

VARIÉTÉS RÉELLES SEMI-ALGÈBRIQUEMENT CONNEXES NON STABLEMENT RATIONNELLES

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, ALENA PIRUTKA ET FEDERICO SCAVIA

ABSTRACT. Let R be the field of real Puiseux series. It is a real closed field. We construct the first examples of smooth intersections of two quadrics in \mathbb{P}_R^5 and smooth cubic hypersurfaces in \mathbb{P}_R^4 which are not stably rational but for which the space $X(R)$ of R -points is semi-algebraically connected. The question of constructing such examples over the field of real numbers \mathbb{R} remains open.

RÉSUMÉ. Soit R le corps des séries de Puiseux réelles. C'est un corps réel clos. On construit les premiers exemples d'intersections lisses de deux quadriques dans \mathbb{P}_R^5 et d'hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}_R^4 qui ne sont pas stablement rationnelles mais pour lesquelles l'espace $X(R)$ des R -points est semi-algèbriquement connexe. La question de construire de tels exemples sur le corps des réels \mathbb{R} reste ouverte.

INTRODUCTION

Soit X une \mathbb{R} -variété projective et lisse, géométriquement connexe, géométriquement unirationnelle. Pour X de dimension 2, on sait depuis Comessatti [Com12] que si l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ est connexe (et en particulier non vide) alors X est rationnelle sur \mathbb{R} . Ceci s'applique aux surfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ et aux intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$. En dimension quelconque, que $X(\mathbb{R})$ soit connexe est une condition nécessaire pour que X soit stablement rationnelle sur \mathbb{R} . Ce n'est pas une condition suffisante de rationalité, déjà pour X intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ [HT21]. Mais la question de savoir si cette condition est suffisante pour assurer la rationalité stable est ouverte pour certaines classes simples de variétés, par exemple les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$, ou les hypersurfaces cubiques lisses de dimension au moins 3.

On peut se poser la même question sur un corps réel clos R arbitraire. On dispose en effet d'une notion de connexité semi-algèbrique qui étend la notion usuelle de connexité sur les réels; voir [DK81a] et [BCR98, Définition 2.4.2]. Sur le corps

$$\mathbb{R}\{\{t\}\} := \cup_{n \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/n}))$$

des séries de Puiseux réelles (qui est un corps réel clos avec t infiniment petit positif) nous donnons des exemples de variétés projectives lisses X dont le lieu $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ des points réels est semi-algèbriquement connexe mais qui ne sont pas CH_0 -triviales,

Date: 7 juin 2025.

2020 Mathematics Subject Classification. 14E08; 14M20, 14P10, 14P25, 14F20.

Key words and phrases. Rationality, real connectedness, semi-algebraic geometry, specialisation, unramified cohomology, quadratic forms, Chow groups.

et en particulier ne sont pas stablement rationnelles, ni même rétractilement rationnelles, parmi les variétés des types suivants :

- (i) intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^5$ (théorème 3.6),
- (ii) hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^4$ (théorème 3.9),
- (iii) solide lisse fibré en coniques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^2$ et géométriquement rationnel (théorème 3.12).

On ne sait pas s'il existe de tels exemples sur le corps \mathbb{R} des réels.

Ces résultats sont à mettre en perspective avec plusieurs articles récents.

- (1) Sur tout corps k , des travaux de Hassett et Tschinkel [HT21] (pour $k = \mathbb{R}$) et de Benoist et Wittenberg [BW19] (pour k arbitraire) ont établi la non-rationalité de toute intersection lisse X de deux quadriques dans \mathbb{P}_k^5 , dès que X ne contient pas de droite définie sur k , ce qui sur $k = \mathbb{R}$ peut se produire avec $X(\mathbb{R})$ connexe. La méthode est une élaboration sur un corps arbitraire de celle de Clemens et Griffiths pour établir la non-rationalité des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$. Olivier Wittenberg a récemment appliqué cette méthode pour établir sous des hypothèses générales la non-rationalité de solides X fibrés en surfaces quadriques sur la droite projective $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, certains d'entre eux satisfaisant que $X(\mathbb{R})$ est connexe. Cette méthode est puissante, mais elle est spécifique à la dimension 3, et elle ne dit rien sur la rationalité stable.
- (2) Sur tout corps réel clos R , deux des auteurs [CTP24] ont donné des exemples de solides X fibrés en surfaces quadriques sur \mathbb{P}_R^1 qui ne sont pas CH_0 -triviaux bien que $X(R)$ soit semi-algébriquement connexe. L'invariant ici utilisé est le groupe de Brauer non ramifié. Les fibrations sur \mathbb{P}_R^1 ont des fibres géométriques singulières réductibles.
- (3) Sur tout corps réel clos R , deux des auteurs [CTP24] ont étudié une classe de solides X fibrés en surfaces quadriques sur \mathbb{P}_R^1 , à fibres géométriques intègres, qui échappe aux deux techniques précédentes. Pour une sous-classe assez large de tels solides X ils ont établi que X est CH_0 -triviale. La question si sur $R = \mathbb{R}$ cela vaut toujours pour toutes les variétés de la classe est ouverte.
- (4) Sur le corps $\mathbb{R}\{\{t\}\}$, Benoist et le deuxième auteur [BP24] ont donné des exemples de solides du type de [CTP24] dont l'espace des $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -points est semi-algébriquement connexe et qui ne sont pas CH_0 -triviaux. L'invariant utilisé est un invariant en cohomologie non ramifiée de degré 3 introduit dans [CTP24], reposant sur le travail [CTS93]. La non-nullité de cet invariant est détectée par une méthode de spécialisation au-dessus des corps $\mathbb{R}((t^{1/n}))$ pour tous les $n \geq 1$.

Dans le présent article, nous développons une nouvelle méthode, qui donne des résultats pour plusieurs autres classes de variétés. Nous partons de versions singulières Y/\mathbb{R} des solides X des types (i) (ii) (iii) pour lesquelles $Y(\mathbb{R})$ est connexe, le lieu singulier est formé d'un nombre fini de points non réels, et le groupe de Brauer non ramifié de Y n'est pas réduit à celui de \mathbb{R} . De tels exemples ont été construits dans [CTP24]. Ensuite, nous déformons une telle variété Y en une famille \mathcal{X} sur $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$ à fibre générique lisse du même type. En nous appuyant

sur une version semi-algébrique du théorème d'Ehresmann due à Coste et Shiota [CS92], nous montrons (§1) que l'ensemble des $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -points de la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété projective lisse $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}\{\{t\}\}} \mathbb{R}\{\{t\}\}$ est semi-algébriquement connexe. Une méthode alternative pour obtenir ce résultat (§1) repose sur le travail de Scheiderer [Sch94]. Par ailleurs nous montrons (§2) que la méthode de spécialisation, initiée par Voisin et généralisée par deux des auteurs [CTP16], s'adapte de façon souple à ce contexte (sans résolution explicite des singularités) et établit que la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X n'est pas CH_0 -triviale et donc n'est pas stablement rationnelle. La construction des exemples est détaillée au §3.

La nouvelle méthode s'applique dans un cadre plus large (§4), où le lieu singulier de la variété auxiliaire Y n'est pas nécessairement fini, et où le groupe de Brauer non ramifié est remplacé par un groupe de cohomologie non ramifiée supérieur.

Nous obtenons ainsi (§5) des exemples de $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variétés projectives lisses X non CH_0 -triviales avec $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ semi-algébriquement connexe parmi des variétés de dimension supérieure des types suivants :

- (iv) fibration en quadriques lisse de dimension relative 6 sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$ (théorème 5.3),
- (v) intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^9$ (théorème 5.6).

Ici l'analyse de la fibre singulière utilisée dans la déformation est plus délicate, et on a besoin d'une résolution des singularités explicite.

On comparera (i) et (v) avec la rationalité, sur tout corps réel clos R , des intersections lisses de deux quadriques dans \mathbb{P}_R^4 (Comessatti [Com12]), dans \mathbb{P}_R^6 et dans un certain nombre de cas dans \mathbb{P}_R^{2n} (Hassett, Kollár, Tschinkel [HKT22]) lorsque leur lieu réel est semi-algébriquement connexe.

On conclut cet article avec des calculs (§6) des groupes de cohomologie non ramifiée en bas degré pour les variétés projectives et lisses ici considérées. Dans beaucoup de cas, ces groupes sont réduits à la cohomologie du corps de base, et ce même après toute extension du corps de base, si bien qu'ils ne permettent pas de détecter la non CH_0 -trivialité.

Notations et rappels. Un corps F est dit *formellement réel* s'il satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes (cf. [BCR98, Theorem 1.1.8]) :

- (i) le corps F peut être ordonné ;
- (ii) l'élément -1 n'est pas une somme de carrés dans F ;
- (iii) pour tous $x_1, \dots, x_n \in F$, si $\sum x_i^2 = 0$, alors $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Un corps réel R est dit *réel clos* s'il n'admet pas d'extension algébrique réelle non triviale. Il est équivalent de dire (cf. [BCR98, Theorem 1.2.2]) que le corps $R[i] := R[x]/(x^2 + 1)$ est algébriquement clos. Par exemple, les corps suivants sont des corps réels clos : le corps des nombres réels \mathbb{R} , le corps \mathbb{R}_{alg} des nombres réels qui sont algébriques sur \mathbb{Q} , et le corps des séries de Puiseux à coefficients réels $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ (voir [BCR98, Exemple 1.2.3.]).

Soit k un corps. Une k -variété est un k -schéma séparé de type fini. Une k -variété intègre est dite *k -rationnelle* si elle est k -birationnelle à un espace projectif \mathbb{P}_k^n . Une k -variété intègre X est dite *stablement k -rationnelle* s'il existe des espaces projectifs \mathbb{P}_k^n et \mathbb{P}_k^m tels que $X \times_k \mathbb{P}_k^n$ soit k -birationnel à \mathbb{P}_k^m . Une k -variété intègre X est dite *rétractilement rationnelle* s'il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et

$V \subset \mathbb{P}_k^m$ (m convenable), et des k -morphisms $f: U \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow U$ tels que le composé $g \circ f$ soit l'identité de U . Une k -variété intègre stablement k -rationnelle est rétractilement rationnelle.

Pour X une k -variété, on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Pour X une k -variété propre, l'application qui à un point fermé P associe le degré $[k(P) : k]$ du corps résiduel $k(P)$ s'étend en un homomorphisme $\deg_k: CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. On note $A_0(X)$ le noyau de cet homomorphisme.

On dit qu'une k -variété propre géométriquement intègre X est (universellement) CH_0 -triviale si pour tout corps F contenant k la flèche $\deg_F: CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (voir [ACTP17, CTP16]). Sous l'hypothèse que la k -variété X , de corps des fonctions $k(X)$, est lisse et possède un zéro-cycle de degré 1, ceci est équivalent à l'énoncé : $A_0(X_{k(X)}) = 0$ [ACTP17, Lemma 1.3].

Si une k -variété géométriquement intègre propre et lisse est stablement rationnelle, ou plus généralement rétractilement rationnelle, alors elle est CH_0 -triviale.

Soit C un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Rappelons que toute intersection complète lisse de deux quadriques dans \mathbb{P}_C^n avec $n \geq 4$ est rationnelle, et qu'il en est de même de toute variété projective et lisse de dimension au moins 2 fibrée en quadriques sur la droite projective \mathbb{P}_C^1 . Il existe des solides fibrés en coniques sur le plan projectif qui ne sont pas rétractilement rationnels (Artin–Mumford). Une hypersurface cubique lisse dans \mathbb{P}_C^4 n'est pas rationnelle (Clemens–Griffiths). Soit $n \geq 4$. Certaines hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}_C^n , comme l'hypersurface cubique de Fermat, sont CH_0 -triviales. Certaines hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}_C^{2m+1} sont rationnelles. La rationalité stable des hypersurfaces cubiques dans \mathbb{P}_C^4 est un problème entièrement ouvert.

Soient k un corps et un M un module galoisien discret de torsion, première à la caractéristique de k . Soient X une k -variété intègre et $k(X)$ son corps des fonctions. On note

$$H_{\text{nr}}^i(k(X)/k, M) \subset H^i(k(X), M)$$

le sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne formé des éléments qui sont non ramifiés par rapport à toute valuation discrète sur $k(X)$ triviale sur k ; voir [CT95, §4], [Ros96] et [Mer08]. Si $\text{car}(k) = 0$ et X/k est projective et lisse, on a

$$\text{Br}(X) = \text{Br}_{\text{nr}}(k(X)/k) = H_{\text{nr}}^2(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)),$$

où $\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ est le groupe de Brauer de X , où $\text{Br}_{\text{nr}}(k(X)/k)$ est le groupe de Brauer non ramifié de $k(X)$ sur k et où, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j) := \varinjlim_n \mu_n^{\otimes j}$.

On utilisera dans cet article des résultats de la théorie algébrique des formes quadratiques [Lam05, Kah08]. En particulier, on utilisera les propriétés des formes de Pfister (voir [Lam05, Chapter X] et [Kah08, Chapitre 2]) et des formes d'Albert (voir [Lam05, (4.7) p. 69, Albert's Theorem 4.8] et [Kah08, Définition 5.7.7, Lemme 8.1.4]).

1. UN CRITÈRE DE CONNEXITÉ SEMI-ALGÈBRIQUE

Dans cette section, nous donnons un critère de connexité semi-algébrique, au sens de [BCR98, Definition 2.4.2], pour la fibre générique, au-dessus du corps des séries de Puiseux $\mathbb{R}\{\{t\}\}$, d'un morphisme projectif de \mathbb{R} -variétés $f: X \rightarrow U$, où $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec } \mathbb{R}[t]$ est un sous-schéma ouvert contenant 0.

Théorème 1.1. *Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec } \mathbb{R}[t]$ et soit $\eta: \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ le morphisme correspondant à l'inclusion $\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{R}\{\{t\}\}$. Soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ un voisinage Zariski de 0, soit $f: X \rightarrow U$ un morphisme projectif fidèlement plat de \mathbb{R} -variétés, à fibre générique lisse, soit $X_0 := X|_{t=0}$ et soit $X_\eta := X \times_{U,\eta} \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\})$. Supposons que $X_0(\mathbb{R})$ est non vide et contenu dans le lieu lisse de X_0 . Le nombre de composantes semi-algébriquement connexes de $X_0(\mathbb{R})$ coïncide avec le nombre de composantes semi-algébriquement connexes de $X_\eta(\mathbb{R}\{\{t\}\})$.*

On donnera deux preuves de ce résultat. La première démonstration est analytique et utilise un théorème fondamental de Nash-trivialité des fibrations dû à Coste et Shiota [CS92]. La deuxième démonstration utilise la variante réelle de la théorie de SGA 4, développée par Scheiderer [Sch94].

1.1. Première preuve du théorème 1.1. Nous introduisons maintenant les notations nécessaires pour énoncer le théorème de Nash-trivialité des fibrations de Coste et Shiota [CS92]; nos références de base sont l'article [DK81b] de Delfs et Knebusch et le livre [BCR98] de Bochnak, Coste et Roy.

Soit R un corps réel clos et soit X une R -variété. D'après [DK81b, Exemple 2 p. 182] l'ensemble $X(R)$ admet une structure naturelle d'espace semi-algébrique sur R , au sens de [DK81b, Définition 3 p. 182] (il s'agit donc d'espaces annelés sur R au sens de [DK81b, Définition 2 p. 182]). Si X est quasi-projective, $X(R)$ est même un espace semi-algébrique affine sur R ; voir [DK81b, Remark p. 182]. Pour tout morphisme de R -variétés $f: X \rightarrow Y$, l'application induite $f(R): X(R) \rightarrow Y(R)$ est semi-algébrique au sens de [DK81b, p. 184]. Si le morphisme f est propre, d'après [DK81b, Theorem 9.6] l'application $f(R)$ est propre au sens de [DK81b, Définition p. 192], et en particulier elle est fermée.

Soit X une R -variété quasi-projective. Alors $X(R)$ est un espace semi-algébrique affine sur R . On peut donc exhiber $X(R)$ comme un sous-ensemble algébrique $X(R) \subset R^n$ au sens de [BCR98, Définition 2.1.1], pour $n \geq 1$ convenable. Supposons de plus que $X(R)$ est contenu dans le lieu lisse de X . Alors, d'après [BCR98, Proposition 3.3.11], $X(R)$ est donc une variété de Nash affine au sens de [CS92, p. 351], ou de façon équivalente une sous-variété de Nash de R^n au sens de [BCR98, Définition 2.9.9]. Si Y est une autre R -variété quasi-projective telle que $Y(R)$ soit contenu dans le lieu lisse de Y et $f: X \rightarrow Y$ est un R -morphisme tel que $X(R)$ soit contenu dans le lieu lisse de f , l'application semi-algébrique induite $f(R)$ est une submersion de Nash, c'est-à-dire une application de Nash au sens de [BCR98, Définition 2.9.9] dont la différentielle est surjective en tout point de $X(R)$. En particulier, $f(R)$ est ouverte. On rappelle que, par définition, toute application de Nash $p: M \rightarrow N$ entre variétés de Nash affines est en particulier une application semi-algébrique, et que, par définition, p est un difféomorphisme de Nash si elle est bijective et p^{-1} est aussi une application de Nash.

Théorème 1.2. *(Coste-Shiota) Soit R un corps réel clos, soit M une variété de Nash affine, et soit $p: M \rightarrow R$ une submersion propre de Nash. Alors il existe un difféomorphisme de Nash $h: p^{-1}(0) \times R \rightarrow M$ tel que $p \circ h$ soit la projection sur R .*

Démonstration. On peut supposer M non vide. Comme toute submersion est ouverte et toute application propre est fermée, l'image de p est ouverte, fermée et non vide, et donc p est surjective. D'après [CS92, Theorem A, Theorem 2.4(iii')], il existe alors une variété de Nash affine F et un difféomorphisme de Nash $h': F \times R \rightarrow M$

tel que $p \circ h'$ soit la projection sur R . Par restriction à $0 \in R$, on déduit un difféomorphisme de Nash $p_0: F \rightarrow p^{-1}(0)$. Il suffit de poser $h := h' \circ (p_0^{-1} \times \text{id}_R)$ pour conclure. (Par convention, toutes les variétés de Nash considérées dans [CS92] sont affines ; voir [CS92, p. 351].) \square

Première démonstration du théorème 1.1. Posons $R := \mathbb{R}\{\{t\}\}$. D'après [BCR87, Théorème 2.4.5], les composantes connexes et les composantes semi-algébriquement connexes de $X_0(\mathbb{R})$ coïncident. Par [BCR98, Proposition 5.3.6], $X_0(\mathbb{R})$ et $X_0(R)$ ont le même nombre de composantes semi-algébriquement connexes. Il suffit donc de montrer que les semi-algébriques $X_0(R)$ et $X_\eta(R)$ ont le même nombre de composantes semi-algébriquement connexes. On prouvera que $X_0(R)$ et $X_\eta(R)$ sont Nash-difféomorphes entre eux : le théorème en découle parce qu'un difféomorphisme de Nash est ouvert et fermé et l'image d'un espace semi-algébriquement connexe par une application semi-algébrique est encore semi-algébriquement connexe.

Comme la fibre générique du morphisme f est lisse, passant à un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ contenant 0 plus petit si nécessaire, on peut supposer que f est lisse au-dessus de $U \setminus \{0\}$. Soit $V \subset X$ le plus grand sous-schéma ouvert de X tel que la restriction de f à V soit lisse. Comme le morphisme f est plat, l'hypothèse que $X_0(\mathbb{R})$ est contenu dans le lieu lisse de X_0 entraîne que $X_0(\mathbb{R})$ est contenu dans V . On a donc $V(\mathbb{R}) = X(\mathbb{R})$, et le théorème d'homomorphisme d'Artin–Lang [BCR98, Theorem 4.1.2] entraîne alors $V(R) = X(R)$. En particulier, $X(R)$ est une variété de Nash affine sur R . De plus, l'application $f(R)$ est une submersion de Nash propre : c'est une submersion car $V(R) = X(R)$ et elle est propre car le morphisme f_R est propre.

Comme l'ouvert $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ contient 0, il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que l'intervalle ouvert $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ soit contenu dans $U(\mathbb{R})$. Si $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ est le complémentaire de U , l'application $Y(\mathbb{R}) \rightarrow Y(R)$ est bijective (c'est un cas très facile du théorème d'homomorphisme d'Artin–Lang). On en déduit que l'élément $t \in R = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1(R)$ appartient à $U(R)$ et que l'intervalle ouvert $(-\epsilon, \epsilon) \subset R$ est contenu dans $U(R)$. Le morphisme $\eta: \text{Spec}(R) \rightarrow U$ se factorise par le morphisme $\text{Spec}(R) \rightarrow U_R$ correspondant à l'élément $t \in U(R)$. Comme $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et t est infinitésimal, on a $-\epsilon < t < \epsilon$. L'intervalle $(-\epsilon, \epsilon) \subset R$ étant Nash-difféomorphe à R , le théorème 1.2 entraîne alors que $X_0(R)$ et $X_\eta(R)$ sont Nash-difféomorphes entre eux, comme voulu. \square

1.2. Deuxième preuve du théorème 1.1. Le théorème 1.1 est un cas particulier du théorème suivant, qui est une légère extension de [Sch94, Corollaire 17.20 (a)]. Pour tout schéma X , on note par X_r son spectre réel, avec la topologie engendrée par les domaines de positivité [Sch94, (0.4.1)-(0.4.2)], et on écrit X_{ret} pour son site étale réel [Sch94, Définition 1.2.1], qui est la catégorie Et/X des X -schémas étales avec les recouvrements donnés par les morphismes réels surjectifs au sens de [Sch94, Définition (1.1)], c'est-à-dire les collections de morphismes $\{f_i: U_i \rightarrow U\}$ dans Et/X telles que U_r soit la réunion des $f_{ir}(U_{ir})$. D'après [Sch94, Theorem 1.3], les topoi associés à X_r et X_{ret} sont naturellement équivalents entre eux. Par définition, un faisceau abélien \mathcal{F} sur X_r est dit constructible si X_r est la réunion d'un nombre fini de $K_i \subset X_r$ constructibles tels que $\mathcal{F}|_{K_i}$ soit localement constant avec fibres de type fini ; voir [Sch94, Définition (A.3)].

Théorème 1.3. *Soit R un corps réel clos et soit $f: X \rightarrow U$ un morphisme propre de R -variétés. Supposons ce morphisme lisse en tout $x \in X(R)$. Soit \mathcal{F} un faisceau*

abélien constructible localement constant sur X_r . Alors, pour tout $n \geq 0$, le faisceau $R^n f_{r*} \mathcal{F}$ est constructible et localement constant sur U_r .

Démonstration. Soient η et ξ deux points de U tels que ξ soit une spécialisation de η et soit \mathcal{G} un faisceau sur U_r . On note par \mathcal{G}_ξ et \mathcal{G}_η les fibres de \mathcal{G} en ξ et η , respectivement. Soit $V \subset U_r$ un voisinage ouvert de ξ . Alors V contient η et on dispose donc d'une application naturelle $\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{G}_\eta$. Par passage à la limite inductive en V , on obtient une flèche canonique

$$\text{cosp}_{\eta \rightsquigarrow \xi} : \mathcal{G}_\xi \rightarrow \mathcal{G}_\eta$$

qui est dite application de cospécialisation; voir [Sch94, (5) p. 203] et [SGA4II, Chapitre VIII, 7.7]. Par construction, pour tout voisinage ouvert V de ξ et tout voisinage ouvert W de η contenu dans V , on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_\xi & \xrightarrow{\text{cosp}_{\eta \rightsquigarrow \xi}} & \mathcal{G}_\eta. \end{array}$$

On revient à la preuve du théorème 1.3. Si le morphisme propre f était lisse, l'énoncé suivrait de [Sch94, Corollaire 17.20 (a)]. On adapte le même argument au cas général. Par [Sch94, Theorem 17.7], pour tout $n \geq 0$ le faisceau $R^n f_{r*} \mathcal{F}$ est constructible. Par conséquent, il suffit de montrer que pour toute spécialisation $\eta \rightsquigarrow \xi$ dans U_r , les applications de cospécialisation

$$\text{cosp}_{\eta \rightsquigarrow \xi} : (R^n f_{r*} \mathcal{F})_\xi \rightarrow (R^n f_{r*} \mathcal{F})_\eta$$

sont des isomorphismes. On peut remplacer U par la clôture schématique de $\{\eta\}$ et donc se réduire au cas où U est intègre avec point générique η .

Soit B l'enveloppe convexe de l'anneau local $O_{U,\xi}$ dans une clôture réelle R' du corps des fractions de U ; donc B est un anneau de valuation réel clos au sens de [Sch94, (1.5)]. L'espace topologique $\text{Spec}(B)$ est ordonné linéairement par la relation de spécialisation; on montre qu'il est fini. Soit $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m$ une chaîne d'idéaux premiers de B de longueur m , soit $x_i \in p_i \setminus p_{i-1}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et soit $C \subset B$ la sous- R -algèbre de B engendrée par les x_i . Les idéaux $p_i \cap C$ forment une chaîne d'idéaux premiers de C de longueur m et donc $m \leq \dim(C)$. Comme C est de type fini sur R , par le théorème de la dimension $\dim(C) = \text{tr}_R(\text{Frac}(C)) \leq \text{tr}_R(R')$, où tr est le degré de transcendance. On conclut que $m \leq \text{tr}_R(R')$ et donc que l'ensemble sous-jacent à $\text{Spec}(B)$ est fini. En particulier, le point générique de $\text{Spec}(B)$ est ouvert.

Le morphisme composé $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(O_{U,\xi}) \rightarrow U$ envoie le point générique de $\text{Spec}(B)$ vers η et le point fermé de $\text{Spec}(B)$ vers ξ . Comme le morphisme f est propre et de présentation finie, par le théorème de changement de base propre pour la topologie réelle étale [Sch94, Theorem 16.2 (a), $t = \text{ret}$] on peut remplacer U par $\text{Spec}(B)$. Donc $U = \text{Spec}(B)$, où B est un anneau de valuation réel clos, η est le point générique de U et ξ est le point fermé de U . On observe que U (et donc X) n'est plus une R -variété en général.

Soit $g: \eta \rightarrow U$ l'immersion ouverte donnée par l'inclusion du point générique de U et soit X_η la fibre générique de f , de sorte que l'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow f_\eta & & \downarrow f \\ \eta & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. Le diagramme commutatif (1.1) pour $\mathcal{G} = R^n f_* \mathcal{F}$, $V = U$ et $W = \{\eta\}$ prend la forme

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_r, \mathcal{F}) & \xrightarrow{h_r^*} & H^n(X_{\eta r}, h_r^* \mathcal{F}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (R^n f_{r*} \mathcal{F})_\xi & \xrightarrow{\text{cosp}_{\eta \rightsquigarrow \xi}} & (R^n f_{r*} \mathcal{F})_\eta. \end{array}$$

Ici la flèche du haut coïncide avec l'application induite par l'immersion ouverte h_r . La flèche verticale de gauche est un isomorphisme car U_r (resp. $\{\eta\}$) est le plus petit ouvert de U_r contenant ξ (resp. η). (On rappelle que d'après [Sch94, (1.5)], l'espace topologique sous-jacent au schéma U est homéomorphe à U_r .)

Il suffit donc de montrer que l'application $h_r^*: H^n(X_r, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_{\eta r}, h_r^* \mathcal{F})$ est un isomorphisme. Cette application est un homomorphisme de coin dans la suite spectrale de Leray pour le morphisme $h_r: X_{\eta r} \rightarrow X_r$ et le faisceau $h_r^* \mathcal{F}$ sur $X_{\eta r}$:

$$E_2^{pq} := H^p(X_r, R^q h_{r*} h_r^* \mathcal{F}) \implies H^{p+q}(X_{\eta r}, h_r^* \mathcal{F}).$$

Il suffit alors de prouver que la flèche canonique $\mathcal{F} \rightarrow h_{r*} h_r^* \mathcal{F}$ est un isomorphisme et que $R^q h_{r*} h_r^* \mathcal{F} = 0$ pour tout $q \geq 1$. Ces deux assertions sont locales sur X_r par rapport à sa topologie réelle. Soit $(P, \alpha) \in X_r$ un point, c'est-à-dire que l'on a un point schématique $P \in X$ et un ordre α sur le corps résiduel de P . Les hypothèses entraînent que le morphisme f est lisse en P . Pour montrer que les deux assertions sont satisfaites au voisinage de P , on peut alors remplacer X par l'ouvert maximal de lissité de f . Donc, renonçant ainsi à la propriété de f , on peut supposer que le morphisme f est lisse.

Remplaçant X par un recouvrement $X' \rightarrow X$ dans X_{ret} (c'est-à-dire, un morphisme étale tel que le morphisme induit $X'_r \rightarrow X_r$ soit surjectif tel que $\mathcal{F}|_{X'}$ soit constant, on se réduit au cas où \mathcal{F} est constant de fibre un groupe abélien de type fini M . Alors

$$R^q h_{r*} h_r^* \mathcal{F} = R^q h_{r*} M = R^q h_{r*} f_{\eta r}^* M \xleftarrow{\sim} f_r^* R^q g_{r*} M,$$

le dernier isomorphisme étant donné par le théorème de changement de base lisse pour la topologie $t = ret$; voir [Sch94, Theorem 16.11]. Pour appliquer ce théorème, il faut rappeler que, pour tout schéma S , tout faisceau abélien sur S_{ret} est admissible [Sch94, Definition 16.4.1 (a)]. Comme u_0 est le spectre d'un corps réel clos, le foncteur g_{r*} est exact : si $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un morphisme surjectif de faisceaux sur u_0 , alors comme u_0 n'admet pas de recouvrement non trivial dans $(u_0)_{ret}$, le morphisme $\mathcal{F}_1(u_0) \rightarrow \mathcal{F}_2(u_0)$ des sections globales est surjectif, c'est-à-dire, $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est surjectif en tant que morphisme de préfaisceaux, et donc il en est de même pour le morphisme $g_{r*} \mathcal{F}_1 \rightarrow g_{r*} \mathcal{F}_2$. Puisque $g_{r*} M$ est le faisceau constant M sur U_r , ceci achève la démonstration. \square

Deuxième démonstration du théorème 1.1. Soit m_0 (resp. m_η) le nombre de composantes connexes semi-algébriques de X_0 (resp. X_η). Le théorème 1.3 et le théorème de changement de base propre [Sch94, Theorem 16.2 ($t = ret$)], appliqués au faisceau constant $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_{X_r}$ et $n = 0$, donnent un isomorphisme entre $H^0(X_{0r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{m_0}$ et $H^0(X_{\eta r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{m_\eta}$, ce qui entraîne $m_0 = m_\eta$. \square

1.3. Invariance birationnelle du nombre de composantes semi-algébriques connexes. Pour calculer le nombre de composantes connexes de certaines variétés singulières, le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 1.4. *Soit R un corps réel clos. Le nombre de composantes semi-algébriquement connexes de $X(R)$ est un invariant birationnel des R -variétés projectives intègres X telles que $X(R)$ soit contenu dans le lieu lisse de X .*

Démonstration. L'invariance birationnelle du nombre de composantes semi-algébriquement connexes des R -points des R -variétés projectives lisses est un fait classique [DK81b, §13], [BCR98, Theorem 3.4.12]. Il suffit donc de montrer que, pour toute R -variété projective intègre X telle que $X(R)$ soit contenu dans le lieu lisse de X , il existe une variété projective lisse X' , birationnelle à X , telle que $X(R)$ et $X'(R)$ aient le même nombre de composantes semi-algébriquement connexes. D'après Hironaka, il existe une variété projective lisse X' et un morphisme projectif birationnel $X' \rightarrow X$ qui est un isomorphisme au-dessus du lieu lisse de X . Comme le lieu lisse de X contient $X(R)$, on déduit que $X(R)$ et $X'(R)$ sont semi-algébriquement isomorphes, et donc ils ont le même nombre de composantes semi-algébriquement connexes, comme voulu. \square

Remarque 1.5. Soient R un corps réel clos et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fermé ou ouvert d'espaces semi-algébriques sur R . Supposons que pour tout $y \in Y$ la fibre $f^{-1}(y)$ est semi-algébriquement connexe. Si Y est semi-algébriquement connexe, alors X l'est aussi d'après [Sch24, Exercice 4.4.1(a)]. Plus généralement, si Y_1, \dots, Y_r sont les composantes semi-algébriquement connexes de Y et, pour tout $i = 1, \dots, r$, on pose $X_i := f^{-1}(Y_i)$, alors X_1, \dots, X_r sont les composantes semi-algébriquement connexes de X .

2. LA MÉTHODE DE SPÉCIALISATION REVISITÉE, I

2.1. Sur un corps quelconque. La méthode suivie est une variante de la méthode de spécialisation sur un corps quelconque, sous la forme développée dans [CTP16, §1].

Situation 2.1. Soit L/k une extension de corps de caractéristique zéro, soit Y une k -variété propre et géométriquement intègre, soit $S \subset Y$ le lieu singulier de Y (avec structure réduite), soit $U := Y \setminus S$ l'ouvert complémentaire de S et soit $b \in U(k)$. Soient Z une k -variété propre lisse géométriquement connexe et $p: Z \rightarrow Y$ un k -morphisme propre birationnel tel que la restriction $p^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme. (Comme le corps k est de caractéristique zéro, un tel morphisme existe d'après le théorème d'Hironaka.) Soit $T := p^{-1}(S) \subset Z$. Notons $E := k(Y) = k(Z)$ et $E' := L(Y) = L(Z) \cong E \otimes_k L$. Soit

$$(2.1) \quad \Phi: CH_0(Z_E)/N_{E'/E}(CH_0(Z_{E'})) \rightarrow CH_0(Y_E)/N_{E'/E}(CH_0(Y_{E'}))$$

l'application induite par le morphisme propre p .

Proposition 2.2. *On se place dans la situation 2.1. Soit G_k le groupe de Galois absolu de k et soit M un G_k -module discret de torsion. Supposons :*

(i) *L'application Φ de (2.1) est injective.*

(ii) *L'application*

$$\text{Ker}[H^i(k, M) \rightarrow H^i(L, M)] \rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^i(k(Y)/k, M) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(L(Y)/L, M)]$$

n'est pas surjective.

Alors la différence entre le point générique de Y et le point $b_{k(Y)}$ définit une classe non nulle dans $A_0(Y_{k(Y)}) \subset CH_0(Y_{k(Y)})$.

Démonstration. L'application Φ envoie la classe du point générique de Z (vu comme E -point de Z_E) sur celle du point générique de Y (vu comme E -point de Y_E). Grâce à l'hypothèse (ii), il existe $\alpha \in \text{Ker}[H_{\text{nr}}^i(E/k, M) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(E'/L, M)]$ non nul, mais nul au point b' image inverse de b par $p: Z \rightarrow Y$. D'après Merkurjev [Mer08, Corollary 2.9] (cf. [Sch21, Corollary 5.2]), on dispose de l'accouplement

$$CH_0(Z_E)/N_{E'/E}(CH_0(Z_{E'})) \times \text{Ker}[H_{\text{nr}}^i(E/k, M) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(E'/L, M)] \rightarrow H^i(E, M)$$

qui associe au point générique de Z (respectivement, au point $b'_E := b' \times_k E$) et à la classe α l'élément $\alpha \in H^i(E, M)$ (respectivement, zéro, par le choix de la classe α). Ainsi la différence entre le point générique de Z et le point constant b'_E définit une classe non triviale dans $CH_0(Z_E)/N_{E'/E}(CH_0(Z_{E'}))$. D'après l'hypothèse (i), on en déduit que la différence entre le point générique de Y (vu comme E -point de Y_E) et le point $b_E := b \times_k E$ définit une classe de degré zéro qui est non nulle dans $CH_0(Y_E)/N_{E'/E}(CH_0(Y_{E'}))$, et a fortiori dans $CH_0(Y_E)$. \square

Le théorème suivant est dans l'esprit de [CTP16, Théorème 1.14].

Théorème 2.3. *On se place dans la situation 2.1. Soit A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k , soit K son corps des fractions, soit $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(A)$ un A -schéma projectif, fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres, tel que $\mathcal{X} \times_A k \cong Y$, soit X la fibre générique de π et soit σ une section de π qui induit un k -point lisse b sur Y . Soit M un G_k -module discret, de torsion, et soit $i \geq 0$ un entier. Supposons :*

(i) *L'application Φ de (2.1) est injective.*

(ii) *L'application*

$$\text{Ker}[H^i(k, M) \rightarrow H^i(L, M)] \rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^i(k(Y)/k, M) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(L(Y)/L, M)]$$

n'est pas surjective.

Alors le groupe $A_0(X \times_K K(X))$ est non nul, en d'autres termes, la K -variété X n'est pas CH_0 -triviale.

Démonstration. On suit la stratégie de la preuve de [CTP16, Théorème 1.12]. Soit η le point générique de Y et soit $B := O_{\mathcal{X}, \eta}$ son anneau local, qui est de dimension 1. Comme la fibre Y est géométriquement intègre, l'idéal maximal de B est engendré par l'image ν d'une uniformisante de A . Comme π est fidèlement plat, ν n'est pas diviseur de zéro, et donc B est un anneau de valuation discrète de corps des fractions le corps des fonctions $K(X)$ de X et de corps résiduel le corps des fonctions $k(Y)$ de Y . On considère le B -schéma $\mathcal{X} \times_A B$. Sa fibre générique est $X \times_{K(X)}$ et sa fibre spéciale est $Y_{k(Y)}$.

On a un homomorphisme de spécialisation $CH_0(X \times_{K(X)}) \rightarrow CH_0(Y_{k(Y)})$ qui envoie le point générique de X sur le point générique de Y et le point $\sigma(K)_{K(X)}$ sur $b_{k(Y)}$; voir [Ful75] et [Ful98, §20.3].

D'après la proposition 2.2, la classe du point générique de Y dans $CH_0(Y_{k(Y)})$ n'est pas égale à celle de $b_{k(Y)}$, et donc $A_0(X \times_{K(X)}) \neq 0$. \square

On donne une condition suffisante pour l'injectivité de Φ qui suffira pour tous les exemples de la section 3. Une autre condition suffisante sera donnée dans le lemme 4.1 et sera utilisée pour les exemples de la section 5.

Lemme 2.4. *On se place dans la situation 2.1. Si le morphisme $S \rightarrow \text{Spec}(k)$ se factorise par $\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(k)$, alors l'application Φ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 CH_0(T_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(Z_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(p^{-1}(U)_{E'}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow N_{E'/E} & & \downarrow N_{E'/E} & & \downarrow N_{E'/E} & & \\
 CH_0(T_E) & \longrightarrow & CH_0(Z_E) & \longrightarrow & CH_0(p^{-1}(U)_E) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow p_* & \wr p_* & \downarrow p_* & \wr p_* & \wr p_* & & \\
 CH_0(S_E) & \longrightarrow & CH_0(Y_E) & \longrightarrow & CH_0(U_E) & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow N_{E'/E} & & \uparrow N_{E'/E} & & \uparrow N_{E'/E} & & \\
 CH_0(S_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(Y_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(U_{E'}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les suites exactes horizontales proviennent de la suite de localisation, et où on écrit $N_{E'/E}$ pour les applications normes.

Par hypothèse, le k -schéma S admet une structure de L -schéma. Comme le corps k est de caractéristique zéro, l'inclusion diagonale $L \rightarrow L \otimes_k L$ est scindée, et donc la projection de L -schémas $S \times_k L = S \times_L (L \otimes_k L) \rightarrow S$ admet une section. Ainsi la flèche norme $N_{E'/E}: CH_0(S_{E'}) \rightarrow CH_0(S_E)$ est surjective. Comme T admet un morphisme vers S , il admet aussi une structure de L -schéma, et le même argument montre que la flèche norme $N_{E'/E}: CH_0(T_{E'}) \rightarrow CH_0(T_E)$ est surjective. On déduit alors du diagramme ci-dessus que l'application Φ est un isomorphisme. \square

3. VARIÉTÉS PROJECTIVES ET LISSES NON STABLEMENT RATIONNELLES SUR LE CORPS \mathbb{R} DES SÉRIES DE PUISEUX RÉELLES DONT L'ESPACE DES \mathbb{R} -POINTS EST SEMI-ALGÈBRIQUEMENT CONNEXE

Théorème 3.1. *Soit Y une \mathbb{R} -variété projective et géométriquement intègre. Soit $S \subset Y$ le lieu singulier de Y , avec structure réduite. Supposons :*

- (a) *L'ensemble $Y(\mathbb{R})$ des points réels est contenu dans le lieu lisse de Y .*
- (b) *L'espace topologique $Y(\mathbb{R})$ est connexe.*
- (c) *Le morphisme $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{R})$ se factorise par $\text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{R})$.*
- (d) *L'application*

$$\text{Br}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}_{\text{nr}}(\mathbb{R}(Y)/\mathbb{R}) \rightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C})]$$

n'est pas surjective.

Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$, soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ un voisinage Zariski de 0, soit $f: \mathcal{X} \rightarrow U$ un morphisme projectif de \mathbb{R} -variétés, à fibre générique lisse, tel que $\mathcal{X}|_{t=0} \cong Y$. Alors, si $\eta: \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ est le morphisme correspondant à l'inclusion $\mathbb{R}[t] \subset R$, la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété projective lisse $X := \mathcal{X} \times_{U, \eta} \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ satisfait les propriétés suivantes.

- (i) L'espace semi-algébrique $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.
- (ii) La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X n'est pas CH_0 -triviale, et en particulier n'est pas stablement rationnelle.

Démonstration. (i) Ceci suit du théorème 1.1 et des propriétés (a) et (b).

(ii) Si la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X est CH_0 -triviale, alors il existe un entier $n > 0$ tel que la variété $\mathcal{X} \times_U \mathbb{R}((t^{1/n}))$ sur le corps $\mathbb{R}((t^{1/n}))$ soit CH_0 -triviale. Ceci résulte de la forme “décomposition de la diagonale” de la CH_0 -trivialité [CTP16, Proposition 1.4]. Pour montrer (ii), il suffit donc de prouver que pour tout $n \geq 1$ la variété $\mathcal{X} \times_U \mathbb{R}((t^{1/n}))$ n'est pas CH_0 -triviale.

Soit $n \geq 1$ un entier, soit $A := \mathbb{R}[[t^{1/n}]]$ et soit $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_U A$, où le produit fibré est pris par rapport au morphisme évident $\text{Spec}(A) \rightarrow U$. La fibre spéciale du morphisme naturel $\pi: \mathcal{X}' \rightarrow \text{Spec}(A)$ est isomorphe à Y . D'après (a) et (b), il existe un \mathbb{R} -point lisse $y \in Y(\mathbb{R})$, qui se relève en une section σ de π d'après le lemme de Hensel. Ceci, les propriétés (c) et (d) et le lemme 2.4 nous garantissent que π satisfait les hypothèses (i) et (ii) (avec $i = 2$ et $M = \mu_2$) du théorème 2.3, ce qui entraîne que la fibre générique $(\mathcal{X}')_{\mathbb{R}((t^{1/n}))} \cong \mathcal{X}_{\mathbb{R}((t^{1/n}))}$ n'est pas CH_0 -triviale, comme voulu. \square

Ce théorème va nous permettre de construire des exemples projectifs et lisses X sur $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ en partant d'exemples projectifs singuliers Y sur \mathbb{R} . Les trois premiers exemples singuliers avaient été construits dans [CTP24].

3.1. Fibrations en surfaces quadriques sur la droite projective dont toutes les fibres géométriques sont intègres. Soit $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Proj}(\mathbb{R}[u_0, u_1])$, vu comme recollement de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnée $u := u_0/u_1$ et de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnée $v := u_0/u_1$ au moyen du changement de variable $u = 1/v$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Soit Y le recollement de la sous-variété de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnées $(a, b, c, d; u)$ donnée par l'équation

$$a^2 + (1 + u^2)b^2 - u(c^2 + d^2) = 0.$$

avec la sous-variété de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnées $(a', b', c', d'; v)$ donnée par l'équation

$$a'^2 + (1 + v^2)b'^2 - v(c'^2 + d'^2) = 0$$

au moyen du changement de variable

$$(a', b', c', d'; v) = (a/u, b, c, d; 1/u).$$

On a un morphisme surjectif $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ donné par $(u_0 : u_1)$.

Lemme 3.2. *Soit $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ la fibration en surfaces quadriques définie ci-dessus. Alors Y satisfait les propriétés (a)-(d) du théorème 3.1.*

Démonstration. Les propriétés (a) et (c) se vérifient en calculant explicitement le lieu singulier de Y , qui est formé d'un nombre fini de points dont aucun n'est réel. Pour montrer (b) (la connexité), il suffit de noter que l'application $Y(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a pour image $[0, \infty]$, qui est connexe, et que pour tout $s \in [0, \infty]$ la fibre en s est connexe : pour $0 < s < \infty$, les points réels des fibres sont des quadriques

connexes, et pour $s = 0, \infty$, ce sont des droites projectives. Pour (d), il suffit de rappeler que, d'après [CTP24, Proposition 11.1], l'image de la classe de quaternions $(-1, u) \in \text{Br}(\mathbb{R}(u)) = \text{Br}(\mathbb{R}(\mathbb{P}^1))$ dans $\text{Br}(\mathbb{R}(Y))$ est non ramifiée, s'annule dans $\text{Br}(Z_C)$, et n'est pas dans l'image de $\text{Br}(\mathbb{R})$. \square

Soit $P(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 \in \mathbb{R}[u]$, avec $a_0a_2 \neq 0$. On considère le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^3 \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{A}_{\mathbb{R}[t]}^1$ avec coordonnées $(a, b, c, d; u)$ donné par l'équation

$$a^2 + (1 + u^2)b^2 + (tP(u) - u)c^2 - ud^2 = 0.$$

On recolte ce schéma avec le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^3 \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{A}_{\mathbb{R}[t]}^1$ avec coordonnées $(a', b', c', d'; v)$ donné par l'équation

$$a'^2 + (1 + v^2)b'^2 + (tQ(v) - v)c'^2 - vd'^2 = 0,$$

où $Q(v) := v^2P(1/v) = a_0v^2 + a_1v + a_2$, via le changement de variables

$$(a', b', c', d'; v) = (a/u, b, c, d; 1/u).$$

On obtient une fibration en quadriques $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^1$. La fibre spéciale en $t = 0$ est la \mathbb{R} -variété Y . La fibre générique sur le corps $\mathbb{R}(t)$ est une variété projective lisse munie d'une fibration en quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}(t)}^1$ dont toutes les fibres géométriques sont intègres.

Le théorème 3.1 et le lemme 3.2 donnent maintenant :

Théorème 3.3. *Soit $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^1$ le morphisme défini ci-dessus. La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\}$ est une variété projective lisse fibrée en surfaces quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$ à fibres géométriques intègres. Elle n'est pas CH_0 -triviale et donc n'est pas stablement rationnelle. L'espace $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.*

Soit R un corps réel clos. Dans [CTP24] et [BP24] on a étudié des fibrations en surfaces quadriques $X' \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ d'équation affine

$$(3.1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = up(u)$$

avec $p(u) \in R[u]$ un polynôme séparable. Si $p(u)$ est strictement positif sur R , l'espace $X'(R)$ est semi-algébriquement connexe.

Proposition 3.4. *La fibre générique de la fibration $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$ de la proposition 3.3 n'est isomorphe à la fibre générique d'aucune fibration $X' \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$ de modèle affine (3.1).*

Démonstration. Soient plus généralement k un corps de caractéristique différente de 2 et $p: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ une fibration en surfaces quadriques dont toutes les fibres géométriques sont intègres. On suppose qu'il existe au moins une fibre géométrique singulière. À une telle fibration on associe le revêtement discriminant $\Delta \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. La courbe Δ est projective et lisse, et munie d'une classe $\alpha \in \text{Br}(\Delta)$ qui est obtenue de la façon suivante. On prend une section lisse quelconque de la quadrique générique sur $k(\mathbb{P}^1)$ et on l'étend au corps $k(\Delta)$. On obtient alors une quadrique sur $k(\Delta)$ définie par une forme quadratique $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$. La classe α est la classe de l'algèbre de quaternions $(a, b) \in \text{Br}(k(\Delta))$. Pour plus de détails, on consultera [CTS93, Théorème 2.5]. L'hypothèse sur les fibres singulières assure que l'on a $\alpha \in \text{Br}(\Delta)$. Pour les familles $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ considérées dans [CTP24] et [BP24], la classe α est dans l'image de $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(\Delta)$. De fait, pour une fibration d'équation affine $x^2 + y^2 + t^2 = P(u)$, avec $P(u) \in k[u]$, la classe $\alpha \in \text{Br}(k(\Delta))$ est l'image de $(-1, -1) \in \text{Br}(k)$.

Soit $R = \mathbb{R}\{\{t\}\}$. Dans le cas considéré au théorème 3.3, avec $k = R$, la courbe Δ est définie sur R par l'équation

$$w^2 = (1 + u^2)(-tuP(u) + u^2).$$

On prend la section de la quadrique générique donnée par $c = 0$. La classe $\alpha \in \text{Br}(\Delta)$ est donc l'image de $(u, -(1 + u^2)) = (-1, u) \in \text{Br}(R(\mathbb{P}^1))$ dans $\text{Br}(R(\Delta))$. En un point $A \in \Delta(\mathbb{R}) \subset \Delta(R)$ avec $u > 0$, on a $\alpha(A) = 0$. En un point $B \in \Delta(\mathbb{R}) \subset \Delta(R)$ avec $u < 0$ on a $\alpha(B) \neq 0$. Ainsi α n'est pas dans l'image de $\text{Br}(R)$. \square

3.2. Intersections complètes lisses de deux quadriques dans \mathbb{P}^5 . Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ avec coordonnées homogènes a, b, c, d, e, f . La variété du paragraphe 3.1 contient l'ouvert affine défini par l'équation

$$a^2 + 1 + u^2 - u(c^2 + d^2) = 0,$$

ou encore le système de deux équations affines

$$\begin{aligned} a^2 + 1 + u^2 - uv &= 0, \\ c^2 + d^2 - v &= 0. \end{aligned}$$

En changeant les notations, on voit que la variété ainsi définie est birationnelle à l'intersection de deux quadriques $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ donnée par les équations homogènes

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - cd &= 0, \\ e^2 + f^2 - bd &= 0. \end{aligned}$$

Notons que $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ ne contient pas de droite réelle : en effet la section de Y par $d = 0$ est donnée par $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 + f^2 = 0$ et donc ne contient pas de point réel. (Cette remarque ne sera pas utilisée dans la suite.)

Lemme 3.5. *Soit $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ l'intersection de deux quadriques définies ci-dessus. Alors Y satisfait les propriétés (a)-(d) du théorème 3.1.*

Démonstration. Le lieu singulier de Y est formé des 4 points non réels donnés par

$$(a, b, c, d, e, f) = (\pm i, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, \pm i, 1).$$

Ceci entraîne (a) et (c). Comme Y est birationnelle à la variété du paragraphe 3.1, la propriété (b) suit des lemmes 1.4 et 3.2, et la propriété (d) suit du lemme 3.2. \square

Soient q_1, q_2 deux formes quadratiques sur \mathbb{R} en les 6 variables (a, b, c, d, e, f) . Supposons que le système $q_1 = q_2 = 0$ définisse une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$. On sait qu'il suffit pour cela que le déterminant $\det(q_1 + tq_2)$ soit un polynôme séparable de degré 6.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^5$ défini par le système

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - cd + tq_1 &= 0, \\ e^2 + f^2 - bd + tq_2 &= 0. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{X}|_{t=0} = Y$ et la fibre générique sur $\mathbb{R}(t)$ est une intersection complète lisse de deux quadriques. Le théorème 3.1 et le lemme 3.5 donnent ici :

Théorème 3.6. *La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété $X = \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\}$ est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^5$ qui n'est pas CH_0 -triviale, et donc n'est pas stablement rationnelle. L'espace $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.*

Remarque 3.7. On ne peut envisager une extension simple de l'argument ci-dessus aux intersections de deux quadriques en dimension supérieure. On sait en effet que sur tout corps k de caractéristique zéro, pour toute variété Y intersection complète géométriquement intègre non conique de deux quadriques dans \mathbb{P}_k^n avec $n \geq 6$, et tout modèle projectif et lisse Z de Y , l'application $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(Z)$ est surjective [CTSSD87, Theorem 3.8]. Par ailleurs, Hassett, Kollár et Tschinkel [HKT22] ont montré que toute intersection complète lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^6$ est \mathbb{R} -rationnelle dès que $X(\mathbb{R})$ est connexe. On vérifie que leur démonstration vaut sur tout corps réel clos R .

3.3. Hypersurfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}^4 . La variété X de §3.1 est \mathbb{R} -birationnelle à l'hypersurface cubique singulière $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$, géométriquement intègre, définie par l'équation

$$(3.2) \quad b(a^2 + b^2 + c^2) - c(d^2 + e^2) = 0$$

en coordonnées homogènes a, b, c, d, e .

Lemme 3.8. *L'hypersurface cubique singulière $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ définie ci-dessus satisfait les hypothèses (a)-(d) du théorème 3.1.*

Démonstration. Le lieu singulier de Y est formé des 4 points non réels donnés par

$$(a, b, c, d, e) = (\pm i, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, \pm i, 1).$$

Ceci entraîne (a) et (c). Comme Y est birationnelle à la variété du paragraphe 3.1, la propriété (b) suit des lemmes 1.4 et 3.2, et la propriété (d) suit du lemme 3.2. \square

Soit $g(a, b, c, d, e)$ une forme cubique non singulière. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^4$ le schéma défini par l'équation

$$b(a^2 + b^2 + c^2) - c(d^2 + e^2) - tg(a, b, c, d, e) = 0.$$

On a $\mathcal{X}|_{t=0} = Y$. Le théorème 3.1 et le lemme 3.8 donnent ici :

Théorème 3.9. *La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\}$ est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^4$ qui n'est pas CH_0 -triviale, et donc n'est pas stablement rationnelle. L'espace $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.*

Remarque 3.10. Pour les hypersurfaces cubiques singulières sur \mathbb{R} , des résultats de non-rationnalité ont été obtenus par Cheltsov, Tschinkel et Zhang [CTZ24].

3.4. Certaines fibrations en coniques sur \mathbb{P}^2 . Soit R un corps réel clos et soit C sa clôture algébrique. Dans [BW20c], Benoist et Wittenberg considèrent les solides lisses X fibrés en coniques sur \mathbb{P}_R^2 , donnés par des équations (voir ci-dessous des explications sur la notation)

$$s^2 + v^2 = f(x, y, z)$$

avec f une forme homogène de degré 4, positive, définissant une courbe lisse dans \mathbb{P}_R^2 . Pour tout solide X de cette forme, $X(R)$ est semi-algébriquement connexe (cf. remarque 1.5) et X_C est C -rationnel. Benoist et Wittenberg montrent que X n'est pas R -rationnel ; voir [BW20c, Corollary 3.6]. Nous allons montrer qu'il existe de tels solides lisses X sur le corps $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ qui ne sont pas CH_0 -triviaux, donc ne sont pas stablement rationnels, et pour lesquels $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe, et qui sont géométriquement rationnels.

Soit A un anneau, soit $S := \mathbb{P}_A^2$, soit $d \geq 0$ un entier et soit $F \in H^0(S, \mathcal{O}(2d))$ une section avec lieu d'annulation $C \subset S$. Soit $\mathbb{P} := \mathbb{P}_S(\mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O})$ et soit $p: \mathbb{P} \rightarrow S$ le morphisme de projection. D'après [Har77, Chapter 2, Proposition 7.11 (a)] on a un isomorphisme

$$p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \simeq \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}$$

et on définit $u \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ comme l'image de la section $1 \in A = H^0(S, \mathcal{O})$. La formule de projection nous donne un isomorphisme

$$p_*(p^*\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(d),$$

et on définit $s, v \in H^0(\mathbb{P}, p^*\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$ comme les images de $1 \in H^0(S, \mathcal{O})$, vu comme premier et deuxième facteur, respectivement. Les sections s^2, v^2 et u^2F appartiennent alors à $H^0(\mathbb{P}, p^*\mathcal{O}(2d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2))$, et on pose

$$Q_{A,F} := \{s^2 + v^2 = u^2F\} \subset \mathbb{P}.$$

Lemme 3.11. *Soient $q_1, q_2 \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{O}(2))$ deux formes quadratiques positives telles que les coniques lisses $q_1 = 0$ et $q_2 = 0$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ soient transverses. Soit $Y := Q_{\mathbb{R}, q_1 q_2}$ et soit $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ le morphisme de projection. Alors Y satisfait les propriétés (a)-(d) du théorème 3.1.*

Démonstration. Le lieu singulier de Y est donné par l'équation $q_1 = q_2 = s = v = 0$ et donc consiste en un nombre fini de points fermés non réels. Ceci montre (a) et (c).

L'application $Y(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est surjective et ses fibres sont connexes. Ainsi $Y(\mathbb{R})$ est connexe. Ceci donne (b).

Montrons (d). La \mathbb{C} -variété $Y_{\mathbb{C}}$ étant birationnelle à $s'v' = q_1q_2$, elle est rationnelle. Donc $Z_{\mathbb{C}}$ est aussi rationnelle et en particulier $\text{Br}(Z_{\mathbb{C}}) = 0$.

Soient $h \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{O}(1))$ et $p_i := q_i/h^2 \in \mathbb{R}(\mathbb{P}^2)$ pour $i = 1, 2$. Soit

$$\alpha := (-1, p_1) \in H^2(\mathbb{R}(\mathbb{P}^2), \mathbb{Z}/2).$$

Par un calcul de résidus sur $q_1 = 0$ et $q_2 = 0$, on vérifie que cette classe ne provient pas d'une classe dans $\text{Br}(\mathbb{R})$, et qu'elle n'est pas égale à la classe $(-1, p_1p_2)$. Puisque le noyau de l'application $H^2(\mathbb{R}(\mathbb{P}^2), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}(Z), \mathbb{Z}/2)$ est engendré par la classe $(-1, p_1p_2)$, on déduit que l'image β de α dans $H^2(\mathbb{R}(Z), \mathbb{Z}/2)$ n'est pas nulle. Puisque Z est lisse, pour montrer que l'on a

$$\beta \in \text{Br}(Z)[2] \subset H^2(\mathbb{R}(Z), \mathbb{Z}/2),$$

il suffit de montrer que β est non ramifiée [CT95, Proposition 4.2.3(a)].

Soit w une valuation discrète de $\mathbb{R}(Y) = \mathbb{R}(Z)$, soit $\kappa(w)$ son corps résiduel et soit c_w le centre de w sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. On voit que si c_w n'est pas sur la conique $q_1 = 0$, alors le résidu de β est nul. Si c_w est le point générique de $q_1 = 0$ et $w(p_1)$ est pair, alors le résidu de β est nul. Si c_w est le point générique de $q_1 = 0$ et $w(p_1)$ est impair, alors on vérifie sur l'équation que -1 est un carré dans $\kappa(w)$. Si c_w est un point fermé, alors $\kappa(w) = \mathbb{C}$, car la conique n'a pas de point réel, et -1 est encore un carré dans $\kappa(w)$. \square

Soit $f = f(x, y, z)$ un polynôme homogène réel de degré 4 définissant une courbe lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ et soit $F := q_1q_2 + tf \in H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2[t], \mathcal{O}(4))$. Soit X le fibré en coniques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2_{\{\{t\}\}}$ donné par l'équation

$$s^2 + v^2 = F(x, y, z).$$

Plus précisément, on pose $X := Q_{\mathbb{R}\{\{t\}\}, F}$. Considérons $\mathcal{X} := Q_{\mathbb{R}[t], F}$ avec sa projection naturelle $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^2$. On a $\mathcal{X}|_{t=0} = Y$ et $\mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\} = X$. Un calcul facile montre que la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X est lisse. Soit $C = \mathbb{C}\{\{t\}\}$. Alors un ouvert affine de X_C est donné par l'équation $s'v' = F(x, y, 1)$, où $s' = s + iv$ et $v' = s - iv$, ce qui entraîne la C -rationalité de X_C .

Le théorème 3.1 et le lemme 3.11 donnent ici :

Théorème 3.12. *La R -variété projective, lisse et géométriquement rationnelle $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} R$, où R est le corps des séries de Puiseux réelles en t , est un solide fibré en coniques sur \mathbb{P}_R^2 tel que $X(R)$ soit semi-algébriquement connexe mais la variété X n'est pas CH_0 -triviale, et en particulier n'est pas stablement rationnelle.*

4. LA MÉTHODE DE SPÉCIALISATION REVISITÉE, II

Lemme 4.1. *On se place dans la situation 2.1 et on suppose de plus que les homomorphismes $p_* : CH_0(T_E) \rightarrow CH_0(S_E)$ et $p_* : CH_0(T_{E'}) \rightarrow CH_0(S_{E'})$ sont des isomorphismes. Alors l'application Φ est un isomorphisme.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 CH_1(p^{-1}(U)_{E'}, 1) & \longrightarrow & CH_0(T_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(Z_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(p^{-1}(U)_{E'}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow N_{E'/E} & & \downarrow N_{E'/E} & & \downarrow N_{E'/E} & & \downarrow N_{E'/E} & & \\
 CH_1(p^{-1}(U)_E, 1) & \longrightarrow & CH_0(T_E) & \longrightarrow & CH_0(Z_E) & \longrightarrow & CH_0(p^{-1}(U)_E) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow p_* & \wr p_* & \downarrow p_* & \wr p_* & \downarrow p_* & p_* & \downarrow p_* & \wr p_* & \\
 CH_1(U_E, 1) & \longrightarrow & CH_0(S_E) & \longrightarrow & CH_0(Y_E) & \longrightarrow & CH_0(U_E) & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow N_{E'/E} & & \uparrow N_{E'/E} & & \uparrow N_{E'/E} & & \uparrow N_{E'/E} & & \\
 CH_1(U_{E'}, 1) & \longrightarrow & CH_0(S_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(Y_{E'}) & \longrightarrow & CH_0(U_{E'}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les complexes horizontaux sont exacts et où les applications $p_* : CH_0(T_E) \rightarrow CH_0(S_E)$ et $p_* : CH_0(T_{E'}) \rightarrow CH_0(S_{E'})$ sont des isomorphismes par hypothèse. Ici $CH_1(-, 1)$ désigne le groupe de Chow supérieur au sens de Bloch [Blo86] ; voir [Blo86, Proposition 1.3] pour la covariance par morphismes propres et [Blo86, Theorem 3.1] pour la suite de localisation. (On aurait pu utiliser le formalisme de Rost [Ros96] : voir [Ros96, (3.4) et p. 365] pour la covariance par morphismes propres, et voir [Ros96, p. 356] pour la suite de localisation.) On en déduit que dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 CH_0(Z_{E'}) & \xrightarrow{N_{E'/E}} & CH_0(Z_E) \\
 \wr p_* \downarrow & & \downarrow \wr p_* \\
 CH_0(Y_{E'}) & \xrightarrow{N_{E'/E}} & CH_0(Y_E)
 \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes, ce qui entraîne que l'application

$$\Phi : CH_0(Z_E)/N_{E'/E}(CH_0(Z_{E'})) \rightarrow CH_0(Y_E)/N_{E'/E}(CH_0(Y_{E'}))$$

est un isomorphisme. \square

Théorème 4.2. *Soit Y une \mathbb{R} -variété projective et géométriquement intègre. Soit $S \subset Y$ le lieu singulier de Y , avec structure réduite. Soit $U := Y \setminus S$ l'ouvert complémentaire de S , soit $p : Z \rightarrow Y$ une résolution des singularités telle que la*

restriction $p^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme, et soit $T := p^{-1}(S)$. Soit $i \geq 0$ un entier. Supposons :

(a) les applications

$$p_* : CH_0(T_{\mathbb{R}(Y)}) \rightarrow CH_0(S_{\mathbb{R}(Y)}), \quad p_* : CH_0(T_{\mathbb{C}(Y)}) \rightarrow CH_0(S_{\mathbb{C}(Y)})$$

sont des isomorphismes ;

(b) l'espace topologique $Y(\mathbb{R})$ est connexe ;

(c) l'application

$$H^i(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^i(\mathbb{R}(Y)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)]$$

n'est pas surjective.

Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$, soit $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ un voisinage Zariski de 0, soit $f: \mathcal{X} \rightarrow U$ un morphisme projectif de \mathbb{R} -variétés, à fibre générique lisse, tel que $\mathcal{X}|_{t=0} \cong Y$. Alors, si $\eta: \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\}) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ est le morphisme correspondant à l'inclusion $\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{R}\{\{t\}\}$, la $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété projective lisse $X := \mathcal{X} \times_{U, \eta} \text{Spec}(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ satisfait les propriétés suivantes.

(i) L'espace semi-algébrique $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.

(ii) La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X n'est pas CH_0 -triviale, et en particulier n'est pas stablement rationnelle.

Démonstration. On suit la preuve du théorème 3.1, en remplaçant le lemme 2.4 par le lemme 4.1. \square

Remarque 4.3. On rappelle une condition « fibre par fibre » qui entraîne l'hypothèse du lemme 4.1 (et donc, pour $k = \mathbb{R}$, l'hypothèse (a) du théorème 4.2) et qui sera utilisée dans la suite. Soient V et W deux variétés sur un corps k et soit $f: V \rightarrow W$ un k -morphisme propre. On suppose que, pour tout point P du schéma W , de corps résiduel $k(P)$, la fibre V_P est une $k(P)$ -variété CH_0 -triviale. D'après [CTP16, Proposition 1.8], pour tout corps F contenant k , l'application $f_*: CH_0(V_F) \rightarrow CH_0(W_F)$ est un isomorphisme.

5. EXEMPLES EN DIMENSION SUPÉRIEURE

5.1. Le modèle singulier. Soit $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Proj}(\mathbb{R}[u_0, u_1])$, vu comme recollement de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnée $u := u_0/u_1$ et de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ avec coordonnée $v := u_0/u_1$ au moyen du changement de variable $u = 1/v$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Soit $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^7$ la variété définie par l'équation

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + (u_0^2 + u_1^2)X_3^2 - u_0u_1(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2) = 0,$$

où X_0, \dots, X_7 sont des coordonnées sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^7$. La projection $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est une fibration en quadriques de dimension relative 6. Un modèle affine de Y est donné par l'équation

$$(5.1) \quad x^2 + y^2 + z^2 + (1 + u^2) - u(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2) = 0.$$

Lemme 5.1. *L'espace topologique $Y(\mathbb{R})$ est connexe et l'application*

$$H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow \text{Ker}[H_{\text{nr}}^3(\mathbb{R}(Y), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(\mathbb{C}(Y), \mathbb{Z}/2)]$$

n'est pas surjective.

Démonstration. L'image de $Y(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est l'intervalle $u \geq 0$, et pour tout $u \geq 0$ la fibre $Y_u(\mathbb{R})$ est connexe. Donc $Y(\mathbb{R})$ est connexe.

Soit q la forme quadratique $\langle 1, 1, 1, 1+u^2, -u, -u, -u, -u \rangle$ sur le corps $\mathbb{R}(u)$. La forme q est de rang 8 et n'est pas semblable à une voisine d'une forme de Pfister, puisque son déterminant n'est pas un carré.

D'après Arason [Ara75, Satz 5.6] (voir aussi [Kah08, Corollaire 9.6.2]), pour une telle forme quadratique q , l'application $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(\mathbb{R}(u)(q), \mathbb{Z}/2)$ est injective.

Soit $\mathbb{R} \subset A \subset \mathbb{R}(Y)$ un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\mathbb{R}(Y)$ et de corps résiduel κ . Soit v la valuation associée à A .

Supposons $(-1, -1)_\kappa \neq 0$, c'est-à-dire que -1 n'est pas une somme de deux carrés dans κ . Alors une somme non nulle de 4 carrés dans le complété de $\mathbb{R}(Y)$ en v a sa valuation paire. Donc $v(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2)$ est paire. Supposons $v(u)$ impaire. Dans le complété de A , si $v(u) > 0$, alors $1+u^2$ est un carré. Si $v(u) < 0$, alors $1+u^2$ est aussi un carré dans le complété. Donc $x^2 + y^2 + z^2 + 1 + u^2$ est une somme de 4 carrés dans le complété, donc de valuation paire. Mais ceci contredit l'équation. Ainsi, pour toute valuation v telle que le corps résiduel κ satisfasse $(-1, -1)_\kappa \neq 0$, la valuation $v(u)$ est paire.

On conclut que la classe $(-1, -1, u) \in H^3(\mathbb{R}(Y), \mathbb{Z}/2)$ a tous ses résidus nuls, elle est donc non ramifiée. D'autre part, si $(-1, -1, u) \in H^3(\mathbb{R}(Y), \mathbb{Z}/2)$ provenait de $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ alors, l'application $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(\mathbb{R}(Y), \mathbb{Z}/2)$ étant injective, la classe $(-1, -1, u) \in H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ proviendrait de $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ceci est impossible car la classe $(-1, -1, u) \in H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ est ramifiée. \square

5.2. Variétés lisses fibrées en quadriques. Soit $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^7 \mathcal{E}_i$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, où $\mathcal{E}_i := \mathcal{O}(1)$ pour $0 \leq i \leq 2$ et $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}$ pour $3 \leq i \leq 7$. Soit encore $\mathcal{L} := \mathcal{O}(2)$. On a $\mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}$ si $0 \leq i \leq 2$ et $\mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}(2)$ si $3 \leq i \leq 7$. On dispose donc des sections globales

$$\begin{aligned} 1 &\in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{L}) && (0 \leq i \leq 2), \\ u_0^2 + u_1^2 &\in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}(2)) = \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{L}) && (i = 3), \\ -u_0 u_1 &\in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}(2)) = \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{E}_i^\vee \otimes \mathcal{L}) && (3 \leq i \leq 7). \end{aligned}$$

Considérons la fibration en quadriques $Q \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ définie par l'annulation de la section globale

$$q := Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + (u_0^2 + u_1^2)Z_3^2 - u_0 u_1 (Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2 + Z_7^2) \in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \text{Sym}^2(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{L}).$$

Soit $U_1 = \{u_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Une base de $\mathcal{E}|_{U_1}$ en tant que \mathcal{O}_{U_1} -module libre est donnée par $f_0/u_1, f_1/u_1, f_2/u_1, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$, où f_i est une section globale de $(\mathcal{E}_i)|_{U_1}$. Notons X_i les coordonnées de fibre correspondantes. Alors $(Z_i)|_{U_1} = u_1 X_i$ si $0 \leq i \leq 2$ et $(Z_i)|_{U_1} = X_i$ si $3 \leq i \leq 7$. En substituant dans l'équation $q = 0$, on obtient l'équation locale de Q dans $U_1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^7$:

$$u_1^2(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2) + (u_0^2 + u_1^2)X_3^2 - u_0 u_1 (X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2) = 0.$$

Ceci équivaut à

$$(5.2) \quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + (1 + u^2)X_3^2 - u(X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2) = 0,$$

où $u = u_0/u_1$. En particulier, la variété affine (5.1) est isomorphe à l'ouvert de Zariski de Q où $u_1 \neq 0$ et $Z_3 \neq 0$, en identifiant

$$(x, y, z, x', y', z', t') = (X_0/X_3, X_1/X_3, X_2/X_3, X_4/X_3, X_5/X_3, X_6/X_3, X_7/X_3).$$

Soit $U_0 = \{u_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Un argument analogue nous donne l'équation locale de Q dans $U_0 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^7$:

$$u_0^2(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2) + (u_0^2 + u_1^2)Y_3^2 - u_0u_1(Y_4^2 + Y_5^2 + Y_6^2 + Y_7^2) = 0,$$

où $(Z_i)|_{U_0} = u_0Y_i$ si $0 \leq i \leq 2$ et $(Z_i)|_{U_0} = Y_i$ si $3 \leq i \leq 7$. Ceci équivaut à

$$(5.3) \quad Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + (1 + v^2)Y_3^2 - v(Y_4^2 + Y_5^2 + Y_6^2 + Y_7^2) = 0,$$

où $v = u_1/u_0$.

Lemme 5.2. *La \mathbb{R} -variété $Y = Q \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ satisfait les hypothèses (a), (b) et (c) (avec $i = 3$) du théorème 4.2.*

Démonstration. La \mathbb{R} -variété Q est birationnelle à la \mathbb{R} -variété du lemme 5.1. La propriété (c) en résulte.

Le lieu singulier S_1 de $Q|_{U_1}$ est donné par les équations

$$\begin{aligned} X_0 = X_1 = X_2 = (1 + u^2)X_3 = uX_4 = uX_5 = uX_6 = uX_7 = 0, \\ 2uX_3^2 - (X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2) = 0, \end{aligned}$$

et donc coïncide avec

$$S_1 = \{u = X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 = 0\}.$$

Le lieu singulier S_0 de $Q|_{U_0}$ est donné par

$$S_0 = \{v = Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4^2 + Y_5^2 + Y_6^2 + Y_7^2 = 0\}.$$

Le lieu singulier S de Q est donc l'union disjointe de S_0 et S_1 . En particulier $Q(\mathbb{R})$ est contenu dans le lieu non singulier de Q . En particulier, on obtient (b) : la \mathbb{R} -variété Q est birationnelle à la variété du lemme 5.1 et donc le lemme 1.4 entraîne que $Q(\mathbb{R})$ est connexe.

Les équations (5.2) et (5.3) montrent que le fibré en quadriques $Q \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est admissible au sens de [CTS93, Définition 3.1], c'est-à-dire, sa fibre générique est lisse et pour tout point fermé $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, la restriction de $Q \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ à $\text{Spec}(O_P)$ est le lieu des zéros d'une équation homogène $\sum_{i=1}^8 a_i T_i^2$ où $0 \leq v_P(a_i) \leq 1$ pour tout i et $v_P(a_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4$. D'après [CTS93, Théorème 3.3(a)], une résolution des singularités $\tilde{Q} \rightarrow Q$ est obtenue en éclatant la variété Q le long de son lieu singulier. De plus, pour tout point singulier $P \in Q$ la fibre du morphisme $\tilde{Q} \rightarrow Q$ en P est donnée par une hypersurface quadrique lisse avec un $k(P)$ -point rationnel (cf. [CTS93, bas de page 488]). Compte tenu de la remarque 4.3, ceci entraîne (a). \square

Soient $q_3(u), \dots, q_7(u) \in \mathbb{R}[u]$ des polynômes de degré 2, sans racines doubles et tels que $\text{pgcd}(q_i, q_j) = 1$ pour tout $3 \leq i < j \leq 7$. Posons

$$p_i(u_0, u_1) := u_1^2 q_i(u_0/u_1) \in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{O}(2)) = \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathcal{E}_i^{\vee} \otimes \mathcal{E}_i^{\vee} \otimes \mathcal{L}) \quad (3 \leq i \leq 7).$$

Soit

$$q' : Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + p_3 Z_3^2 + p_4 Z_4^2 + p_5 Z_5^2 + p_6 Z_6^2 + p_7 Z_7^2 \in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \text{Sym}^2(E^{\vee}) \otimes L),$$

et soit $Q' := \{q' = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$. L'ouvert $(Q')_{U_1} \subset U_1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^7$ est donné par l'équation

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + q_3(u)X_3^2 + q_4(u)X_4^2 + q_5(u)X_5^2 + q_6(u)X_6^2 + q_7(u)X_7^2 = 0,$$

où $(Z_i)|_{U_1} = u_1 X_i$ si $0 \leq i \leq 2$ et $(Z_i)|_{U_1} = X_i$ si $3 \leq i \leq 7$. Le lieu singulier de $(Q')_{U_1}$ est donc donné par

$$\begin{aligned} X_0 = X_1 = X_2 = q_3(u)X_3 = q_4(u)X_4 = q_5(u)X_5 = q_6(u)X_6 = q_7(u)X_7 = 0, \\ (\partial q_3)(u)X_3 + (\partial q_4)(u)X_4 + (\partial q_5)(u)X_5 + (\partial q_6)(u)X_6 + (\partial q_7)(u)X_7 = 0, \end{aligned}$$

où ∂q_i est la dérivée de q_i en u . Soit $P \in (Q')_{U_1}$ un point singulier. D'après les hypothèses faites sur les q_i , il existe au plus un j tel que $q_j(u(P)) = 0$, ce qui entraîne $X_i = 0$ en P pour tout $i \neq j$. Comme q_j n'a pas de racine double, on a $(\partial q_j)(u(P)) \neq 0$, et la dernière équation donne alors $X_j = 0$ en P , contradiction. Comme les q_i sont de degré 2, la fibre de Q' en $(1 : 0)$ est lisse. On conclut que la \mathbb{R} -variété Q' est lisse.

On considère la famille $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$ définie par l'équation $q + tq' = 0$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]$. La fibre du morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$ en $t = 0$ est Q et la fibre générique est lisse. On pose $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\}$. Le théorème 4.2 et le lemme 5.2 nous donnent :

Théorème 5.3. *La $\mathbb{R}\{\{t\}\}$ -variété X est une variété lisse, projective, de dimension 7, fibrée en quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$, non CH_0 -triviale, et telle que $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ soit semi-algébriquement connexe.*

Remarque 5.4. Au théorème 3.3 nous avons construit une variété lisse, projective, de dimension 3, fibrée en quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^1$ avec les mêmes propriétés. On part là d'une fibration en quadriques $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ dont la fibre générique est définie par une forme quadratique q de rang $r = 4$ sur $F = \mathbb{R}(\mathbb{P}^1)$ dont le déterminant n'est pas un carré. On suppose en outre que Y possède un \mathbb{R} -point lisse. On utilise l'injectivité de $H^2(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(F(q), \mathbb{Z}/2)$, qui résulte de l'hypothèse sur le déterminant, et une classe non constante dans $H_{\text{nr}}^2(F(q)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$.

Pour toute forme quadratique q non dégénérée de rang $r \geq 5$ l'application

$$H^2(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^2(F(q)/F, \mathbb{Z}/2)$$

est un isomorphisme. Pour $r \geq 5$, Ceci implique que l'application

$$H^2(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^2(F(q)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$$

est un isomorphisme. On ne peut donc utiliser le groupe $H^2(-, \mathbb{Z}/2)$ pour faire une construction analogue avec X de dimension plus grande que 3.

La construction du théorème 5.3 part d'une fibration en quadriques $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ dont la fibre générique est définie par une forme quadratique de rang $r = 8$ sur $F = \mathbb{R}(\mathbb{P}^1)$ dont le déterminant n'est pas un carré, donc qui n'est pas semblable à une 3-forme de Pfister. On utilise le fait que pour une telle forme q l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(F(q), \mathbb{Z}/2)$ est injective.

Plus généralement, d'après Arason [Ara75, Satz 5.6], cette application est injective si la forme q est de rang $r \geq 5$ et n'est pas une 3-voisine de Pfister, i.e. n'est pas semblable à une sous-forme d'une 3-forme de Pfister $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$. Par ailleurs, on sait [Kah08, Théorème 10.2.4] que pour q avec $r \geq 3$, l'application

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(q)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est surjective sauf si $r = 6$ et q est une forme d'Albert anisotrope. On déduit de ces résultats et d'un calcul de résidus que l'application $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(q)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ est surjective si $r \geq 9$.

On voit ainsi qu'outre les exemples que nous avons développés avec $r = 4$ en utilisant H^2 et $r = 8$ en utilisant H^3 , on pourrait essayer d'utiliser $H^3(-, \mathbb{Z}/2)$ pour construire des exemples avec $r = 5, 6, 7$ et q non voisine d'une 3-forme de Pfister.

5.3. Intersections de deux quadriques lisses. Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ défini par les coordonnées $(x, y, z, u, v, x', y', z', t')$ et soit U la variété réelle affine définie par les équations :

$$(5.4) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 1 + u^2 - uv = 0,$$

$$(5.5) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2 - v = 0.$$

Soient $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9]$ des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$. On identifie $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ à $U_0 = \{X_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$ en posant

$$(x, y, z, u, v, x', y', z', t') = (X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_9/X_0).$$

Définissons Y par :

$$(5.6) \quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_4X_5 = 0,$$

$$(5.7) \quad X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 - X_0X_5 = 0.$$

Donc $U = Y \cap U_0$.

Lemme 5.5. *La \mathbb{R} -variété Y satisfait les hypothèses (a), (b) et (c) (avec $i = 3$) du théorème 4.2.*

Démonstration. La \mathbb{R} -variété Y est birationnelle à la \mathbb{R} -variété du lemme 5.1. La propriété (c) en résulte.

La matrice jacobienne associée au système d'équations (5.6)-(5.7) est :

$$\begin{pmatrix} 2X_0 & 2X_1 & 2X_2 & 2X_3 & 2X_4 - X_5 & -X_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_0 & -2X_6 & -2X_7 & -2X_8 & -2X_9 \end{pmatrix}.$$

Soit P un point singulier de Y . Si $X_5 \neq 0$ en P , alors

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 2X_4 - X_5 = 2X_0^2 + X_4X_5 = 0,$$

ce qui contredit (5.6). Donc $X_5 = 0$ en P . Si $X_0 \neq 0$ en P , alors

$$0 = X_4X_5 = -2X_0^2 \neq 0,$$

contradiction. Donc $X_0 = X_5 = 0$ en P . La forme de la matrice jacobienne entraîne alors que l'on a soit $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$ en P (avec X_6, X_7, X_8, X_9 arbitraires) soit $X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = 0$ (avec X_1, X_2, X_3, X_4 arbitraires). On déduit que le lieu singulier $S \subset Y$, avec la structure réduite, est l'union disjointe de

$$S_1 := \{X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0, \quad X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 = 0\},$$

$$S_2 := \{X_0 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = 0, \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0\}.$$

En particulier, $Y(\mathbb{R})$ est contenu dans le lieu lisse de Y et connexe, et donc par le lemme 1.4 donne (b).

Soit $p: Z \rightarrow Y$ l'éclatement de Y en S : on veut montrer que p est une résolution des singularités satisfaisant la propriété (a). On montrera le résultat plus précis suivant : la \mathbb{R} -variété Z est lisse et pour tout $P \in S$ la fibre de p en P est une quadrique projective lisse avec un $k(P)$ -point (d'après la remarque 4.3, ceci entraîne (a)). Pour tout $0 \leq i \leq 9$, soit $U_i := \{X_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$. Pour tout point $P \in S_1$ il

existe i avec $6 \leq i \leq 9$ tel que $P \in U_i$. Par symétrie, on peut supposer $i = 9$. L'ouvert $Y \cap U_9 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ est donné par les équations

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_4x_5 &= 0, \\ x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + 1 - x_0x_5 &= 0, \end{aligned}$$

où $x_i := X_i/X_9$ sont les coordonnées de $U_9 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$.

Comme on a $P \in S_1$, on a $x_0 = 0$ en P et donc la deuxième équation entraîne l'existence de j avec $6 \leq j \leq 8$ tel que $x_j \neq 0$ en P . Par symétrie, on peut supposer $j = 8$. Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ un autre espace affine, avec coordonnées y_0, \dots, y_8 . On a un morphisme

$$f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9, \quad (x_0, \dots, x_8) \mapsto (x_0, \dots, x_7, x_8^2).$$

Comme $x_8 \neq 0$ en P , la restriction de f à $Y \cap U_9 \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ est étale au voisinage de P . De plus, si $W \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^9$ est donné par

$$\begin{aligned} y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_4y_5 &= 0, \\ y_6^2 + y_7^2 + y_8 + 1 - y_0y_5 &= 0, \end{aligned}$$

alors $f^{-1}(W) = Y \cap U_9$. On note que W est isomorphe à la sous-variété de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^8$, avec coordonnées z_j pour $0 \leq j \leq 7$, donnée par l'équation

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - z_4z_5 = 0,$$

ce qui est isomorphe à $\tilde{C} \times \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, où \tilde{C} est le cône affine sur une quadrique projective lisse C avec un \mathbb{R} -point. En particulier, l'éclaté de la variété $\tilde{C} \times \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ en son lieu singulier $\{0\} \times \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ est une \mathbb{R} -variété lisse, et le diviseur exceptionnel est donné par la deuxième projection $C \times \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. On déduit que tout point de $p^{-1}(S_1)$ est un point lisse de Z et que pour tout $P \in S_1$ la fibre de p en P est une quadrique projective lisse avec un $k(P)$ -point. On peut traiter S_2 de façon similaire. D'après la remarque 4.3, ceci établit la propriété (a). \square

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur \mathbb{R} en les 9 variables X_0, \dots, X_9 , telles que le système $q_1 = q_2 = 0$ définisse une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}[t]}^9$ défini par le système

$$\begin{aligned} X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_4X_5 + tq_1 &= 0, \\ X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 - X_0X_5 + tq_2 &= 0. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{X}|_{t=0} = Y$ et la fibre générique sur $\mathbb{R}(t)$ est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}(t)}^9$. On pose $X := \mathcal{X} \times_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}\{\{t\}\}$. Le théorème 4.2 et le lemme 5.5 donnent ici :

Théorème 5.6. *L'intersection lisse de deux quadriques X dans dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^9$ n'est pas CH_0 -triviale, et l'espace $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe.*

Remarque 5.7. Au théorème 3.6 nous avons construit des intersections complètes lisses X de deux quadriques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}\{\{t\}\}}^5$ pour lesquelles $X(\mathbb{R}\{\{t\}\})$ est semi-algébriquement connexe et X n'est pas CH_0 -triviale. Soit R un corps réel clos. On peut se demander s'il existe de tels exemples dans \mathbb{P}_R^n pour d'autres valeurs $n \geq 6$, $n \neq 9$. On pourrait essayer d'en construire pour $n = 6, 7, 8$ en partant de la remarque 5.4. Il convient cependant de se rappeler que d'après [HKT22] de tels exemples n'existent pas dans \mathbb{P}_R^6 .

6. CALCUL D'INVARIANTS COHOMOLOGIQUES NON RAMIFIÉS POUR LES
EXEMPLES

Proposition 6.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k -variété projective lisse géométriquement intègre. Supposons que X est k -birationnelle à une k -variété de l'un des types suivants :*

- (a) *intersection complète lisse de deux quadriques dans \mathbb{P}_k^n avec $n \geq 5$;*
- (b) *hypersurface cubique lisse dans \mathbb{P}_k^n avec $n \geq 4$;*
- (c) *modèle projectif et lisse d'une k -variété géométriquement intègre Y munie d'une fibration en quadriques $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ à fibre générique lisse et dont toutes les fibres ont une composante géométriquement intègre de multiplicité 1.*

Alors $\mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}(X)$ est surjectif.

Démonstration. Dans les cas (a) et (b), cette flèche est un isomorphisme [CTS21, Theorem 8.3.2]. Dans le cas (c), on commence par observer que la flèche

$$\mathrm{Br}(k(\mathbb{P}^1)) \rightarrow \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(Y)/k(\mathbb{P}^1)) = \mathrm{Br}(Y_\eta)$$

est surjective car la fibre générique $Y_\eta/k(\mathbb{P}^1)$ est une quadrique lisse. Une classe α dans $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(k(X)) = \mathrm{Br}(k(Y))$ est donc image d'une classe $\beta \in \mathrm{Br}(k(\mathbb{P}^1))$. Pour tout point fermé $P \in \mathbb{P}_k^1$, la fibre Y_P admet une composante irréductible $Z_P \subset Y_P$ de multiplicité 1. La comparaison du résidu de β en P et du résidu de α au point générique de Z_P (voir [CTS21, Corollary 11.1.6]) donne que le résidu de β en P est trivial. Comme ceci pour tout point fermé P de \mathbb{P}_k^1 , on conclut que α est image d'un élément $\gamma \in \mathrm{Br}(\mathbb{P}_k^1) = \mathrm{Br}(k)$. \square

6.1. Un théorème de Witt.

Théorème 6.2. *Soit R un corps réel clos, et soit $K = R(\Gamma)$ le corps des fonctions d'une \mathbb{R} -courbe Γ géométriquement intègre. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques non dégénérées sur le corps K . Supposons $1 \leq \mathrm{rang}(q_1) < \mathrm{rang}(q_2)$ et $3 \leq \mathrm{rang}(q_2)$. Si après évaluation en presque tout point $c \in \Gamma(R)$, la forme quadratique $q_{1,c}$ est isomorphe à une sous-forme de $q_{2,c}$, alors la K -forme q_1 est isomorphe à une sous-forme de q_2 . En particulier, si une forme quadratique q non dégénérée sur K de rang au moins 3 se spécialise en une forme q_c isotrope sur R pour presque tout c , alors cette forme sur K a un zéro non trivial.*

Démonstration. Ceci se déduit en combinant deux résultats de Witt : [Wit37, Satz 22] sur l'isotropie des formes quadratiques sur $R(\Gamma)$, ce qui correspond au cas du plan hyperbolique $q_1(x, y) = x^2 - y^2$, et [Wit37, Satz 4] sur la simplification des formes quadratiques. Comme l'espace des représentations de q_1 par q_2 est un espace homogène sous le groupe linéaire connexe $SO(q_2)$, cet énoncé est aussi un cas particulier de [Sch96, Corollaire 6.2]. \square

Remarque 6.3. Cet énoncé est en défaut si le rang de q_1 est égal au rang de q_2 .

6.2. Fibrations en quadriques et intersections de deux quadriques. On calcule $H_{\mathrm{nr}}^3(-, \mathbb{Z}/2)$ pour certaines fibrations en quadriques. En utilisant le théorème suivant, on en déduit des résultats analogues pour certaines intersections lisses de deux quadriques avec un point rationnel.

Théorème 6.4. *Soit k un corps parfait de caractéristique différente de 2, soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ une intersection complète lisse de deux quadriques telle que $X(k)$ soit non vide. À tout k -point P de X , on associe une fibration en quadriques $X' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, où X' est lisse, telle que toute fibre géométrique ait au plus un point singulier (et donc soit intègre si $n \geq 5$) et telle que X' soit k -birationnelle à X .*

Démonstration. Voir [CTSSD87, Theorem 3.2, (3.4) p. 61, Remark 1.13.1]. \square

Nous utiliserons aussi le théorème suivant.

Théorème 6.5. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur k , de rang $r \geq 3$. Soit $k(q)$ le corps des fonctions de la quadrique projective définie par $q = 0$. Soit $i \geq 0$ un entier. Dans chacun des cas suivants, l'application*

$$H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(k(q), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$$

est surjective :

- (i) $i = 2$ et $r \geq 3$
- (ii) $i = 3$ et $r \neq 6$
- (iii) $i = 3$, $r = 6$ et q n'est pas une forme d'Albert
- (iv) $i = 4$ et $r \leq 5$.

Démonstration. Le cas $i = 2$ est classique. Les énoncés pour $i = 3$ sont dus à Kahn, Rost et Sujatha [KRS98, Théorème 5, Corollaire 10 (2)]. L'énoncé (iv) est dû à Kahn et Sujatha [KS00, Theorem 3]. \square

Proposition 6.6. *Soit R un corps réel clos. Soit X une R -variété projective et lisse munie d'un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ dont la fibre générique est une quadrique de dimension d . Supposons $X(R)$ semi-algébriquement connexe.*

(a) *Si $d = 2$, l'application $H^3(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

(b) *Si $d = 3$, l'application $H^4(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^4(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Démontrons d'abord l'énoncé (a). Notons $C = R(\sqrt{-1})$. La fibration $X_C \rightarrow \mathbb{P}_C^1$ admet une section, sa fibre générique est une quadrique, donc la C -variété X_C est rationnelle. Pour tout corps k de caractéristique différente de 2, d'après le théorème de Merkurjev [Mer81], l'application $H^2(k, \mu_{2^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(k, \mu_{2^{n-1}}^{\otimes 2})$ est surjective pour tout $n \geq 1$, et donc l'application $H^3(k, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est injective. On en déduit l'injectivité des flèches horizontales dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^3(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\sim} & H^3(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{nr}}^3(R(X)/R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2) & \hookrightarrow & H_{\text{nr}}^3(R(X)/R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \end{array}$$

La surjectivité de la flèche du haut suit de la nullité de $H^3(C(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et d'un argument de restriction-corestriction. La surjectivité de l'application de droite est donnée par le théorème 6.5(ii). On en déduit la surjectivité de la flèche de gauche. Combinant ces faits, on voit que toute classe

$$\alpha \in H_{\text{nr}}^3(R(X)/R, \mathbb{Z}/2) \subset H_{\text{nr}}^3(R(X)/R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2)$$

est l'image d'une classe $\beta \in H^3(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2)$. Soit $\alpha \in H_{\text{nr}}^3(R(X), \mathbb{Z}/2)$. On fixe un point m de $X(R)$. Sous l'hypothèse que $X(R)$ est semi-algébriquement connexe, l'image de $X(R)$ dans $\mathbb{P}^1(R)$ est un intervalle de $\mathbb{P}^1(R)$. Si cet intervalle est tout $\mathbb{P}^1(R)$, le théorème 6.2 assure que la fibration $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ admet une section et donc que l'espace total est R -rationnel. On supposera que ce n'est pas le cas. On peut supposer l'intervalle donné par $0 \leq u \leq \infty$, où $\mathbb{A}_R^1 = \text{Spec}(R[u]) \subset \mathbb{P}_R^1$.

Soit $G := \text{Gal}(C/R)$. Comme le corps $C(u)$ est de dimension cohomologique 1, la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite de G -modules

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow (\mathbb{Z}/2)[G] \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

montre la surjectivité de l'application $H^i(R(u), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{i+1}(R(u), \mathbb{Z}/2)$ donnée par $a \mapsto (-1) \cup a$ pour tout $i \geq 1$. Donc toute classe dans $H^3(R(u), \mathbb{Z}/2)$ s'écrit comme un cup-produit $(-1, -1, P(u))$ avec $P(u) \in R[u]$. Comme $(-1, r^2 + s^2) = 0$ dans $\text{Br}(R(u))$ pour tout $r, s \in R(u)$, on peut de plus supposer

$$P(u) = \prod_{i=1}^n (u + a_i)$$

avec tous les $a_i \in R$ distincts. La classe α prend une valeur constante dans $\mathbb{Z}/2 = H^3(R, \mathbb{Z}/2)$ sur chaque composante semi-algébrique connexe de $X(R)$, donc sur $X(R)$. Quitte à modifier α par l'image de $(-1, -1, -1)$, on peut supposer que α s'annule sur $X(R)$. Ainsi la fonction $P(u)$ est positive sur $u > 0$. Ceci implique $a_i \geq 0$ pour tout i .

On peut supposer la fibre générique X_η de $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ donnée par l'annulation d'une forme quadratique $q := \langle 1, a, b, c \rangle$, avec $a, b, c \in R(u)$.

Soit $f \in R(u)$. Si la forme quadratique non dégénérée q est une sous-forme de la forme quadratique $\langle -1, -1, f \rangle$, alors cette forme de Pfister admet un zéro sur le corps des fonctions $R(u)(q)$ de la quadrique définie par q , donc est totalement hyperbolique sur ce corps. Ceci implique que la classe de cohomologie $(-1, -1, f) \in H^3(R(u), \mathbb{Z}/2)$ s'annule dans $H^3(R(u)(q), \mathbb{Z}/2)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit donc de montrer : pour tout $a \geq 0$, la forme quadratique q , de rang 4, est une sous-forme de la forme $\langle -1, -1, u + a \rangle$, de rang 8. D'après le théorème 6.2, il suffit de voir que ceci vaut pour presque toute spécialisation de u en un point $c \in R$.

Soit $a \geq 0$. Si $c + a < 0$, alors $c < 0$ et donc c n'est pas dans l'image de $X(R) \rightarrow \mathbb{P}^1(R)$. La forme q_c est donc anisotrope. Comme q représente 1 sur $R(u)$, il en est de même de q_c sur R , et q_c est isomorphe à $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$. La forme $\langle -1, -1, c + a \rangle$ contient la forme $\langle -1, -1 \rangle = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$.

Si $c + a > 0$, alors la forme $\langle -1, -1, c + a \rangle$ sur R est isotrope donc totalement hyperbolique. Elle représente donc toute forme quadratique sur R de rang au plus égal à 4.

Voici les modifications à apporter à cette démonstration pour obtenir l'énoncé (b). On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^4(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\sim} & H^4(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{nr}}^4(R(X)/R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2) & \hookrightarrow & H_{\text{nr}}^4(R(X)/R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)). \end{array}$$

Pour tout corps k de caractéristique différente de 2, l'application $H^3(k, \mu_{2^n}^{\otimes 3}) \rightarrow H^3(k, \mu_{2^{n-1}}^{\otimes 3})$ est surjective pour tout $n \geq 1$ par un théorème de Merkurjev, Suslin et Rost, et donc l'application $H^4(k, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))$ est injective. Ceci donne l'injectivité des flèches horizontales. La surjectivité de la flèche verticale de droite est donnée par le théorème 6.5 (iv). Le groupe $H^4(R(\mathbb{P}^1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))$ est de 2-torsion car $C(\mathbb{P}^1)$ est de dimension cohomologique 1. Soit q une forme quadratique de rang 5 sur $R(u)$ représentant 1 définissant la fibre générique de $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$. En utilisant le théorème 6.2, et en procédant comme pour la démonstration de (a), on voit, par spécialisation de u en presque tout point $c \in R$, que pour tout $a \geq 0$, la forme quadratique q , de rang 5, et donc de rang au plus 8, est une sous-forme de la forme $\langle\langle -1, -1, -1, u + a \rangle\rangle$, de rang 16. \square

Remarque 6.7. La surjectivité de la flèche $H^4(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3)) \rightarrow H_{\text{nr}}^4(k(q), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(3))$ est aussi établie par Kahn, Rost et Sujatha pour certains types de formes quadratiques de rang $r > 5$. Pour celles qui sont de rang au plus 8, la démonstration de la proposition 6.6(b) s'étend.

Remarque 6.8. En combinant [BP24, Theorem 1.1] et [CTP24, Théorème 4.7], on obtient sur R le corps des séries de Puiseux réelles un exemple de fibration $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ à fibres géométriques des surfaces quadriques intègres, et d'un corps F contenant R , tels que $X(R)$ soit semi-algébriquement connexe, et que l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ ne soit pas surjective.

Remarque 6.9. La proposition 6.6 (a) généralise [CTP24, Théorème 4.5]. Comme observé dans [CTP24, Remarque 4.6], Benoist et Wittenberg ont établi que la flèche $H^3(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme pour de bien plus larges classes de solides X/R . Plus précisément, sur tout corps réel clos R , la combinaison de [BW20a, Proposition 5.2] et [BW20b, Theorem 8.1(i)] établit que pour tout solide projectif et lisse géométriquement unirégulé et satisfaisant $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, si $X(R)$ est semi-algébriquement connexe, alors $H^3(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un isomorphisme.

Corollaire 6.10. *Soit R un corps réel clos et soit $X \subset \mathbb{P}_R^5$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Supposons $X(R) \neq \emptyset$. Supposons $X(R)$ semi-algébriquement connexe. Alors l'application $H^3(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(R(X), \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On combine le théorème 6.4 et la proposition 6.6. \square

Proposition 6.11. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Soit $X \rightarrow \mathbb{P}_F^1$ une fibration en quadriques de dimension relative $n \geq 4$. On suppose que X/F est projective et lisse et que les fibres géométriques singulières ont un seul point singulier (pinceau de Lefschetz). On suppose en outre que la fibre générique, qui est définie par une forme quadratique q sur $F(\mathbb{P}^1)$ de rang $n + 2 \geq 6$, n'est pas semblable à une forme d'Albert anisotrope. Supposons $X(F) \neq \emptyset$. Alors l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Rappelons qu'une forme d'Albert est de rang 6. Si la forme q est isotrope, alors la fibre générique est une quadrique lisse avec un point rationnel, donc est rationnelle sur le corps $F(\mathbb{P}^1)$, et X est rationnelle sur F . Le résultat est alors clair. Supposons désormais q anisotrope. Soit $\alpha \in H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$. Comme q n'est pas semblable à une forme d'Albert, d'après [KRS98, Theorem 5], α est

l'image d'une classe $\beta \in H^3(F(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2)$. Les résidus de cette classe en tout point fermé $m \in \mathbb{P}_k^1$ sont dans le noyau de $H^2(F(m), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(F(X_m), \mathbb{Z}/2)$. Comme chaque X_m est défini par une forme quadratique de rang au moins 5, ce noyau est trivial. Ainsi β est dans $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$. \square

Corollaire 6.12. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2, soit $n \geq 7$ et soit $X \subset \mathbb{P}_F^n$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Supposons $X(F) \neq \emptyset$. Soit $Y \rightarrow \mathbb{P}_F^1$ la fibration en quadriques associée à un F -point de X comme dans le théorème 6.4. Si $n = 7$, supposons que la fibre générique de cette fibration n'est pas définie par une forme d'Albert anisotrope sur $F(\mathbb{P}^1)$. Alors l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On combine le théorème 6.4 et la proposition 6.11. \square

Proposition 6.13. *Soit R un corps réel clos et soit $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ une fibration en quadriques de dimension relative $n = 3$. On suppose que la variété X/R , de dimension 4, est projective et lisse et que chaque fibre géométrique a au plus un point singulier. Supposons que $X(R)$ est semi-algébriquement connexe. Alors pour tout corps F contenant R , l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons $T \subset \mathbb{P}^1(R)$ l'ensemble des points P tels que la fibre X_P soit définie par une forme de rang 4 sur R anisotrope. Une équation locale de $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ au voisinage d'un point $P \in T$ est de la forme $\sum_{i=0}^3 a_i x_i^2 + b x_4^2 = 0$, où $a_i \in O_{\mathbb{P}_R^1, P}^\times$ et b est une uniformisante de $O_{\mathbb{P}_R^1, P}$ et $a_i(P) > 0$ pour tout i . Pour tout Q proche de P , l'ensemble $X_Q(R)$ est vide ou non selon que $b(P) > 0$ ou $b(P) < 0$. Par contre, soit $P' \in \mathbb{P}^1(R) \setminus T$. On vérifie sur l'équation locale au voisinage de P' que pour Q' proche de P' la vacuité de $X_{Q'}(R)$ ne dépend pas de Q' . On déduit que la cardinalité $|T|$ de T est paire. Si on avait $|T| \geq 4$, alors $X(R)$ aurait au moins 2 composantes semi-algébriquement connexes. Donc $|T|$ est égal à 0 ou 2. Si T est vide, alors la projection $X(R) \rightarrow \mathbb{P}^1(R)$ est surjective et le théorème 6.2 assure que $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ a une section et donc que X est rationnelle sur R . Supposons que $|T| = 2$. On peut donc supposer $T = \{0, \infty\}$.

Soit $\alpha \in H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$. D'après [KRS98, Theorem 5] (cf. preuve de la proposition 6.6), α est l'image d'une classe $\beta \in H^3(F(\mathbb{P}^1), \mathbb{Z}/2)$. Les résidus de cette classe en tout point fermé $m \in \mathbb{P}_F^1$ sont dans le noyau de $H^2(F(m), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(F(X_m), \mathbb{Z}/2)$. Ce noyau est trivial si X_m/F est lisse ou si X_m contient un point $F(m)$ -rationnel lisse. Soit m un point fermé de \mathbb{P}_F^1 dont la fibre $X_m/F(m)$ n'est pas lisse et est définie par une forme quadratique de rang 4 anisotrope. Alors l'image de m par la projection $\mathbb{P}_F^1 \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ est un point $P \in T$, donc $m = 0$ ou $m = \infty$.

Le résidu de α en tout point fermé m de $\mathbb{P}_F^1 \setminus \{0, \infty\}$ est trivial, car ce résidu est dans le noyau de $H^2(F(m), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(F(X_m), \mathbb{Z}/2)$.

En 0 et ∞ , ce résidu est 0 ou la classe de $(-1, -1)_F$. De plus, par réciprocity [Ros96, Proposition 2.2], la somme de ces deux résidus est nulle. Donc à addition près d'un élément de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ on a $\beta = 0$ ou $\beta = (-1, -1, u)_F$, où u est une fonction rationnelle sur \mathbb{P}_R^1 de diviseur $(0) - (\infty)$. Pour conclure, il suffit de montrer que l'image de $(-1, -1, u)_R$ dans $H^3(R(X), \mathbb{Z}/2)$ est nulle.

On peut supposer que la fibre générique de $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ est définie par une forme quadratique q sur $R(\mathbb{P}^1)$ de rang 5 qui représente 1. Il suffit de montrer que la forme q est une sous-forme de $\langle\langle -1, -1, u \rangle\rangle$. D'après le théorème 6.2, ceci vaut si pour presque tout $c \in R$, la forme q_c est une sous-forme de $\langle\langle -1, -1, c \rangle\rangle$. Pour presque

tout $c > 0$ la forme q_c de rang 5 est isotrope et la forme de Pfister $\langle\langle -1, -1, c \rangle\rangle$ est isotrope donc totalement hyperbolique. Ainsi q_c est une sous-forme de $\langle\langle -1, -1, c \rangle\rangle$. Pour presque tout $c < 0$, la forme q_c de rang 5 est anisotrope et représente 1, donc est isomorphe à $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$. La forme $\langle\langle -1, -1, c \rangle\rangle$ est isomorphe à $\langle\langle -1, -1, -1 \rangle\rangle$. Ainsi q_c est une sous-forme de $\langle\langle -1, -1, c \rangle\rangle$. \square

Proposition 6.14. *Soit R un corps réel clos et soit $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ une fibration en quadriques de dimension relative $n \geq 3$. On suppose que la variété X/R est projective et lisse et que chaque fibre géométrique a au plus un point singulier. Supposons que $X(R)$ est semi-algébriquement connexe. Pour toute extension F/R , l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour $n = 3$, c'est la proposition 6.13. Pour $n \geq 4$, cela résulte immédiatement de la proposition 6.11, sauf si $n = 4$ et la forme quadratique q définissant la fibre générique est une forme d'Albert anisotrope. Mais sur le corps $R(\mathbb{P}^1)$, indice et exposant des éléments du groupe de Brauer coïncident (tout élément est annulé par passage à $R(\sqrt{-1})$). Ceci implique qu'un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions n'est pas un corps gauche, et ce dernier fait implique (Albert) que toute forme d'Albert sur $R(\mathbb{P}^1)$ est isotrope. \square

Corollaire 6.15. *Soit $X \subset \mathbb{P}_R^n$ une intersection complète lisse de deux quadriques sur un corps réel clos R . Supposons $n \geq 6$ et $X(R)$ semi-algébriquement connexe. Pour tout corps F contenant R , l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On combine le théorème 6.4 et la proposition 6.14. \square

Remarque 6.16. Dans le cas $n = 6$, Hassett, Kollár et Tschinkel [HKT22] ont montré bien mieux : toute telle $X \subset \mathbb{P}_R^6$ est rationnelle sur R .

Soit R un corps réel clos et X une R -variété projective et lisse géométriquement connexe de dimension n . Soit $s \geq 0$ le nombre de ses composantes semi-algébriques connexes. On a établi dans [CTP90] que l'on a $H_{\text{nr}}^i(R(X)/R, \mathbb{Z}/2) \simeq (\mathbb{Z}/2)^s$ pour $i \geq n + 1$. En particulier, si $X(R)$ est semi-algébriquement connexe et $i \geq n + 1$, alors l'application $H^i(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.

Rassemblons ici les résultats obtenus sur l'invariant $H_{\text{nr}}^i(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$ pour les fibrations en quadriques X sur \mathbb{P}_R^1 de dimension relative au plus 3.

Corollaire 6.17. *Soit R un corps réel clos. Soit X une R -variété projective et lisse munie d'un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ dont la fibre générique est une quadrique de dimension $d \geq 1$. Notons $\varphi_i : H^i(R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(R(X)/R, \mathbb{Z}/2)$.*

(a) *Pour tout d et $i \leq 1$, φ_i est un isomorphisme.*

(b) *Si $d = 1$ et $X(R)$ est semi-algébriquement connexe, alors X est rationnelle et φ_i est un isomorphisme pour tout i .*

(c) *Si $d = 2$ et $X(R)$ est semi-algébriquement connexe, φ_i est un isomorphisme si $i \neq 2$. C'est un isomorphisme pour tout i si toutes les fibres géométriques sont des quadriques avec au plus un point singulier.*

(d) *Si $d = 3$ et $X(R)$ est semi-algébriquement connexe, φ_i est un isomorphisme si $i \neq 3$. C'est un isomorphisme pour tout i si toutes les fibres géométriques sont des quadriques avec au plus un point singulier.*

Démonstration. D'après le paragraphe précédent, il suffit de considérer $i \leq d + 1$.

(a) Soit $C := R(\sqrt{-1})$. On a

$$H^1(R, \mathbb{Z}/2) = H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{Z}/2) = H_{\text{nr}}^1(R(X)/R, \mathbb{Z}/2).$$

La première égalité suit du fait que $H_{\text{ét}}^1(X_C, \mathbb{Z}/2) = 0$, la C -variété X_C étant rationnelle.

(b) La rationalité de X est un cas particulier du théorème de Comessatti [Com12] (cf. [CTP24, Paragraphe 10.2]). La bijectivité des φ_i s'ensuit.

(c) Pour $i = 3$, voir la proposition 6.6 (a). La deuxième partie de l'énoncé suit de la proposition 6.1 (c) et du fait que $X(R) \neq \emptyset$. (Comme on a $d \geq 2$, l'hypothèse additionnelle entraîne que les fibres géométriques sont intègres.)

(d) L'application φ_2 est surjective par la proposition 6.1 (c) et elle est injective car $X(R)$ est non vide. Le cas $i = 4$ suit de la proposition 6.6 (b). La deuxième partie de l'énoncé suit de l'intégrité des fibres géométriques et de la proposition 6.14. \square

6.3. Certaines fibrations en coniques sur \mathbb{P}^2 . Soit R un corps réel clos. Dans [BW20c, Proposition 3.4, Corollaire 3.6], Benoist et Wittenberg ont établi la non-rationalité de fibrations en coniques de la forme

$$y^2 + z^2 = g(u, v)$$

lorsque la courbe plane $\Gamma \subset \mathbb{P}_R^2$ d'équation affine $g(u, v) = 0$ est lisse de genre au moins 2. Il est naturel de considérer le cas où Γ est singulière et de genre géométrique zéro. Ceci motive la proposition suivante.

Proposition 6.18. *Soit R un corps réel clos et soit $X \rightarrow \mathbb{P}_R^2$ une fibration en coniques dont un ouvert affine est défini par une équation*

$$y^2 + z^2 = g(u, v)$$

où $g(u, v)$ est un polynôme géométriquement irréductible, de degré pair, tel que $g \geq 0$ sur $\mathbb{A}^2(R)$. Supposons que la courbe $\Gamma \subset \mathbb{P}_R^2$ d'équation affine $g(u, v) = 0$ est à singularités quadratiques ordinaires, est de genre géométrique zéro, et ne coupe la droite à l'infini L qu'en des points lisses. Pour tout corps F contenant R , l'application

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $C := R(\sqrt{-1})$. La variété X_C est rationnelle. Si -1 est un carré dans F , alors X_F est rationnelle et donc pour tout i l'application $H^i(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un isomorphisme. Supposons donc que $\sqrt{-1}$ n'est pas un carré dans F . Donc $F' := F(\sqrt{-1})$ est une extension de corps de F avec groupe de Galois $G = \text{Gal}(F'/F) \cong \mathbb{Z}/2$.

Soient G_F le groupe de Galois absolu de F et M un G_F -module galoisien discret de torsion première à 2. Pour tout entier $i \geq 0$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(F, M) & \longrightarrow & H^i(F', M)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{nr}}^i(F(X)/F, M) & \longrightarrow & H_{\text{nr}}^i(F'(X)/F', M)^G. \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des isomorphismes car 2 est inversible dans M et la flèche verticale de droite est un isomorphisme car $X_{F'}$ est rationnelle sur F' . Il

s'ensuit que l'application $H^i(F, M) \rightarrow H_{\text{nr}}^i(F(X)/F, M)$ est un isomorphisme. Il nous reste donc à montrer que l'application

$$H^3(F, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) \rightarrow H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$$

est un isomorphisme.

Soit $\alpha \in H_{\text{nr}}^3(F(X)/F, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$. D'après Kahn-Rost-Sujatha [KRS98, Theorem 5], il existe $\beta \in H^3(F(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ d'image $\alpha \in H^3(F(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$. Comme $X(R)$ est non vide, $X(F)$ est non vide. Soit $P \in X(F)$. En modifiant α par un élément convenable de $H^3(F, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$, on peut supposer que la spécialisation de α en P est nulle. Comme $X_{F'}$ est rationnelle sur F' , l'image de α dans $H_{\text{nr}}^3(F'(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ est alors nulle. L'extension $F'(X)/F'(\mathbb{P}^2)$ étant transcendantale pure, ceci entraîne que l'image de β dans $H^3(F'(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ est aussi nulle.

Soit η le point générique de Γ_F . On considère le résidu de β en un point ξ de codimension 1 de \mathbb{A}_F^2 différent de η . Ce résidu est dans le sous-groupe de $\text{Br}(F(\xi))$ engendré par $(-1, g)$ où on note g la fonction rationnelle induite par g en ξ . Considérons la classe

$$(-1, P(u, v), g(u, v)) \in H^3(F(\mathbb{P}^2), \mathbb{Z}/2) \subset H^3(F(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$$

où $P(u, v)$ est un polynôme séparable définissant les ξ autres que η pour lesquels le résidu de $\partial_\xi(\beta)$ est non nul. On remplace β par $\beta - (-1, P(u, v), g(u, v))$. Cet élément a encore pour image α dans $H^3(F(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$. On est ramené à supposer que β a tous ses résidus sur \mathbb{P}_F^2 nuls sauf peut-être $\partial_\eta(\beta)$ et $\partial_L(\beta)$.

Comme $X_{F'}$ est F' -rationnelle, l'image de α dans $H_{\text{nr}}^3(F'(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ provient de $H^3(F', \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$. Le morphisme $X_{F'} \rightarrow \mathbb{P}_{F'}^2$ admet une section rationnelle. Par spécialisation, ceci montre que l'image de β dans $H^3(F'(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ provient de $H^3(F', \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$.

Soit $p: S \rightarrow \mathbb{P}_R^2$ l'éclatement des points singuliers de Γ . On considère les complexes de Bloch-Ogus pour S_F et $S_{F'}$:

$$\begin{array}{ccc} H^3(F(S), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) & \longrightarrow & H^3(F'(S), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\gamma \in (S_F)^{(1)}} H^2(F(\gamma), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(1)) & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma' \in (S_{F'})^{(1)}} H^2(F'(\gamma'), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{m \in (S_F)^{(2)}} H^1(F(m), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & \bigoplus_{m' \in (S_{F'})^{(2)}} H^1(F'(m'), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2). \end{array}$$

Pour tout $m \in (S_F)^{(2)}$ de corps résiduel $F(m)$ contenant F' , on a un isomorphisme $F(m) \otimes_F F' \cong F(m_1) \times F(m_2)$, où $m_1, m_2 \in (S_{F'})^{(2)}$ sont les deux F' -points d'image m . Pour $i = 1, 2$, l'inclusion naturelle $F(m) \subset F(m_i)$ est une égalité et donc l'application de restriction $H^1(F(m), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(F(m_i), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme pour $i = 1, 2$. Comme l'image de β dans $H^3(F'(S), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ provient de $H^3(F', \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$, on conclut que $\partial_m(\partial_\gamma(\beta)) = 0$ pour tout $\gamma \in (S_F)^{(1)}$ et pour tout $m \in (S_F)^{(2)}$ dans la clôture de γ et corps résiduel $F(m)$ contenant F' .

Soit $\Delta \subset S$ la désingularisée de Γ , soit $m \in \Delta_F$ un point fermé et soit $\bar{m} \in \Gamma$ l'image de m . Si \bar{m} n'appartient pas à L_F et Γ_F est lisse en \bar{m} , alors il résulte du complexe de Bloch-Ogus sur \mathbb{P}_F^2 que $\partial_m(\partial_\Delta(\beta)) = 0$. Sinon, comme les points de $\Gamma_F \cap L_F$ et les points singuliers de Γ_F sont définis sur C , le corps résiduel $F(m)$ contient F' et donc $\partial_m(\partial_\Delta(\beta)) = 0$ d'après le paragraphe précédent. On conclut

que $\partial_\eta(\beta) \in H^2(F(\Delta), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ est non ramifié et donc provient de $H^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Comme l'image de β dans $H^3(F'(\Delta), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ est nulle, l'image de $\partial_\eta(\beta)$ dans $H^2(F'(\Delta), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ l'est aussi. Comme Δ_F est une conique lisse qui a un point rationnel sur F' , on conclut que $\partial_\eta(\beta)$ peut s'écrire $(-1, \rho)$ avec $\rho \in F^*$.

L'élément $\beta - (-1, \rho, g) \in H^3(F(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ a encore pour image α dans le groupe $H^3(F(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ et a tous ses résidus nuls sur \mathbb{P}_F^2 sauf peut-être au point générique de L . D'après [Ros96, Proposition 8.6, Remark 1.11, Remark 2.5], ceci suffit à assurer que $\beta - (-1, \rho, g)$ appartient à $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$, et donc α est dans l'image de $H^3(F, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$. \square

Remarque 6.19. Soit d le degré (pair) de la courbe Γ . Si $d = 2$, la R -variété X est une quadrique avec un R -point. C'est donc une variété rationnelle. Dans [BP24, Theorem 2.2], il est montré que la R -variété X est rationnelle si $d = 4$, et dans [BP24, Theorem 4.5] qu'elle n'est pas rationnelle si $d \geq 12$.

Remarque 6.20. En degré cohomologique 2, on a un résultat général. Soient R un corps réel clos, $g(u, v) \in R[u, v]$ un polynôme géométriquement irréductible et X la R -variété affine d'équation $y^2 + z^2 = f(u, v)$. Pour toute extension F/R l'application $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(F(X)/F)$ est surjective. La méthode pour établir ce résultat est analogue à celle de la proposition 6.18 mais plus simple. On utilise le comportement du groupe de Brauer non ramifié dans une fibration [CTS21, Chapter 11].

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Olivier Wittenberg pour avoir suggéré la deuxième preuve du théorème 1.1. Le deuxième auteur a bénéficié du soutien du projet NSF DMS-2201195.

RÉFÉRENCES

- [Ara75] Jón Kr. Arason. Cohomologische Invarianten quadratischer Formen. *J. Algebra*, 36(3):448–491, 1975. [19](#), [21](#)
- [SGA4II] M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier (eds.). *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), avec contributions par N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. [7](#)
- [ACTP17] Asher Auel, Jean-Louis Colliot-Thélène et Raman Parimala. Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane. *Brauer groups and obstruction problems*, volume 320 de *Progr. Math.*, pages 29–55. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. [4](#)
- [BP24] Olivier Benoist et Alena Pirutka. On the rationality of some real threefolds. *arXiv:2412.13624*, 2024. [2](#), [13](#), [27](#), [32](#)
- [BW19] Olivier Benoist et Olivier Wittenberg. Intermediate Jacobians and rationality over arbitrary fields, 2019. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 56(4):1029–1084, 2023. [2](#)
- [BW20a] Olivier Benoist et Olivier Wittenberg. On the integral Hodge conjecture for real varieties, I. *Invent. Math.*, 222(1):1–77, 2020. [27](#)
- [BW20b] Olivier Benoist et Olivier Wittenberg. On the integral Hodge conjecture for real varieties, II. *J. Éc. polytech. Math.*, 7:373–429, 2020. [27](#)
- [BW20c] Olivier Benoist et Olivier Wittenberg. The Clemens-Griffiths method over non-closed fields. *Algebr. Geom.*, 7(6):696–721, 2020. [15](#), [30](#)

VARIÉTÉS RÉELLES CONNEXES NON STABLEMENT RATIONNELLES

- [Blo86] Spencer Bloch. Algebraic cycles and higher K -theory. *Adv. in Math.*, 61(3):267–304, 1986. [17](#)
- [BCR87] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. [6](#)
- [BCR98] Jacek Bochnak, Michel Coste et Marie-Françoise Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. [1](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#), [9](#)
- [CTZ24] Ivan Cheltsov, Yuri Tschinkel et Zhijia Zhang. Rationality of singular cubic threefolds over \mathbb{R} . *arXiv:2411.14379*, 2024. [15](#)
- [CT95] Jean-Louis Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. [4](#), [16](#)
- [CTP90] Jean-Louis Colliot-Thélène et R. Parimala. Real components of algebraic varieties and étale cohomology *Invent. math.* 101(1) : 81–99, 1990. [29](#)
- [CTP16] Jean-Louis Colliot-Thélène et Alena Pirutka. Hypersurfaces quartiques de dimension 3: non-rationalité stable. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(2):371–397, 2016. [3](#), [4](#), [9](#), [10](#), [12](#), [18](#)
- [CTP24] Jean-Louis Colliot-Thélène et Alena Pirutka. Certaines fibrations en surfaces quadriques réelles. *arXiv:2406.00463*, 2024. [2](#), [12](#), [13](#), [27](#), [30](#)
- [CTS93] Jean-Louis Colliot-Thélène et Alexei N. Skorobogatov. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques. *K-Theory*, 7(5):477–500, 1993. [2](#), [13](#), [20](#)
- [CTS21] Jean-Louis Colliot-Thélène et Alexei N. Skorobogatov. *The Brauer-Grothendieck group*, volume 71 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Cham, 2021. [24](#), [32](#)
- [CTSSD87] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc et Peter Swinnerton-Dyer. Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I. *J. reine angew. Math.*, 373:37–107, 1987. [15](#), [25](#)
- [Com12] Annibale Comessatti. Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale. *Math. Ann.*, 73(1):1–72, 1912. [1](#), [3](#), [30](#)
- [CS92] Michel Coste et Masahiro Shiota. Nash triviality in families of Nash manifolds. *Invent. math.*, 108(2):349–368, 1992. [3](#), [5](#), [6](#)
- [DK81a] Hans Delfs et Manfred Knebusch. Semialgebraic topology over a real closed field. I. Paths and components in the set of rational points of an algebraic variety. *Math. Z.*, 177(1):107–129, 1981. [1](#)
- [DK81b] Hans Delfs et Manfred Knebusch. Semialgebraic topology over a real closed field. II. Basic theory of semialgebraic spaces. *Math. Z.*, 178(2):175–213, 1981. [5](#), [9](#)
- [Ful75] William Fulton. Rational equivalence on singular varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (45):147–167, 1975. [11](#)
- [Ful98] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, deuxième édition, 1998. [11](#)
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. [16](#)
- [HKT22] Brendan Hassett, János Kollár et Yuri Tschinkel. Rationality of even-dimensional intersections of two real quadrics. *Comment. Math. Helv.*, 97(1):183–207, 2022. [3](#), [15](#), [23](#), [29](#)
- [HT21] Brendan Hassett et Yuri Tschinkel. Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène. *Enseign. Math.*, 67(1-2):1–44, 2021. [1](#), [2](#)
- [Kah08] Bruno Kahn. *Formes quadratiques sur un corps*, volume 15 de *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2008. [4](#), [19](#), [21](#)

- [KRS98] Bruno Kahn, Markus Rost et Ramdorai Sujatha. Unramified cohomology of quadrics. I. *Amer. J. Math.*, 120(4):841–891, 1998. [25](#), [27](#), [28](#), [31](#)
- [KS00] Bruno Kahn et Ramdorai Sujatha. Unramified cohomology of quadrics. II. *Duke Math. J.*, 106 :449–484, 2001. [25](#)
- [Lam05] T. Y. Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. [4](#)
- [Mer81] A. S. Merkurjev. On the norm residue symbol of degree 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 261(3):542–547, 1981. [25](#)
- [Mer08] Alexander Merkurjev. Unramified elements in cycle modules. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(1):51–64, 2008. [4](#), [10](#)
- [Ros96] Markus Rost. Chow groups with coefficients. *Doc. Math.*, 1:No. 16, 319–393, 1996. [4](#), [17](#), [28](#), [32](#)
- [Sch94] Claus Scheiderer. *Real and étale cohomology*, volume 1588 de *Lecture Notes in Math.*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xxiv+273 pp. [3](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#)
- [Sch96] Claus Scheiderer. Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one. *Invent. math.*, 125(2):307–365, 1996. [24](#)
- [Sch24] Claus Scheiderer. *A course in real algebraic geometry—positivity and sums of squares*, volume 303 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2024. [9](#)
- [Sch21] Stefan Schreieder. Unramified cohomology, algebraic cycles and rationality. *Rationality of varieties*, volume 342 de *Progr. Math.*, pages 345–388. Birkhäuser/Springer, Cham, 2021. [10](#)
- [Wit37] Ernst Witt. Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *J. reine angew. Math.*, 176:31–44, 1937. [24](#)