dimension 2, sei Y eine glatte vollständige Kurve über einem endlichen Körper $\mathbf{F}$, und sei die generische Faser X_η glatt und geometrisch irreduzibel. Unter Benutzung des obigen Satzes wird die enge Beziehung zwischen der Brauergruppe von X und der Tate-Schafarewitsch-Gruppe der Jakobischen Varietät von X_η festgestellt.

III. K-Theorie (Grothendieck, Milnor, Bass, Quillen)

Sei X ein Schema. Grothendieck hat die Gruppe $K_0(X)$ der Klassen Vektorbündeln auf X definiert. Für glatte Varietäten X über einem Körper hat er die Beziehung zwischen $K_0(X)$ und den Chowgruppen von X untersucht (Chernklassen, Riemann-Rochscher Satz).

Sei k ein Körper. Dann ist $K_0(k) = \mathbf{Z}$. Für $n \geq 1$ definiert man nach Milnor

$$K_n^M(k) = (k^* \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} k^*)/\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n,\ x_i + x_j = 1\}.$$

Also $K_1(k) = k^*$, und $K_2(k) = (k^* \otimes_{\mathbf{Z}} k^*)/\{x \otimes y, x + y = 1\}$.

Es gibt natürliche Homomorphismen (p prim zu $\mathrm{Char}(k)$)

$$K_n^M(k)/p \to H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$$

VERMUTUNG (Bloch-Kato) *Diese Abbildungen sind Isomorphismen*

Eine Folge wäre : die natürlichen Abbildungen

$$H^{n+1}(k, \mu_r^{\otimes n}) \to H^{n+1}(k, \mu_{rs}^{\otimes n})$$

sind injektiv.

Es gibt natürliche Homomorphismen ($Char(k) \neq 2$))

$$K_n^M(k)/2 \to I^n(k)/I^{n+1}(k).$$

VERMUTUNG (Milnor) *Diese Abbildungen sind Isomorphismen.*

Quillen fand eine gute Definition für die höhere K-Theorie-Gruppen von Schematen. Für diese Gruppen bewies er eine Reihe von Eingenschaften : Lokalisierung, Homotopieinvarianz (im regulären Fall), Gersten Vermutung (bei glatten Varietäten), Berechnung der höheren K-Theorie-Gruppen eines projektiven Bündels, und auch eines Severi-Brauer Schemas (letzter Satz der Arbeit ; der Fall K_0 ist schon interessant).

Ähnliche Berechnungen von $K_i(X, A)$ für X/k projektiv homogen und A eine zentrale einfache Algebra über k wurden später systematisch gemacht (Swan, Schofield-van den Bergh, Merkur'ev, Panin, Wadsworth ...). Die Berechnnung von K_0 ist genau so schwer wie die der höheren K_i.

Man kann die K-Theorie eines Schemas mittels der Dimension des Trägers kohärenter Garben filtrieren. Es entsteht die Spektralfolge von Brown, Gersten, Quillen

$$E_2^{pq}(X) = H^p_{Zar}(X, \mathcal{K}_q) \Longrightarrow K_n(X).$$

Auf die $K_i(X)$ kann man Chernklassen mit Werten in der K-Kohomologie definieren, (Schechtman, Soulé, Kratzer) und Gillet hat einen Riemann-Rochschen Satz bewiesen. Daraus bekommt man eine partielle Trivialisierung der BGQ Spektralfolge.

Die Sätze von Merkur'ev-Suslin

Diese ganze Maschinerie haben Merkur'ev und Suslin benutzt. In ihrer Arbeit wird die Hauptrolle durch die Brauer-Severi Varietät $X = SB(D)$ einer Divisionsalgebra D vom Index eine Primzahl p über dem Grundkörper k gespielt.

Für diese Varietät X beweisen Merkur'ev und Suslin :

$K_2k \to H^0(X, \mathcal{K}_2)$ ist ein Isomorphismus.
Die Restriktion $H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(X_s, \mathcal{K}_2)$ ist eine Injektion.

Das sind sehr wichtige Sätze auf dem Weg zu den Hauptsätzen :

Für K/k zyklisch, $\mathrm{Gal}(K/k) = \{\sigma\}$ *und K_2 gilt ein Analog des Hilbertschen Satzes 90, nämlich $x \in K_2K$ kann man als $(\sigma - 1)(y)$ schreiben, dann und nur dann, wenn die Norm $N_{K/k}(x) \in K_2k$ verschwindet.*

Die Reziprozitätsabbildung $K_2^M(k)/p \to H^2(k, \mu_p^{\otimes 2})$ ist ein Isomorphismus.

Sei k ein Körper, sei A/k eine Algebra mit quadratfreiem Index n. Dann liefert die natürliche Abbildung $f \mapsto f \cup [A]$ eine Einbettung $k^*/Nrd(A^*) \hookrightarrow H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$.

Wie geht es weiter ?

Die Geschichte läuft weiter (Rost, Merkur'ev-Suslin, Suslin, Voevodsky, Morel, Levine). Heutzutage wird die K-Theorie durch die motivische Kohomologie ersetzt (und die Brauergruppe $\mathrm{Br}(k)$ schreibt man jetzt $H^3_L(k, \mathbf{Z}(1))$ oder $H^3_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}(1))$.)

Im Prinzip ist die Bloch-Kato Vermutung für $p = 2$ und n beliebig bewiesen, sowohl als auch der Isomorphismus $K_n^M(k)/2 \simeq I^n(k)/I^{n+1}(k)$, also auch $I^n(k)/I^{n+1}(k) \simeq H^n(k, \mathbf{Z}/2)$). So sind auch Sätze, die die Ergebnisse von Arason verallgemeinern, etwa : Kern von $H^n(k, \mathbf{Z}/2) \to H^n(k(X), \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$ wenn X eine Quadrik ist, die durch eine anisotrope n-Pfister Form definiert ist.

IV. Höhere Klassenkörpertheorie (K. Kato, S. Saito)

Aus der üblichen Klassenkörpertheorie hat man den Isomorphismus

$$\mathrm{Br}(k_v) \simeq H^1(\mathbf{F}_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

wo k_v die Komplettierung eines globalen Körpers bzgl. einer diskreten Bewertung ist, und $\mathbf{F}_v$ den endlichen Residuenklassenkörper bezeichnet. Für einen globalen Körper k hat man die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \oplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Die Injektion $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \oplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(k_v)$ ist ein Haupsatz von Brauer-Hasse-Noether.

Für Funktionenkörper von mehreren Variabeln über einem endlichen Körper oder einem Zahlkörper hat Kato 1986 Verallgemeinerungen dieser Tatsachen vermutet. Spezielle Fälle sind bekannt (Kato, CT-Sansuc-Soulé, Jannsen, S. Saito, CT).

Spezielle Konsequenzen dieser Vermutungen :

A) Sei X/k eine geometrisch irreduzible Varietät der Dimension d über einem Zahlkörper. Sei $k(X)$, bzw. $k_v(X)$, der Funktionenkörper von X, bzw. $X \times_k k_v$. Dann ist die Abbildung

$$H^{d+2}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d+1)) \to \prod_{v \in \Omega} H^{d+2}(k_v(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d+1))$$

eine Injektion. Für $d = 0$ erkennt man den Satz von Hasse-Brauer-Noether. Beweise für $d = 1$ sind veröffentlicht ; für d beliebig seit einiger Zeit angekündigt.

B) Für k lokal und R den Ring der ganzen Elementen in k, $\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ ein eigentlicher flacher Morphismus, $\mathcal{X}$ regulär, X/k die generische Faser, der Dimension d, und $Y/\mathbf{F}$ die spezielle Faser von π, Berechnung der $(d+2)$-unverzweigten Kohomologie von X/k (Koeffizienten $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d+1)$) mittels der $(d+1)$-Kohomologie von $Y/\mathbf{F}$ (Koeffizienten $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d)$). Bekannt für $d = 1$.

V. Ergebnisse

Zerfällungskörper

Eine Algebra A/k vom Exponent n (prim zu Char.(k)) besitzt einen Zerfällungskörper der Gestalt $k(\mu_n)(a_1^{1/n}, \ldots, a_m^{1/n})$. (Merkur'ev-Suslin)

Struktur der Brauergruppe eines Körpers

Falls k alle Einheitswurzeln enthält, so it $\mathrm{Br}(k)$ *eine (Torsion) teilbare Gruppe.* (Merkur'ev-Suslin)

Die Gruppe ${}_p\mathrm{Br}(k)$ wird durch Elemente vom Index p erzeugt. (Merkur'ev)

Sei $p \neq 2$. Wenn es eine nicht triviale zyklische Algebra vom Index p über k gibt, dann enthält $\mathrm{Br}(k)$ *eine Untergruppe $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.* (Merkur'ev)

Sei $p = 2$ oder 3. Wenn $2.\mathrm{Br}(k)\{p\} \neq 0$, dann enthält $\mathrm{Br}(k)$ *eine Untergruppe $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.* (Merkur'ev)

Index-Reduktion Formeln

Die Methode, die von Schofield und van den Bergh stammt, besteht darin, die Surjektivität $K_0(X, D) \to K_0(D_{k(X)}) \simeq \mathbf{Z}$ zu benutzen (X/k glatt), und die Berechnung der Gruppen $K_0(X, D)$ bei projektiven homogenen Räumen von linearen algebraischen Gruppen auszuwerten.

Ursprünglicher Satz (Schofield-van den Bergh) : *Seien A und B zwei zentrale Algebren über k. Sei X_B die zu B gehörige Severi-Brauer Varietät, und sei $K_B = k(X_B)$. Es gilt :*

$$\mathrm{Index}(A \otimes_k K_B) = \text{g.g.T. } \mathrm{Index}(A \otimes_k B^{\otimes n}) = \mathrm{Inf}\ \mathrm{Index}(A \otimes_k B^{\otimes n}).$$

Erste Anwendungen (Schofield/van den Bergh) : Wildes verhalten des Indexes bezüglich dem Exponent ; Beispiele von unzerlegbaren Algebren mit kleinem Exponent.

Die Methode ist ganz anders als die Bewertungsmethoden, die seit der Zeit von Brauer benutzt worden waren.

u-Invariante von Körpern

Für jede gerade Zahl $2n$ gibt es einen Körper k, $cd(k) \leq 2$, so daß das Maximum der Dimensionen anisotroper quadratischer Formen über k gleich $2n$ ist. (Merkur'ev)

Beweis : Indexreduktionsformel und die Swansche Berechnung der Gruppen $K_0(X, A)$ für X eine Quadrik. Letztere kann man durch einen elementaren Beweis (Tignol) ersetzen.

Vermutung II von Serre

VERMUTUNG (Serre) *Für G halbeinfach zusammenhängend und k perfekt mit $cd(k) = 2$, ist $H^1(k, G) = 0$.*

Bewiesen von Merkur'ev-Suslin für $G = SL(1, A)$ (für A quadratfrei klar, siehe oben). Bewiesen von Bayer-Parimala für klassische Gruppen, F_4, G_2 ; von Gille für quasi-zerfallende Gruppen ohne E_8.

Variante der Vermutung II für Körper mit

$$cd(k(\sqrt{-1})) = 2$$

(lokal-globales Prinzip für $H^1(k, G)$ bzgl. den reellen Abschlüssen). Für die klassischen Gruppen wurde diese Variante auch von Bayer-Parimala bewiesen.

Die Rostsche Invariante und andere Invarianten

Sei G/k eine geometrisch fast einfache Gruppe über einem Körper k, und sei G einfach zusammenhängend. Rost hat eine Invariante

$$H^1(k, G) \to H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

definiert – und studiert.

Vorläufer waren $H^1(k, SL(D)) = k^*/Nrd(D^*) \to H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$ für D/k zentrale einfache Algebra vom Index n, und die (viel schwerer zu definieren) Invariante e_3 von Arason für $H^1(k, Spin(q))$.

Es sei hier bemerkt, daß diese Invarianten sich keineswegs auf Invarianten von $H^1(A, G)$ für einen beliebigen (kommutativen) Ring A ausdehnen, ganz im Unterschied mit der Clifford Invariante der quadratischen Formen (die Invariante von Artin, Hasse und Witt).

Die Gruppe $SK_1(A)$

Es ist $SK_1(A) = 0$ wenn $cd(k) = 2$. (Merkur'ev-Suslin).

Sei A/k eine zentrale Divisionsalgebra, n sei ihr Index. Man kann einen natürlichen Homomorphismus

$$SK_1(A) \to H^4(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))/(K_2(k) \cup [A])$$

definieren (Suslin, Kahn). Suslin verbindet solch'eine Abbildung mit den Beispielen von Platonov ($SK_1(A) \neq 0$).

Sei A eine Biquaternionenalgebra, und sei q eine zugehörige Albertform (das ist eine quadratische Form der Dimension 6). Dann gibt es eine exakte Folge (Rost)

$$0 \to SK_1(A) \to H^4(k, \mathbf{Z}/2) \to H^4(k(q), \mathbf{Z}/2).$$

Merkur'ev hat daraus eine ähnliche Darstellung für $SK_1(A)$ bei beliebigen Algebren vom Index 4 hergeleitet, im Besonderen eine Injektion

$$SK_1(A) \hookrightarrow H^4(k, \mathbf{Z}/2)/(H^2(k, \mathbf{Z}/2) \cup A^{\otimes 2}).$$

R-Äquivalenz und Rationalität von algebraischen Gruppen

Sei G/k eine lineare algebraische Gruppe. Die Punkte von $G(k)$, die man mittels einer rationalen Kurve zu $1_G \in G(k)$ verbinden kann, bilden eine normale Untergruppe $RG(k) \subset G(k)$. Schreiben wir $G(k)/R = G(k)/RG(k)$. Ist G eine k-rationale Varietät, dann ist $G(K)/R$ für jede Körpererweiterung K/k. Kurz gesagt, G ist dann R-trivial.

Aus der Eigenschaft $SK_1(A) \simeq SK_1(A \otimes_k k(t))$ (Bass, Platonov) ist Voskresenskiĭ zum folgenden Schluß gekommen :

$$SK_1(A) = SL_{1,A}(k)/R.$$

Die Beispiele von A/k mit $SK_1(A) \neq 0$ (Platonov) liefern also Beispiele von Gruppen $G = SL_{1,A}/k$, die nicht k-rational sind.

Für jede Divisionsalgebra A/k vom Index $4n$ hat Merkur'ev gezeigt : es gibt eine Erweiterung K/k mit $SK_1(A_K) \neq 0$. Also ist $SL_{1,A}$ nicht rational über k (schon für k ein Zahlkörper). Er benutzt die obere exakte Folge von Rost und Indexreduktionsformeln, sowie die Injektivität von e_4 auf Symbolen.

Es ist relativ leicht, Beispiele von halbeinfachen Gruppen zu geben, die weder einfach zusammenhängend noch von adjunktem Typ sind, und die nicht rational sind über dem Grundkörper (die Nichtrationalität kann man mittels der unverzweigten Brauer Gruppe sehen).

Beispiele von nichtrationalen Gruppen von adjunktem Typ wurden erst 1994 von Merkur'ev gegeben. Dafür berechnete er die Quotienten $G(k)/R$ der klassischen adjunkten Gruppen. Das benutzt relativ elementare Methoden (auch von Gille entwickelt).

Sei q/k quadratische Form von gerader Dimension, dann ist

$$PSO(q)(k)/R = G_q(k)/k^{*2}.Hyp_q(k)$$

wo $G_q(k)$ die Gruppe der Ähnlichkeitsfaktoren von q, und $Hyp_q(k) \subset k^*$ die Gruppe, die durch die $N_{E/k}(E^*)$ erzeugt ist, mit q_E hyperbolisch.

Sei $\dim(q)$ gerade, $d = disc_{\pm}(q) \in k^*$ kein Quadrat, $Z = k(\sqrt{d})$. Sei $C_0(q)/Z$ vom Index wenigstens 4. Dann ist $PSO(q)$ nicht k-rational.

Um dies zu zeigen wird ein Funktionenkörper L/k gebaut, so daß $PSO(q)(L)/R \neq 0$. Hier wird von Indexreduktionsformeln Gebrauch gemacht.

Beispiele gibt es über $k = \mathbf{Q}(t)$.

Höhere unverzweigte Kohomologie

Sei X/k eine glatte, irreduzible, projektive Varietät, $k(X)$ sei ihr Funktionenkörper. Für $i \in \mathbf{N}$ und geeignete Koeffizienten μ kann man die unverzweigte Kohomologiegruppe

$$H^i_{nr}(k(X), \mu) \subset H^i(k(X), \mu)$$

genau so definieren wie die unverzweigte Brauergruppe von $k(X)$ (über k). Diese Gruppe enthält die höhere birationale Invariante von Grothendieck, ist aber für $i \geq 3$ meistens grösser (bei k algebraisch abgeschlossen und μ endlich kann sie sogar unendlich sein). Mit diesen Gruppen kann man die Nichtrationalität bestimmter unirationaler Varietäten beweisen.

Höhere unverzweigte Kohomologie bestimmter V/G

Für $G \subset GL(V)$ endlich, über $\mathbf{C}$, hat Peyre vor kurzem Beispiele gefunden mit $H^2_{nr}(\mathbf{C}(V)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$ und $H^3_{nr}(\mathbf{C}(V)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \neq 0$. (Hier gibt es Beziehungen mit den Equivarianten Chow-Gruppen.)

Sei G/k halbeinfach einfach zusammenhängend, $G \subset GL(V)$. Für solch'eine Gruppe G sind die Gruppen $H^1_{nr}(k(V/G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ und $H^2_{nr}(k(V/G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$ trivial.

Vor kurzem hat Merkur'ev allgemeine Formeln für die Gruppe $H^3_{nr}(k(V/G), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ erhalten. Damit hat er bei Gruppen vom Typ A_n und vom Typ D_n (für passende nicht algebraisch abgeschlossene Körper k) Beispiele von nichtrationalen V/G gefunden.

Verallgemeinerung eines Satzes von Witt

Sei $X/\mathbf{R}$ eine glatte irreduzible projektive Varietät der Dimension d, und s sei die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $X(\mathbf{R})$. Dann ist

$$H^{d+1}_{nr}(\mathbf{R}(X), \mathbf{Z}/2) \simeq (\mathbf{Z}/2)^s.$$

(CT-Parimala, weitere Arbeiten von Scheiderer)

Arithmetik der zwei-dimensionalen henselschen Ringen

Sei A ein 2-dimensionaler, lokaler, henselscher Integritätbereich, der Residuenklassenkörper sei algebraisch abgeschlossen der Char. null. Der Fraktionskörper k benimmt sich fast genau wie ein total imaginärer Zahlkörper :

Alle Algebren sind zyklisch. Für quadratische Formen der Dimension 3 oder 4 gilt ein lokal-globales Prinzip ; ist die Dimension wenigstens 5, dann sind sie isotrop. (Ford-Saltman ; CT-Ojanguren-Parimala)

Hier werden Sätze von M. Artin benutzt ; einer wurde schon erwähnt, der zweite (aus SGA4) lautet : $cd(k) = 2$.

Arithmetik der Körper $\mathbf{Q}_p(t)$

Algebren und quadratische Formen auf $k(C)$, mit k lokaler Körper. Sagen wir k p-adisch, $p \neq 2$.

Jedes Element von ${}_2\mathrm{Br}(k(C)) = H^2(k(C), \mathbf{Z}/2)$ *zerfällt über einer Erweiterung der Gestalt* $k(C)(\sqrt{f}, \sqrt{g})/k(C)$ (Saltman, benutzt Artin und die Tatsache daß die Brauergruppe einer vollkommenen Kurve über einem endlichen Körper verschwindet).

Jedes Element von $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ *zerfällt über einer quadratischen Erweiterung* (Parimala-Suresh ; benutzt die höhere Klassenkörpertheorie).

Jede quadratische Form in $n \geq 11$ Variabeln über $k(C)$ ist isotrop (Parimala-Suresh, unter Benutzung der obigen Ergebnisse, sowohl als auch Fälle der Bloch-Kato Vermutung; vorher Merkur'ev, Hoffmann-van Geel).

VI. Einige offene Probleme

Zerfällungskörper, Index und Exponent

Wenn $\mathrm{Index}(A)$ *eine Primzahl* p *ist, ist* A *zyklisch ?*
Bekannt für $p = 2, 3$. Unbekannt für $p = 5$ (sogar wenn $k = \mathbf{C}(x, y)$).

Wenn k *ein* C_2*-Körper ist, ist* $\mathrm{Index}(A) = \mathrm{Exp}(A)$ *?*
Der Fall, in dem $\mathrm{Exp}(A)$ eine Potenz von 6 teilt, ist bekannt (Artin, Harris, Tate, Yanchevskiĭ, Merkur'ev-Suslin). Für beliebige Exponente ist die Frage schon offen wenn $k = \mathbf{C}(x, y)$.

Sei $k = \mathbf{C}(x_1, \ldots, x_d)$. Sei p eine Primzahl, ζ_p eine primitive Einheitswurzel. Das Tensorprodukt

$$(x_1 + 2, x_2) \otimes (x_1 + 3, x_3) \otimes \ldots \otimes (x_1 + d, x_d)$$

ist eine Divisionsalgebra vom Exponent p und vom Index p^{d-1}.
Kann man Divisionsalgebren über k *vom Exponent* p *und von grösserem Index finden ?*

Ein Beispiel wo k *ein Funktionenkörper vom Transzendenzgrad* d *über* $\mathbf{C}$ *ist,* A/k *unverzweigt und vom Exponent* p *ist, und* $\mathrm{Index}(A) \geq p^{d-1}$ *geben.*

Algebren über $k(t)$

Sei k *ein Körper und* t *eine Variabel. Sei* $A \in \mathrm{Br}(k(t))$*, sei* A *in* $t = 0$ *unverzweigt und* $A(0) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$*. Gibt es* $t = f(s) \in k(s)$*, wenn möglich mit* $f(0) = 0$*, so daß* $A \otimes_{k(t)} k(s) = 0 \in \mathrm{Br}(k(s))$ *?*

Iskovskih, Mestre : Ja wenn A 2-torsion und wenig verzweigt ist.
Yanchevskiĭ : Ja wenn k lokal (oder sogar "large") ist.

Die Gruppe $SK_1(A)$

Sei A/k eine zentrale einfache Algebra.

(Suslin) *Wenn* $cd(k) = 3$*, ist* $SK_1(A) = 0$ *?*
Ja wenn $\mathrm{Index}(A) = 4$ (Rost, Merkur'ev)

Sei k *endlich erzeugt über dem Grundkörper. Ist* $SK_1(A)$ *endlich ?*
Ja wenn A eine Biquaternionenalgebra ist, und k ist vom Transzendenzgrad 2 über einem globalen Körper.

Andere lineare Gruppen

Indem $SK_1(A) = SL(1, A)/R$, liegt es nahe, ähnliche Probleme für $G(k)/R$ bei anderen zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppen G aufzuwerfen.

Ist $G(k)/R$ *abelsch ?*

Sei G/k *einfach zusammenhängend und* $cd(k) \leq 3$*. Ist dann* $G(k)/R = 1$ *?*

Sei k *endlich erzeugt über dem Primkörper. Ist* $G(k)/R$ *endlich ?*
Bekannt für k ein Zahlkörper (Gille).

Normenprinzip

Sei A/k zentral einfach. Sei K/k eine endliche Erweiterung. Dann ist $N_{K/k}(Nred(A_K^*)) \subset Nred(A^*) \subset k^*$. Bei quadratischen Formen haben Knebusch und Scharlau andere Normenprinzipen bewiesen.

Man kann fragen, ob es sich um ein allgemeines Phänomen in der Theorie der algebraischen Gruppen handelt.

Betrachten wir exakte Folgen

$$1 \to \mu \to \tilde{G} \to G \to 1$$

$$1 \to H \to G \to T \to 1$$

wo μ endlich von multiplikativem Typ ist, $\tilde{G}, G$ zusammenhängende reduktive Gruppen sind, und T ein Torus ist.

Gille und (später) Merkur'ev haben die Fragen untersucht *ob ein Normenprinzip für das Bild von $G(k) \to H^1(k, \mu)$ und für das Bild von $G(k) \to T(k)$ gilt.*

Gille und Merkur'ev zeigen, daß ein Normenprinzip gilt, wenn man sich auf das Bild der Untergruppe $RG(k) \subset G(k)$ beschränkt. Also wenn G k-rational ist, dann gilt das Prinzip. Dies liefert einen neuen Beweis des Normenprinzips von Knebusch, für das Normenprinzip von Scharlau reicht die Methode aber nicht aus.

Rationalität des Zentrums der generischen Algebra

Sei $V/\mathbf{C}$ eine treue lineare Darstellung von $PGL_{n,\mathbf{C}}$. Ist der Quotient V/PGL_n eine rationale Varietät ?

H^2 unverzweigt ist null (Saltman). Dasselbe gilt für H^3 unverzweigt (Saltman).

Man kennt sowieso kein Beispiel einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe $G \subset GL(V)$ über $\mathbf{C}$ mit V/G nicht rational.

Unverzweigte Kohomologie

FRAGE *Sei $X/\mathbf{F}$ eine irreduzible glatte Varietät über einem endlichen Körper $\mathbf{F}$. Für $i, j, n \in \mathbf{N}$, mit n prim zur Charakteristik von $\mathbf{F}$, ist die unverzweigte Kohomologiegruppe*

$$H^i_{nr}(\mathbf{F}(X), \mu_n^{\otimes j})$$

endlich ?

FRAGE *Sei X/k eine irreduzible glatte Varietät über einem Zahlörper k. Für v Stelle von k, sei $k_v(X)$ der Funktionenkörper von $X_v = X \times_k k_v$. Für $i, j, n \in \mathbf{N}$, ist der Kern der diagonalen Abbildung*

$$H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to \prod_v H^i(k_v(X), \mu_n^{\otimes j})$$

endlich ?

Für $i \geq 3$ scheint es gewagt, die selbe Frage mit Koeffizienten $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)$ aufzuwerfen.

Für $i = 2$ ist das aber im Grunde genommen eine wohlbekannte Frage.

Eine Vermutung von Tate

Im Rahmen seiner allgemeinen Vermutungen über algebraische Zyklen hat Tate die folgende Vermutung aufgeworfen :

VERMUTUNG (Tate) *Sei* $X/\mathbf{F}$ *eine glatte vollständige Varietät über einem endlichen Körper. Dann ist* $\mathrm{Br}(X)$ *endlich.*

In dem Fall, wo X eine Fläche ist, mit einer Faserung $\pi : X \to C$ über einer Kurve, die Endlichkeit von $\mathrm{Br}(X)$ ist eng mit der Endlichkeit der Tate-Schafarewitsch Gruppe der generischen Faser von π verknüpft.

Spezielle Fälle sind bekannt : Rationale Flächen (trivial), Abelsche Varietäten und Produkte von Kurven (Tate), spezielle $K3$-Flächen (Artin und Swinnerton-Dyer).

VII. Das Brauer-Manin-Hindernis zum Hasse-Prinzip für rationale Punkte

Sei k ein Zahlkörper, Ω die Menge seiner Stellen. Sei X/k eine projektive, glatte, geometrisch irreduzible Varietät über k.

Man kann die Menge $X(\mathbf{A}_k)$ der adelischen Punkte von X mit der Brauergruppe paaren :

$$X(\mathbf{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Das Bild der diagonalen Einbettung $X(k) \to X(\mathbf{A}_k)$ liegt im Kern $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ der obigen Paarung (Manin, 1970).

(Dabei wird von der exakten Folge der Klassenkörpertheorie

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \oplus \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

Gebrauch gemacht.)

FRAGE *Falls* $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, *ist auch* $X(k) \neq \emptyset$ *?*

Für Kurven vom Geschlecht Eins, z.B. $y^2 = P(t)$ mit $P(t)$ vom Grad 4, folgt dies aus der Annahme, daß die Tate-Schafarewitsch Gruppe (der Jacobischen Kurve) endlich ist. Ähnliches gilt für prinzipielle homogene Räume von abelschen Varietäten.

Für homogene Räume zusammenhängender linearer algebraischen Gruppen, mit zusammenhängenden (geometrischen) Isotropiegruppen, hat die Frage eine bejahende Antwort (Hasse, Schilling, Maaß, Eichler, Landherr, Kneser, Harder, Tchernousov, Sansuc, Borovoi).

Für Flächen der Gestalt $y^2 - az^2 = P(t)$ mit $P(t)$ vom Grad 4 wurde die Frage 1984 bejaht (CT, Sansuc und Swinnerton-Dyer).

Für beliebige (projektive, glatte) Varietäten war eine positive Antwort *nicht zu erwarten.* Man musste allerdings bis 1998 warten, bevor ein explizites (Gegen-)Beispiel gegeben wurde (Skorobogatov ; weitere Arbeiten von Harari und Skorobogatov). Bei diesen Beispielen ist die geometrische Fundamentalgruppe nicht trivial (sogar nicht abelsch).

VERMUTUNG *Sei X eine (glatte, vollständige) Varietät. Nehmen wir an, es gibt einen surjektiven Morphismus $p : X \to \mathbf{P}^1_k$, und folgende Bedingungen sind erfüllt :*

(a) die allgemeine Faser von p ist birational zu einem prinzipiellen homogenen Raum unter einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe G über dem Körper $k(\mathbf{P}^1)$, mit zusammenhängenden (geometrischen) Isotropiegruppen ;

(b) für irgendeinen geschlossenen Punkt $M \in \mathbf{P}^1_k$ besitzt die Faser X_M eine Komponente der Multiplizität Eins.

Wenn $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, dann ist auch $X(k) \neq \emptyset$.

Für Familien $X \to \mathbf{P}^1_k$ von Kegelschnitten, also Gleichungen

$$a(\lambda)X^2 + b(\lambda)Y^2 + c(\lambda)T^2 = 0$$

gibt es gute Gründe, so was zu vermuten.

Solch'eine Fläche ist eine (geometrisch) rationale Fläche. Für eine rationale Fläche X vermutet man sogar, daß die Menge $X(k)$ dicht in $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ liegt.

Vor kurzem wurden spezielle Flächen, die eine Schar von Kurven vom Geschlecht Eins besitzen, untersucht (Swinnerton-Dyer, CT und Skorobogatov). Eine subtile Variation hat Swinnerton-Dyer (2000) bei diagonalen kubischen Flächen (das sind rationale Flächen) entwickelt. Dies führt zum Satz :

(Swinnerton-Dyer) *Nehmen wir an, die Tate-Schafarewitsch Gruppen von elliptischen Kurven über einem Zahlkörper sind endlich. Dann gilt das Hasse-Prinzip für diagonale kubische Hyperflächen $\sum_{i=0}^4 a_i x_i^3 = 0$ über $\mathbf{Q}$.*

Ersetzt man $\mathbf{Q}$ durch den Funktionenkörper $\mathbf{F}_p(C)$ einer Kurve über $\mathbf{F}_p$ mit $p \cong 2 \bmod 3$, dann erhählt man einen absoluten Satz : denn die Annahme bzgl. den Tate-Schafarewitsch Gruppen wird durch bekannte Fälle der Tateschen Vermutung ersetzt.

Das Brauer-Manin-Hindernis zum Hasse-Prinzip für Nullzyklen

Sei k ein Körper und X eine k-Varietät. Ein Nullzyklus von X/k ist eine ganzahlige Kombination $\sum_P n_P P$ von geschlossenen Punkten. Der Grad des Nullzyklus $\sum_P n_P P$ ist die ganze Zahl $\sum_P n_P [k(P) : k]$. Ein Element $A \in \mathrm{Br}(X)$ kann man auf $\sum_P n_P P$ aufwerten :

$$< A, \sum_P n_P P >= \sum_P n_P \mathrm{Cores}_{k(P)/k}(A(P)) \in \mathrm{Br}(k)$$

(hier liegt $A(P) \in \mathrm{Br}(k(P))$.)

Sei k ein Zahlkörper, Ω die Menge seiner Stellen.

VERMUTUNG *Sei X/k eine projektive, glatte, geometrisch irreduzible Varietät über k. Nehmen wir an, auf X gibt es eine Familie $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ von Nullzyklen vom Grad Eins, mit z_v Nullzyklus auf $X \times_k k_v$, so daß $\sum_v < A, z_v >= 0$ für alle $A \in \mathrm{Br}(X)$. Dann gibt es auf X ein Nullzyklus vom Grad Eins.*

Für X/k eine Kegelschnittfamilie über $\mathbf{P}^1_k$ wurde die Vermutung 1988 bewiesen (Salberger). Der Beweis dehnt sich zu Familien von Severi-Brauer Varietäten über $\mathbf{P}^1_k$ aus.

Für X eine Kurve von beliebiegem Geschlecht folgt die Vermutung aus der Annahme, daß die Tate-Schafarewitsch Gruppen von Abelschen Varietäten endlich sind (Manin, S. Saito).

Für X eine Kegelschnittfamilie über einer Kurve von beliebiegem Geschlecht folgt die Vermutung aus der selben Annahme (CT 2000; Frossard 2001).