Une version du théorème d'Amer et Brumer pour les zéro-cycles

J.-L. Colliot-Thélène et Marc Levine

(Version initiale soumise le 11 novembre 2009 ; présente version révisée, 4 décembre 2009)

Introduction

Soit k un corps. Soient f et g deux formes *quadratiques* à coefficients dans k, en $n+1$ variables. Soit t une variable. On sait que le système de formes $f = g = 0$ a un zéro non trivial sur k si et seulement si la forme quadratique $f + tg$ sur le corps $k(t)$ a un zéro non trivial (M. Amer [A], A. Brumer [B], voir [EKM, III, Prop. 17.14]).

Dans cette note, dont une version primitive fut conçue à Boston en avril 1991, nous montrons que si l'on considère les zéro-cycles de degré 1 plutôt que les points rationnels, il existe une version de ce résultat pour un système de deux formes *de degré quelconque* (Théorème 1), et des versions pour un système quelconque de formes de même degré $d \geq 2$ (Théorèmes 2 et 3).

Notations

Une variété algébrique sur un corps k est un k-schéma séparé de type fini.

Soient K/k une extension de corps et X un k-schéma. On note $X_K = X \times_k K$.

Définition Soient k un corps et X une k-variété algébrique. À tout point fermé $P \in X$, de corps résiduel $k(P)$ on associe son degré $[k(P) : k] \in \mathbb{N}$. L'indice $I(X/k)$ de la k-variété X est par définition le pgcd des degrés des points fermés. C'est aussi le pgcd des degrés $[L : k]$ des extensions finies de corps L/k avec $X(L) \neq \emptyset$. De façon évidente, on a $I(X/k) = 1$ si et seulement si X possède un zéro-cycle (cycle de dimension zéro) $\sum_P n_P P$ (avec $n_P \in \mathbb{Z}$) de degré $\sum_P n_P[k(P) : k] = 1$. On appelle indice réduit de X/k, et on note $I_{red}(X/k)$ le produit des nombres premiers qui divisent $I(X/k)$. De façon triviale, $I(X/k) = 1$ si et seulement si $I_{red}(X/k) = 1$.

Lemme 0 *Soient k un corps et X une k-variété.*

(a) Si $X = Y \cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous-k-variétés, alors $I(X/k) = pgcd(I(Y/k), I(Z/k))$. En particulier, l'indice de X/k est égal à l'indice de sa sous-k-variété réduite.

(b) Si $X = Y \cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous-k-variétés, alors $I_{red}(X/k) = pgcd(I_{red}(Y/k), I_{red}(Z/k))$.

(c) Si $K = k(t_1, \ldots, t_n)$ est une extension transcendante pure de k, alors $I(X/k) = I(X_K/K)$ et $I_{red}(X/k) = I_{red}(X_K/K)$.

Démonstration Seul le point (c) requiert une explication. Soit $K = k(t)$. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L) \neq \emptyset$ alors $X_{k(t)}(L(t)) \neq \emptyset$. Ainsi $I(X_K/K)$ divise $I(X/k)$. Soit P un point fermé de X_K de degré n. On a donc une extension finie de corps L/K et une une K-immersion fermée Spec $L \hookrightarrow X_K$. Le corps L est le corps des fonctions d'une k-courbe normale C, finie sur Spec $k[t]$. Il existe un ouvert non vide $U \subset$ Spec $k[t]$ tel que la restriction C_U/U soit finie de degré n, et qu'il existe une U-immersion fermée $C_U \hookrightarrow X \times_k U$. Si le corps k est infini, on choisit un k-point $R \in U(k)$. La fibre de C_U/U au-dessus de ce k-point est le spectre d'une k-algèbre finie de degré n qui admet une k-immersion dans X. Une telle situation définit un zéro-cycle effectif de degré n sur la k-variété X (voir [F], Appendices A1, A2, A3). Si le corps k est fini, il existe un zéro-cycle $\sum n_i R_i$ tel que tous les points fermés R_i soient dans $U \subset$ Spec $k[t]$ et que $\sum_i n_i[k(R_i) : k] = 1$. A chaque R_i on associe par la méthode ci-dessus un zéro-cycle effectif z_i de degré $n.[k(R_i) : k]$ sur la k-variété X. Le zéro-cycle $\sum_i n_i.z_i$ est alors de degré n sur la k-variété X. Ainsi $I(X/k)$ divise $I(X_K/K)$. L'énoncé sur les indices réduits résulte immédiatement de celui sur les indices.

Théorème 1 *Soient k un corps, f et g deux formes de degré $d \geq 1$ en $n+1 \geq 3$ variables, non toutes deux nulles. Soient t une variable et $K = k(t)$.*

L'indice réduit de la K-hypersurface $W \subset \mathbb{P}^n_K$ définie par $f + tg = 0$ coïncide avec l'indice réduit de la k-variété $X \subset \mathbb{P}^n_k$ définie par $f = g = 0$.

En particulier, la K-hypersurface $f + tg = 0$ possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-sous-variété X de $\mathbb{P}^n_k$ définie par $f = g = 0$ possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration Pour les k-variétés, on omet l'indice k. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L) \neq \emptyset$, alors $W(L(t)) \neq \emptyset$. Ainsi l'indice $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, et donc l'indice réduit $I_{red}(W/K)$ divise l'indice réduit $I_{red}(X/k)$. D'après le lemme 0 (c), pour établir l'énoncé on peut remplacer le corps k par une extension transcendante pure. On supposera donc le corps k infini.

Supposons d'abord que les formes f et g n'ont pas de facteur commun non constant.

Soit $V = \mathbb{P}^n \setminus X$. Notons $I = I(X/k)$. De la suite exacte de localisation ([F], I. Prop. 1.8) :

$$CH_0(X) \to CH_0(\mathbb{P}^n) \to CH_0(V) \to 0$$

et du fait que le degré sur k définit un isomorphisme $CH_0(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$, on tire l'égalité $CH_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ la k-variété définie par

$$\lambda f + \mu g = 0.$$

Via la projection $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, c'est l'éclatée de $\mathbb{P}^n$ le long de l'intersection complète $X \subset \mathbb{P}^n$ ([F], Appendix A, Remark A.6). Soit $U \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z. La projection $q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induit un morphisme $q_U : U \to V$ qui fait de U un fibré en droites affines sur V. On en déduit un isomorphisme $q_U^* : \mathbb{Z}/I = CH_0(V) \xrightarrow{\cong} CH_1(U)$. On a la suite exacte de localisation ([F], I. Prop. 1.8) :

$$CH_1(Z) \to CH_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \to CH_1(U) \to 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées aux projections $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^1$ et $q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induisent un isomorphisme $(p_*, q_*) : CH_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} CH_1(\mathbb{P}^1) \oplus CH_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Notons

$$i : CH_1(Z) \to CH_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} CH_1(\mathbb{P}^1) \oplus CH_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée. Sur Z, on trouve les 1-cycles suivants.

Le corps k étant infini, et les formes f et g sans facteur commun, on trouve un cycle $z_1 = \mathbb{P}^1 \times R$, où R est un zéro-cycle effectif de degré d^2 sur X par intersection avec un espace linéaire de codimension 2 convenable. L'image par i de z_1 est $(d^2, 0)$.

L'hypothèse que f et g n'ont pas de facteur commun assure que la k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ est de codimension 2. Soient $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ la grassmannienne des droites dans $\mathbb{P}^n$ et $E \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}^n$ la variété d'incidence. Soient r_1, r_2 les deux projections induites sur E. L'image réciproque $r_2^{-1}(X)$ est de codimension au moins 2 dans E, le morphisme r_1 a ses fibres de dimension 1, donc l'adhérence de $r_1(r_2^{-1}(X))$ dans $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ est de codimension au moins 1. Le corps k étant infini, et la k-variété $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^n)$ k-birationnelle à un espace projectif, on peut donc trouver une k-droite $L = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ qui ne rencontre pas X. Soit $q_Z : Z \to \mathbb{P}^n$ la restriction de q à Z. Le morphisme q_Z induit un isomorphisme $Z \setminus q^{-1}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^n \setminus X$. Soit $z_2 \subset Z$ l'image réciproque de L par cet isomorphisme. Ceci définit un 1-cycle sur $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, dont l'image par i est $(d, 1)$. En effet, ce 1-cycle est donné par $L \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$, où la projection sur le second facteur est l'inclusion linéaire $l : L \subset \mathbb{P}^n$, et où la projection sur le premier facteur est donnée par $(-g(l), f(l))$ (on a noté ici l un système de $n+1$ formes linéaires en deux variables). Comme X ne rencontre pas l, le couple $(f(l), g(l))$ de formes homogènes de degré d n'a pas de zéro commun.

Soit $s = I(W/K)$. L'hypersurface $f + tg = 0$ sur le corps K possède un zéro-cycle de degré s. L'adhérence d'un tel zéro-cycle dans $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ définit un 1-cycle z_3 dont l'image par i est de la forme (s, a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Le quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le groupe engendré par $(d^2, 0), (d, 1), (s, a)$ est annulé par l'entier $pgcd(d^2, s - ad)$. De la suite de localisation on conclut que, pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$, l'entier $I = I(X/k)$ divise $pgcd(d^2, I(W/K) - ad)$. Ainsi $I_{red}(X/k)$ divise $I(W/K)$. Comme par ailleurs $I_{red}(W/K)$ divise $I_{red}(X/k)$, on conclut

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

Supposons maintenant que $f = h.f_1$ et $g = h.g_1$ avec f_1 et g_1 homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_1 \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_2 \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par $f = g = 0$, resp. par $f_1 = g_1 = 0$, resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_K$, resp. W_1/K la variété définie par $f + tg = 0$, resp. $f_1 + tg_1 = 0$. On a

$$I_{red}(W/K) = pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_{2,K}/K)) = pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k))$$

d'après le lemme 0 et

$$pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k)) = pgcd(I_{red}(X_1/k), I_{red}(X_2/k)) = I_{red}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{red}(W_1/K) = I_{red}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 0. Ceci achève la démonstration.

Le théorème 1 se généralise à un nombre quelconque de formes. Il y a en fait deux généralisations. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme *Soient k un corps, $f_0, f_1, \ldots, f_r$ des formes à coefficients dans k, de degré $d \geq 1$, en $n + 1 \geq r + 2$ variables $x_0, \ldots, x_n$. La k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ définie par l'annulation de ces formes contient un zéro-cycle effectif de degré d^{r+1}.*

Démonstration Par l'argument donné au lemme 0 (c), on peut supposer le corps k infini. Cette hypothèse sera utilisée de façon constante dans ce qui suit. Soient $g_0, g_1, \ldots, g_r$ des formes de degré d, à coefficients dans k, dont l'annulation définit une sous-k-variété intersection complète et lisse $Y \subset \mathbb{P}^n$. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^1$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal (homogène en les x_i)

$$(tg_0 + (1-t)f_0, \ldots, tg_r + (1-t)f_r) \subset k[t][x_0, \ldots, x_n].$$

Choisisons des formes linéaires $L_1, \ldots, L_{n-r-1} \in k[x_0 \ldots, x_n]$ telles que le sous-schéma de $\mathbb{P}^n$ défini par l'idéal $(g_0, \ldots, g_r, L_1, \ldots, L_{n-r-1})$ soit fini et étale sur k. Alors le sous-schéma fermé $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{X}$ défini par l'idéal $(L_1, \ldots, L_{n-r-1})$ est fini et étale de degré d^{r+1} au-dessus d'un voisinage ouvert U of 1 dans $\mathbb{A}^1$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ l'adhérence schématique de $\mathcal{C}' \cap \mathbb{P}^n_U$ dans $\mathcal{X}$. Le schéma $\mathcal{C}$ est propre sur $\mathbb{A}^1_k$ et comme un sous-schéma ouvert dense de $\mathcal{C}$ est quasi-fini sur $\mathbb{A}^1$, le morphisme $p : \mathcal{C} \to \mathbb{A}^1$ est fini. Comme $p^{-1}(U) \subset \mathcal{C}$ est étale sur U, donc réduit, son adhérence schématique $\mathcal{C}$ est aussi réduite, et chaque composante irréductible de $\mathcal{C}$ s'envoie surjectivement sur $\mathbb{A}^1$. Ainsi $\mathcal{C}$ est plat sur $\mathbb{A}^1$, et donc la fonction

$$a \to \dim_{k(a)} \mathcal{O}_{p^{-1}(a)}$$

est constante sur $\mathbb{A}^1$. En particulier, le 0-cycle associé au sous-schéma fermé $p^{-1}(0)$ de X a degré d^{r+1} sur k.

Théorème 2 *Soient k un corps, et $f_0, f_1, \ldots, f_r$, avec $r \geq 1$, des formes à coefficients dans k, de degré $d \geq 1$, en $n+1 \geq r+2$ variables. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation de ces $r+1$ formes. Soient $t_1, \ldots, t_r$ des variables indépendantes et $K = k(t_1, \ldots, t_r)$. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_K$ la K-variété définie par $f_1 - t_1 f_0 = \ldots = f_r - t_r f_0 = 0$. On a :*

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

En particulier, la K-variété W possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration Pour les k-variétés, on omet l'indice k. Si L/k est une extension finie de corps avec $X(L) \neq \emptyset$, alors $W(L(t)) \neq \emptyset$. Ainsi l'indice $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, et donc l'indice réduit $I_{red}(W/K)$ divise l'indice réduit $I_{red}(X/k)$. D'après le lemme 0 (c), pour établir l'énoncé on peut remplacer le corps k par une extension transcendante pure. On supposera donc le corps k infini.

Supposons d'abord que les formes f_i n'ont pas de facteur commun non constant.

Soit $V = \mathbb{P}^n \setminus X$. Notons $I = I(X/k)$. Comme au théorème 1, on a $CH_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Soit $Z \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n$ la k-variété définie par la proportionalité de $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ et de $(f_0, \ldots, f_r)$, c'est-à-dire par le système d'équations $\lambda_i.f_j - \lambda_j.f_i = 0$ pour $i, j \in \{0, \ldots, r\}$. La fibre de $Z \to \mathbb{P}^r$ au-dessus du point générique de $\mathbb{P}^r$ est W/K. Soit $U \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z. La projection $q : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induit un morphisme $q_U : U \to V$. Soit $q_Z : Z \to \mathbb{P}^n$ le morphisme restriction de q à Z. Il induit un isomorphisme $q_Z^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V$. Les fibres de $q_U : U \to V$ au-dessus d'un point M de V sont donc le complémentaire d'un point dans un espace projectif $\mathbb{P}^r$. De façon plus globale, le morphisme $q_U : U \to V$ se décompose comme

$$U \to U_1 \to V$$

où $q_1 : U \to U_1$ est un fibré en droites affines et $q_2 : U_1 \to V$ est un fibré projectif de dimension relative $r-1$. Par image directe par morphisme propre on a un isomorphisme $q_{2*} : CH_0(U_1) \xrightarrow{\cong} CH_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Par image inverse par morphisme plat, on a un isomorphisme $q_1^* : CH_0(U_1) \xrightarrow{\cong} CH_1(U)$. On a donc un isomorphisme $CH_1(U) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/I$. On a la suite exacte de localisation

$$CH_1(Z) \to CH_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \to CH_1(U) \to 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées aux projections $p : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^r$ et $q : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ induisent un isomorphisme $(p_*, q_*) : CH_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} CH_1(\mathbb{P}^r) \oplus CH_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Notons

$$i : CH_1(Z) \to CH_1(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} CH_1(\mathbb{P}^r) \oplus CH_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée. Sur Z, on trouve les 1-cycles suivants.

Un cycle $z_1 = \mathbb{P}^1 \times R$, où $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^r$ est une droite et R est un zéro-cycle effectif de degré d^{r+1} sur X, dont l'existence est assurée par le lemme précédant le théorème. L'image par i de z_1 est $(d^{r+1}, 0)$.

Soit $s = I(W/K)$. Il existe donc un zéro-cycle de degré s sur W/K, et un tel zéro-cycle s'étend en un r-cycle sur Z, cycle génériquement fini sur $\mathbb{P}^r$ de degré relatif s. Sa restriction au-dessus d'une droite générale $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^r$ est un 1-cycle sur Z, dont l'image par i est de la forme (s, a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Les formes homogènes $(f_0, \ldots, f_r)$ définissent un k-morphisme $\sigma : V \to \mathbb{P}^r$. Elles définissent donc une section du morphisme $q_V : \mathbb{P}^r_V \to V$, restriction de q à $\mathbb{P}^r_V$, section dont l'image est dans Z : c'est l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme $q_Z^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} V$ mentionné plus haut. L'hypothèse que les f_i n'ont pas de diviseur commun non trivial assure que la k-variété $X \subset \mathbb{P}^n$ est de codimension au moins 2. Le corps k étant infini, par le même argument qu'au théorème 1, on peut donc trouver une k-droite $L = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ qui ne rencontre pas X. La restriction de σ à L est donc un morphisme $L \to Z \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^n$, dont l'image est un 1-cycle sur Z. L'image de ce 1-cycle par i est $(d,1)$.

Le quotient du groupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le groupe engendré par les trois éléments $(d^{r+1}, 0)$, (s,a) et $(d,1)$ est $\mathbb{Z}/J$, avec $J = pgcd(d^{r+1}, s - ad)$. De la suite de localisation on conclut que $I = I(X/k)$ divise $pgcd(d^{r+1}, I(W/K) - ad)$ pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi $I_{red}(X/k)$ divise $I(W/K)$. Comme par ailleurs $I_{red}(W/K)$ divise $I_{red}(X/k)$, on obtient

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

Supposons maintenant que $f_i = h.g_i$ pour tout i avec les g_i homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_1 \subset \mathbb{P}^n_k$, resp. $X_2 \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation des f_i, resp. par l'annulation des g_i, resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbb{P}^n_K$, resp. W_1/K la variété définie par l'annulation des $f_i - t_i f_0$ $(i = 1, \ldots, r)$, resp. par l'annulation des $g_i - t_i g_0$ $(i = 1, \ldots, r)$. On a

$$I_{red}(W/K) = pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_{2,K}/K)) = pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k))$$

d'après le lemme 0 et

$$pgcd(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k)) = pgcd(I_{red}(X_1/k), I_{red}(X_2/k)) = I_{red}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{red}(W_1/K) = I_{red}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 0. Ceci achève la démonstration.

Voici la seconde généralisation du théorème 1.

Théorème 3 *Soient k un corps, $f_0, f_1, \ldots, f_r$ des formes non toutes nulles, à coefficients dans k, de degré $d \geq 1$, en $n+1 \geq r+2$ variables. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ la k-variété définie par l'annulation de ces formes. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des variables indépendantes et $L = k(w_1, \ldots, w_r)$. Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_L$ l'hypersurface définie par $f_0 + w_1 f_1 + \ldots + w_r f_r = 0$. On a :*

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(Y/L).$$

En particulier, la L-hypersurface Y possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k-variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration Soit E_r l'énoncé de ce théorème pour r fixé et tout corps k. L'énoncé E_1 est le théorème 1. Supposons établi E_{r-1}.

Supposons $r \geq 2$. Soient $t_1, \ldots, t_r$ des variables indépendantes et $K = k(t_1, \ldots, t_r)$. D'après le théorème 2, on a $I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K)$, où la K-variété $W \subset \mathbb{P}^n_K$ est définie par

$$f_1 - t_1 f_0 = \ldots = f_r - t_r f_0 = 0.$$

Soient $s_2, \ldots, s_r$ des variables indépendantes et $F = K(s_2, \ldots, s_r)$. D'après E_{r-1}, l'indice réduit de W sur $K = k(t_1, \ldots, t_r)$ est égal à l'indice réduit sur F de l'hypersurface T définie dans $\mathbb{P}^n_F$ par

$$(f_1 - t_1 f_0) + s_2(f_2 - t_2 f_0) + \ldots + s_r(f_r - t_r f_0) = 0.$$

Ceci se réécrit

$$f_1 - (t_1 + s_2 t_2 + \ldots + s_r t_r) f_0 + s_2 f_2 + \ldots + s_r f_r = 0.$$

Soient $w_1 = -1/(t_1+s_2t_2+\ldots+s_rt_r)$ et, pour $i \geq 2$, $w_i = -s_i/(t_1+s_2t_2+\ldots+s_rt_r)$. L'équation de l'hypersurface $T \subset \mathbb{P}^n_F$ s'écrit alors

$$f_0 + w_1 f_1 + \ldots + w_r f_r = 0.$$

L'inclusion

$$k(w_1, \ldots, w_r, t_2, \ldots, t_r) \subset k(t_1, t_2, \ldots, t_r, s_2, \ldots, s_r) = F$$

est une égalité. L'extension $F = L(t_2, \ldots, t_r)$ est transcendante pure. D'après le lemme 0, l'indice réduit sur L de l'hypersurface définie par

$$f_0 + w_1 f_1 + \ldots + w_r f_r = 0$$

dans $\mathbb{P}^n_L$ est égal à l'indice réduit de cette hypersurface sur F. Ceci achève la démonstration.

Remarque

A. Pfister, J.W.S. Cassels et D. F. Coray (voir les références dans [C]) ont donné des exemples d'intersections complètes de trois quadriques $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ dans $\mathbb{P}^n_k$ (sur un corps k de caractéristique différente de 2) qui possèdent un zéro-cycle de degré 1 sans posséder de point rationnel. La quadrique $f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2 = 0$ sur le corps $k(t_1, t_2)$ possède alors un zéro-cycle de degré 1. Comme c'est une quadrique, un théorème de Springer [S] assure que cette quadrique admet un point $k(t_1, t_2)$-rationnel.

On voit ainsi que le théorème 3 ne vaut pas lorsque l'on remplace les zéro-cycles de degré 1 par des points rationnels : le théorème d'Amer et Brumer ne s'étend pas à un système de 3 formes.

Remerciements Marc Levine remercie la NSF (grant number DMS-0801220) et la fondation Alexander von Humboldt.

Bibliographie

[A] M. Amer, Quadratische Formen über Funtionenkörpern, Dissertation, Johannes Gutenberg Universität, Mainz 1976.

[B] A. Brumer, Remarques sur les couples de formes quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 16, A679–A681.

[C] D. F. Coray, On a problem of Pfister about intersections of three quadrics. Arch. Math. (Basel) **34** (1980), no. 5, 403–411.

[EKM] R. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev, The algebraic and geometric theory of quadratic forms, AMS Colloquium Publications, vol. **56**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[F] W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band **2**, Springer-Verlag 1984.

[S] T. A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952) 1517–1519.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
jlct@math.u-psud.fr

Marc Levine
Department of Mathematics, Northeastern University, 360 Huntington Avenue, Boston, MA 02115, USA
marc@neu.edu
et
Universität Duisburg-Essen Fakultät Mathematatik, Campus Essen, D-45117 Essen, Germany
marc.levine@uni-due.de