Complément à l'article
Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes
par
J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ
J. Algebraic Geometry **15** (2006) 733–752

Soient k un corps, G un k-groupe algébrique linéaire connexe, X un k-espace homogène de G à stabilisateurs géométriques connexes.

A la page 739 de [CTK] on donne une démonstration du fait qu'il existe un k-tore bien défini qui sur $\overline{k}$ est le quotient torique de tout stabilisateur d'un $\overline{k}$-point de X. Cette démonstration est trop courte. Il n'est pas évident a priori que le $k(X)$-tore T_0 sur $\overline{k}(X)$ vienne de $\overline{k}$, car il n'y a pas a priori de point de $G(\overline{k}(X))$ envoyant le point générique de $\overline{X}$ sur l'image dans $\overline{k}(X)$ d'un $\overline{k}$-point de X. Il faut procéder en deux temps.

Considérons d'abord le cas où X possède un k-point. Si l'on se donne deux k-points x_1 et x_2, de stabilisateurs $H_1 \subset G$ et $H_2 \subset G$, on peut considérer la k-variété Z transporteur de x_1 à x_2. C'est une k-variété qui sur $\overline{k}$ est $\overline{k}$-isomorphe à $H_1 \times_k \overline{k}$. La k-variété Z est donc géométriquement intègre. Les k-groupes H_1 et H_2 deviennent isomorphes sur $k(Z)$. Les quotients toriques T_1 de H_1 et T_2 de H_2 sont des k-tores k-isomorphes sur $k(Z)$. Ceci implique qu'ils sont k-isomorphes.

Considérons maintenant le cas où X ne possède pas nécessairement de k-point. Soit $k(X)$ le corps des fonctions de X et $\overline{k}(X)$ le corps des fonctions de $\overline{X}$. Soit $T_0/k(X)$ le quotient torique du stabilisateur du point générique de X. Soit $T_1/\overline{k}$ le quotient torique du stabilisateur d'un $\overline{k}$-point de X. L'argument ci-dessus, appliqué sur le corps $\overline{k}(X)$, montre que les $\overline{k}(X)$-tores $T_0 \times_{k(X)} \overline{k}(X)$ et $T_1 \times_{\overline{k}} \overline{k}(X)$ sont $\overline{k}(X)$-isomorphes. Ainsi T_0 est déployé sur $\overline{k}(X)$. Comme le groupe de Galois de $\overline{k}(X)/k(X)$ coïncide avec le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k, ceci donne le k-tore annoncé.