
LOIS DE RÉCIPROCITÉ SUPÉRIEURES ET POINTS RATIONNELS

par

J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala & V. Suresh

Résumé. — Soit $K = \mathbb{C}((x, y))$ ou $K = \mathbb{C}((x))(y)$. Soit G un K -groupe algébrique linéaire connexe. Il a été établi que si G est K -rationnel, c'est-à-dire de corps des fonctions transcendant pur sur K , si un espace principal homogène sous G a des points rationnels dans tous les complétés de K par rapport aux valuations de K , alors il a un point rationnel. Nous montrons ici qu'en général l'hypothèse de K -rationalité ne peut être omise. Nous utilisons pour cela une obstruction d'un nouveau type, fondée sur les lois de réciprocité supérieure sur un schéma de dimension deux. Nous donnons aussi une famille d'espaces principaux homogènes pour laquelle cette obstruction raffinée à l'existence d'un point rationnel est la seule obstruction.

Abstract. — Let $K = \mathbb{C}((x, y))$ or $K = \mathbb{C}((x))(y)$. Let G be a connected linear algebraic group over K . Under the assumption that the K -variety G is K -rational, i.e. that the function field is purely transcendental, it was proved that a principal homogeneous space of G has a rational point over K as soon as it has one over each completion of K with respect to a valuation. In this paper we show that one cannot in general do without the K -rationality assumption. To produce our examples, we introduce a new type of obstruction. It is based on higher reciprocity laws on a 2-dimensional scheme. We also produce a family of principal homogeneous spaces for which the refined obstruction controls exactly the existence of rational points.

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Complexe de Bloch-Ogus et obstructions de réciprocité...	6
3. L'équation $(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$	16
4. Calculs locaux.....	19
5. Le principe local-global ne vaut pas en général.....	26

6. Une descente.....	37
Références.....	42

1. Introduction

1.1. Le cadre. — Soient \mathcal{X} un schéma régulier intègre de dimension 2 et un anneau local intègre R , hensélien, excellent, de corps résiduel k et $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ un morphisme projectif surjectif satisfaisant l'une des conditions suivantes.

(a) L'anneau R est un anneau de valuation discrète, les fibres de p sont de dimension 1, la fibre générique est lisse et géométriquement intègre. On appellera cela le cas « semi-global ».

(b) L'anneau R est de dimension 2, et p est birationnel. On appellera cela le cas « local ».

On note O le point fermé de $\text{Spec } R$. Si $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ n'est pas un isomorphisme, la fibre spéciale $X_0 = p^{-1}(O)$ est une courbe projective, en général réductible, sur le corps k .

Soit K le corps des fonctions rationnelles de \mathcal{X} . Soit $\Omega = \Omega_K$ la famille des valuations discrètes de rang 1 sur K . Pour $v \in \Omega$, on note K_v le hensélisé de K en v et R_v son anneau des entiers. Tant dans le cas « semi-global » que dans le cas « local », on a la propriété suivante des groupes de Brauer :

L'application $\text{Br } K \rightarrow \prod_{v \in \Omega} \text{Br } K_v$ est injective.

Cette propriété, valable quel que soit le corps résiduel k , semble connue de plusieurs auteurs. Dans le cas « semi-global » et R complet, on peut renvoyer à [12, Thm. 4.3]. Pour R hensélien, on peut l'établir dans les deux cas par une combinaison de [11, Thm. 1.8] et [11, Prop. 1.14], comme expliqué dans le cas « local » dans [20, §3].

Ceci donne donc un analogue du théorème de Hasse, Brauer, Noether en théorie du corps de classes.

Les problèmes suivants, analogues de problèmes résolus dans la situation où K est un corps global et Ω l'ensemble de ses places ([32], [3]), ont fait l'objet d'un certain nombre d'études, que nous mentionnons plus bas.

(1) Soit G un K -groupe linéaire lisse. L'application naturelle

$$H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, G)$$

a-t-elle un noyau trivial ? En d'autres termes, tout espace principal homogène (torseur) sous G qui a des points dans tous les K_v pour $v \in \Omega$ a-t-il un K -point ?

(2) Soit μ un K -module galoisien fini. Soit $i \geq 1$ un entier. L'application

$$H^i(K, \mu) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^i(K_v, \mu)$$

est-elle injective ?

(3) Soit Z une K -variété projective et lisse, géométriquement connexe, et qui est un espace homogène d'un K -groupe linéaire G . Si l'on a $Z(K_v)$ non vide pour tout $v \in \Omega$, a-t-on $Z(K)$ non vide ?

Sans hypothèse sur le corps k , dans le cas « semi-global », on peut citer des travaux de M. Artin (voir Grothendieck [15, III, §3]), des auteurs et M. Ojanguren [11], de Harbater, Hartmann et Krashen [17, 18, 19] et des auteurs [12]. Dans le cas « local », on peut citer [11] et Y. Hu [20].

Lorsque le corps k est séparablement clos, le corps K est alors un corps de dimension cohomologique 2, et les problèmes ci-dessus sont très proches des problèmes étudiés sur les corps globaux. On consultera le rapport général [27]. Tant dans le cas « semi-global » que dans le cas « local » on sait montrer dans de nombreux cas que l'on a $H^1(K, G) = 0$ (cf. [9, Thm. 1.2, Thm. 1.4]) pour G semi-simple simplement connexe, ce qui ramène le problème (1) pour G semi-simple au problème (2) pour $i = 2$. Dans le cas « local », on peut citer des travaux de Artin, Ford, Saltman, des auteurs et M. Ojanguren [11], des auteurs et P. Gille [9].

Lorsque le corps k est fini, dans le cas « semi-global », le problème (2) a une longue histoire. On se restreignait classiquement aux valuations triviales sur l'anneau R . Pour $H^2(K, \mu_n)$, l'injectivité est une variante du théorème de dualité de Tate et Lichtenbaum sur les variétés abéliennes sur les corps p -adiques. Pour $H^3(K, \mu_n^{\otimes 2})$, l'injectivité est essentiellement un résultat de Kato [24]. Lorsque l'on prend toutes les valuations discrètes, on conjecture ([12] dans le cas « semi-global ») que pour G semi-simple simplement connexe, la question (1) a une réponse affirmative. Ceci a été établi dans de nombreux cas ([12], [22], [28]). La question (3) fait aussi l'objet d'une conjecture. Pour les quadriques, des résultats sont obtenus dans [11], [22]. Un certain nombre de ces résultats utilisent l'invariant de Rost pour se ramener à l'énoncé de Kato sur $H^3(K, \mu_n^{\otimes 2})$. Dans le cas « local », on peut citer [11], [21], [22].

En ce qui concerne la question (2), on a donné des exemples ([11, Rem. 3.1.2], [9, §3.3, Rem. 2] dans le cas « local », [12, §6] dans le cas « semi-global ») pour lesquels l'application

$$H^1(K, \mathbb{Z}/2) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, \mathbb{Z}/2)$$

n'est pas injective – à la différence de la situation sur un corps de nombres. Dans ces exemples, le graphe des composantes de la fibre spéciale géométrique n'est pas un arbre : il contient un lacet. Pour plus de détails, voir [18]. L'énoncé

sur le groupe de Brauer montre que la question (2) pour $i = 2$ et $\mu = \mu_n$, avec $n \geq 1$ entier inversible sur \mathcal{X} , a une réponse affirmative. Dans le cas « semi-global », en égale caractéristique, Harbater, Hartmann et Krashen [19] viennent d'étendre ce résultat à tout $H^i(K, \mu_n^{\otimes(i-1)})$ pour $i \geq 2$.

Les exemples mentionnés à l'instant montrent qu'il convient de restreindre la question (1) au cas où G est connexe. Supposons que k est algébriquement clos de caractéristique zéro. Dans le cas « local », on a montré ([9, Thm. 5.2 (b) (ii)], [5, Thm. 7.9]) que la réponse à (1) est affirmative si G est un K -groupe linéaire *connexe K -rationnel*, i.e. de corps des fonctions transcendant pur sur K . Supposons de plus R complet. Dans le cas « semi-global », Harbater, Hartmann et Krashen [18, Thm. 8.10] ont établi que si G est un K -groupe linéaire *connexe K -rationnel*, alors la réponse à la question (1) est affirmative. Ce résultat est une conséquence du théorème « local » mentionné ci-dessus et d'un théorème local-global vis-à-vis d'un autre ensemble de surcorps de K , théorème fondamental des mêmes auteurs [17, Thm. 3.7], valable pour tout groupe K -rationnel sans aucune hypothèse sur le corps résiduel k .

Pour G/K semi-simple simplement connexe, non nécessairement K -rationnel, on a pu dans certains cas utiliser l'invariant de Rost pour donner une réponse positive à la question (1) : voir [12, §5], [22], [28], [19].

Tous ces résultats, analogues d'énoncés bien connus pour les groupes linéaires sur un corps de nombres [32], laissaient ouvertes la question (1) pour les groupes linéaires connexes quelconques, et, déjà pour $i = 2$, la question (2) sur les modules galoisiens finis.

1.2. Les résultats du présent article. — *Nous montrons que déjà dans le cas où le corps résiduel k est algébriquement clos, tant dans le cas « semi-global » que dans le cas « local », il existe des K -groupes G connexes pour lequel le principe local-global pour les espaces principaux homogènes, par rapport aux places dans Ω , est en défaut : la question (1) a en général une réponse négative.*

Dans le cas « local », ceci répond à une question posée il y a dix ans ([9, §3.4, Question]). Dans le cas « semi-global », ceci répond à une question motivée par [17] et posée explicitement dans [12].

Dans le cas « semi-global », nous donnons aussi de tels exemples avec k un corps fini, par exemple avec K le corps des fonctions d'une courbe sur un corps p -adique.

Nous commençons par donner un tel exemple avec G un K -tore dont le groupe de Brauer non ramifié est non trivial, ce qui implique en particulier que la K -variété G n'est pas K -rationnelle.

Des techniques connues permettent alors de donner un exemple de module galoisien fini μ tel que l'application $H^2(K, \mu) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^2(K_v, \mu)$ n'est pas

injective (réponse négative à la question (2)). *La présence d'un lacet dans la fibre spéciale joue un rôle-clé dans la construction des exemples.* Dans le cas « local », ceci résout une autre question posée il y a dix ans ([9, *ibidem*]).

Mutatis mutandis, une méthode de Serre (pour K corps global) permet alors de construire un K -groupe G semi-simple connexe (non simplement connexe) pour lequel la flèche diagonale $H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, G)$ a un noyau non trivial.

Lorsqu'on dispose d'exemples sur un corps K' extension finie d'un corps K , la restriction des scalaires à la Weil permet de fabriquer des exemples sur le corps K . On peut en fin de compte donner des exemples, dans le cas « local », sur $K = \mathbb{C}((X, Y))$, corps des fractions du corps des séries formelles $\mathbb{C}[[X, Y]]$ sur le corps des complexes, et dans le cas « semi-global », sur $K = \mathbb{C}((X))(Y)$.

Pour obtenir nos exemples, nous utilisons de façon concrète un *nouveau type d'obstruction au principe de Hasse sur le corps des fonctions de schémas réguliers intègres de dimension quelconque*, proposée par Colliot-Thélène il y a quelques années sur le modèle de l'obstruction de Brauer-Manin sur les corps de fonctions d'une variable sur un corps fini.

Cette obstruction exploite les lois de réciprocité pour la cohomologie galoisienne des modules finis constants, aux points fermés de tels schémas, comme fournies par la théorie de Bloch-Ogus [2], développée par Kato [24] puis par Jannsen et Saito [23] en situation d'inégale caractéristique. La construction générale et les propriétés de telles obstructions sont données au §2.

Le cas particulier de cette obstruction utilisé pour nos exemples est le suivant. Etant donné un schéma \mathcal{X} régulier intègre de dimension 2 de corps des fractions K , avec 2 inversible sur X , une K -variété Z projective, lisse, géométriquement intègre et un élément du groupe de cohomologie non ramifiée $H_{nr}^2(K(Z)/K, \mathbb{Z}/2)$, la combinaison des lois de réciprocité sur \mathcal{X} en les différents points fermés M de \mathcal{X} permet de définir une obstruction éventuelle à la propriété suivante : si Z admet des points dans tous les hensélisés K_γ pour γ courbe intègre sur \mathcal{X} , alors Z admet un K -point.

Les K -tores utilisés dans nos exemples initiaux sont donnés par une équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = 1$$

avec $a, b \in K^\times$. Tout espace homogène principal E sous un tel K -tore est donné par une équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$$

avec $c \in K^\times$. On a montré dans [8] que pour Z une K -compactification projective et lisse de la K -variété E , le quotient $\text{Br } Z/\text{Br } K$ est d'ordre au plus 2, et on a donné un générateur explicite $A \in {}_2\text{Br } Z = H_{nr}^2(K(Z)/K, \mathbb{Z}/2)$. Ceci est rappelé au §3. Au §4, nous discutons l'existence de points rationnels de E sur

les hensélisés de K , et nous calculons les valeurs prises par A sur ces points, ce qui nous permet de calculer l’obstruction de réciprocity supérieure associée à A en un point fermé du schéma \mathcal{X} . Nous étudions aussi le comportement de cette obstruction après éclatement d’un point de \mathcal{X} .

Nous sommes alors en mesure de construire, au §5, les exemples annoncés.

Au §6, sous l’hypothèse que le corps k est séparablement clos, nous montrons que si une variété Z du type ci-dessus a des points dans tous les hensélisés K_γ , et s’il existe un bon modèle \mathcal{X} sur lequel la classe $A \in {}_2\mathrm{Br} Z$ ne donne pas d’obstruction de réciprocity supérieure, *alors Z possède un K -point*. Nous opérons pour ce faire une *descente d’un nouveau type* au-dessus du corps des fonctions de tels schémas.

On peut ainsi se demander si le résultat obtenu pour les espaces principaux homogènes des K -tores du type ci-dessus s’étend aux espaces principaux homogènes sous un K -tore quelconque.

À la différence de notre précédent travail [12], le présent article n’utilise pas les travaux de Harbater, Hartmann et Krashen, si ce n’est, au paragraphe 5.4, pour traduire nos résultats dans leur cadre.

Une valuation discrète sur un corps K est ici une valuation discrète de rang 1, et le groupe de la valuation est \mathbb{Z} .

Si une telle valuation discrète est hensélienne, et que l’on note \hat{K} le complété de K , pour toute K -variété lisse Z , les conditions $Z(K) \neq \emptyset$ et $Z(\hat{K}) \neq \emptyset$ sont équivalentes.

Dans tout cet article, sauf mention du contraire, la cohomologie employée est la cohomologie étale des schémas, qui se spécialise à la cohomologie galoisienne sur les corps.

Pour $n > 0$ un entier et A un groupe abélien, on note ${}_nA$ le sous-groupe formé des éléments de A annulés par n .

2. Complexe de Bloch-Ogus et obstructions de réciprocity

2.1. Complexe de Bloch-Ogus–Kato. — Nous commençons par quelques rappels sur la théorie de Bloch-Ogus [2], en nous limitant au cadre qui nous intéresse ici. La théorie est bien documentée pour les variétés lisses sur un corps, il est plus délicat de trouver des références pour un schéma régulier quelconque. Il y a à cela deux raisons : on a besoin de théorèmes de pureté pour la cohomologie étale, et pour aller plus loin on a besoin de connaître la conjecture de Gersten. La pureté a été établie par Gabber [30, Thm. 3.1.1]. Mais la conjecture de Gersten n’est toujours pas connue dans le cadre régulier quelconque.

Soit \mathcal{X} un schéma excellent intègre de dimension d , tel que pour tout fermé irréductible $F \subset \mathcal{X}$, on a la propriété $\dim(F) = d - \text{codim}_{\mathcal{X}}(F)$.

On note K le corps de fonctions de \mathcal{X} . On note $\mathcal{X}^{(i)}$ l'ensemble des points de codimension i de \mathcal{X} , et on note $\kappa(x)$ le corps résiduel en un point $x \in \mathcal{X}$. Soit $n > 0$ un entier inversible sur \mathcal{X} . Pour $i > 0$, on note $\mu_n^{\otimes i}$ le produit tensoriel i -fois du faisceau étale μ_n (racines n -ièmes de 1) avec lui-même, on note $\mu_n^0 = \mathbb{Z}/n$ et, pour $i < 0$, on définit $\mu_n^{\otimes i} = \text{Hom}(\mu_n^{\otimes(-i)}, \mathbb{Z}/n)$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a le *complexe* de Bloch-Ogus arithmétique $C_{r,i}$:

$$0 \rightarrow H^r(K, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} H^{r-2}(\kappa(M), \mu_n^{\otimes(i-2)}) \rightarrow \dots$$

où les degrés croissent vers la droite, le groupe $H^r(K, \mu_n^{\otimes i})$ étant placé en degré 0. Ces complexes sont construits par Kato [24, §1, Prop. 1.7] (avec une autre graduation) et étudiés de façon systématique par Jannsen et Saito [23]. Les applications résidus

$$\partial_\gamma : H^r(K, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)})$$

pour $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ et

$$\partial_{\gamma,M} : H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow H^{r-2}(\kappa(M), \mu_n^{\otimes(i-2)})$$

pour $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ et $M \in \mathcal{X}^{(2)}$ sont obtenues par normalisation et sommation à partir des résidus classiques sur un anneau de valuation discrète.

Lorsque \mathcal{X} est un schéma régulier, hypothèse que nous faisons désormais, sous certaines hypothèses, on peut donner des informations sur les groupes d'homologie du complexe ci-dessus : voir [24] et [31].

Supposons de plus \mathcal{X} de dimension 2. Considérons le complexe $C_{2,2}$:

$$0 \rightarrow H^2(K, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times n} \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n \rightarrow 0,$$

où les trois termes du milieu sont, de gauche à droite, placés en degré 0, 1, 2.

On a $H^2(C_{2,2}) = CH_0(\mathcal{X})/n$, où $CH_0(Y)$ désigne le groupe de Chow des cycles de dimension zéro sur un schéma Y .

Sous l'hypothèse que l'on a $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$ sur \mathcal{X} , le groupe $H^0(C_{2,2})$, par un résultat de pureté de Auslander–Goldman et Grothendieck [15, II, Prop. 2.3], est isomorphe au sous-groupe de n -torsion du groupe de Brauer de \mathcal{X} .

Proposition 2.1. — *Soient \mathcal{X} un schéma régulier intègre de dimension 2 et un anneau local intègre R , hensélien, excellent, de corps résiduel k , puis $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ un morphisme projectif. Supposons que l'on est dans l'un des cas suivants.*

(a) *L'anneau R est un anneau de valuation discrète, les fibres de $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ sont de dimension 1, la fibre générique est lisse et géométriquement intègre.*

(b) *L'anneau R est de dimension 2, et p est birationnel.*

Soit K le corps des fonctions rationnelles de \mathcal{X} . Soit $n > 0$ un entier inversible dans k . Supposons donné un isomorphisme $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$ sur \mathcal{X} .

(i) *On a un complexe naturel*

$$0 \rightarrow {}_n\text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times n} \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

covariant en \mathcal{X} par morphisme propre de R -schémas.

(ii) *Le complexe est exact en son troisième terme.*

Si k est un corps séparablement clos ou un corps fini, le complexe est exact en son premier terme.

Si k est séparablement clos et la conjecture de Gersten vaut pour \mathcal{X} et le faisceau μ_n , alors ce complexe est une suite exacte.

Si k est un corps fini et si la conjecture de Gersten vaut pour \mathcal{X} et le faisceau μ_n , alors ce complexe est exact sauf au terme médian, où l'homologie est un sous-groupe de \mathbb{Z}/n .

Démonstration. — Pour le point (i), en particulier pour la functorialité covariante par morphisme propre, nous renvoyons le lecteur à [23]. Voir aussi la remarque 2.4 ci-dessous.

Comme R est hensélien, on a $CH_0(\mathcal{X}) = 0$. Ceci assure la nullité de l'homologie du complexe en le terme $\bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n$.

On a $\text{Br } \mathcal{X} = 0$ si k est séparablement clos (voir [11, Cor. 1.10]) ou si k est fini (voir [11, Cor. 1.11]). Ceci assure alors la nullité de l'homologie du complexe en le terme ${}_n\text{Br } K$.

Pour X_0/k une courbe sur un corps séparablement clos, on a $H_{\text{ét}}^3(X_0, \mu_n^{\otimes 2}) = 0$ et, si X_0 est propre et connexe, $H_{\text{ét}}^2(X_0, \mu_n^{\otimes 2}) = \mu_n$.

Pour X_0/k une courbe propre géométriquement connexe sur un corps fini k de clôture algébrique k_s , on a

$$H_{\text{ét}}^3(X_0, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^1(k, H^2(X_0 \times_k k_s, \mu_n^{\otimes 2})) = H^1(k, \mu_n) = k^\times / k^{\times n} \simeq \mathbb{Z}/n,$$

le dernier isomorphisme provenant de l'hypothèse $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$.

Le théorème de changement de base propre donne des isomorphismes $H_{\text{ét}}^r(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes i}) \simeq H_{\text{ét}}^r(X_0, \mu_n^{\otimes i})$. On a donc $H_{\text{ét}}^3(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2}) = 0$ si k est séparablement clos et $H_{\text{ét}}^3(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{Z}/n$ si k est fini.

Sous la conjecture de Gersten pour la cohomologie étale à coefficients μ_n sur le schéma \mathcal{X} , on a une suite exacte

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow H^1(C_{2,2}) \rightarrow H^3(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^0(C_{3,2}) \rightarrow H^2(C_{2,2})$$

(on note ici $H^r(C_{j,i})$ le r -ième groupe d'homologie du complexe de groupes abéliens $C_{j,i}$). On a en particulier une inclusion $H^1(C_{2,2}) \hookrightarrow H^3(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2})$, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 2.2. — Si k est un corps fini, il est vraisemblable que le groupe

$$H^0(C_{3,2}) = \text{Ker}[H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in \mathcal{X}^{(1)}} H^2(\kappa(x), \mu_n)]$$

est nul. Dans le cas (b), voir [11, Prop. 3.8] et [21, Prop. 4.1]. Dans le cas (a), et pour R complet, c'est un résultat de Kato [24, Thm. 5.2], voir aussi [19, Thm. 3.3.6]. Pour k fini, le groupe de cohomologie médian dans la proposition est alors égal à \mathbb{Z}/n .

Remarque 2.3. — Bloch et Ogus [2] ont établi la conjecture de Gersten pour la cohomologie étale pour les variétés lisses sur un corps. Le résultat a été étendu par I. A. Panin [26] en 2003 aux schémas réguliers contenant un corps, en utilisant un théorème de Popescu.

Pour R une k -algèbre de corps résiduel k séparablement clos, et n entier non nul dans k et \mathcal{X} comme ci-dessus, on a donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow {}_n\text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times n} \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte joue un rôle-clé au §6 ci-dessous.

Elle est analogue à la suite fondamentale de la théorie du corps de classes sur un corps global K (corps de nombres ou corps de fonctions d'une variable sur un corps fini)

$$0 \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_K} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Remarque 2.4. — Plaçons-nous dans le cas « semi-global ». Supposons donné un isomorphisme $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$ sur R . Soit F le corps des fractions de l'anneau de valuation discrète R . La functorialité covariante par morphisme propre du complexe de Bloch-Ogus pour le morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ donne un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccc} {}_n\text{Br } K & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times n} & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F^\times / F^{\times n} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \end{array}$$

qu'il est d'ailleurs facile d'établir directement. Les flèches verticales médianes sont nulles sur les composantes de X_0 , et sont induites par la norme sur les corps de fonctions des autres courbes. Les flèches verticales de droite sont induites par le degré relatif au corps résiduel k . La commutativité de ce diagramme est facile à établir. Le seul point non trivial est la commutativité du

carré de droite, qui reflète la loi de réciprocité de Weil sur la fibre générique de \mathcal{X}/R .

Le noyau de la surjection $F^\times/F^{\times n} \rightarrow \mathbb{Z}/n$ est $R^\times/R^{\times n} \xrightarrow{\sim} k^\times/k^{\times n}$. Pour k séparablement clos, ce noyau est donc trivial; pour k fini, il est isomorphe à \mathbb{Z}/n .

Il est vraisemblable que l'application depuis l'homologie médiane du complexe supérieur dans $k^\times/k^{\times n}$ s'identifie à la flèche composée

$$H^1(C_{2,2}) \rightarrow H_{\text{ét}}^3(\mathcal{X}, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^3(X_0, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^1(k, H^2(X_0 \times_k k_s, \mu_n^{\otimes 2})),$$

où la première flèche est comme dans (2.1), la seconde est obtenue par le théorème de changement de base propre, et la troisième vient de la suite spectrale de Leray pour la k -courbe X_0 .

2.2. Obstruction de réciprocité au-dessus d'une courbe. — Pour mettre les obstructions du paragraphe suivant en perspective, nous rappelons dans cette sous-section une obstruction introduite dans un cas particulier dans [7] par analogie avec l'obstruction définie par Manin [25] sur un corps de nombres. Avec les notations ci-dessous, le cas particulier où $r = 2$, $i = 1$ et $F = \mathbb{F}$ est un corps fini correspond à l'obstruction de Brauer-Manin sur le corps global $\mathbb{F}(X)$, du moins pour la torsion première à la caractéristique. En degré cohomologique supérieur, sur un corps de fonctions d'une variable sur F le corps des réels, resp. sur F un corps p -adique, cette obstruction a été utilisée par Ducros [13], resp. par Harari et Szamuely [16]. Ils ont montré que pour certaines classes de variétés, les obstructions ainsi définies à l'existence de points rationnels sont les seules.

Soit F un corps. Soit X une F -courbe géométriquement intègre, projective et lisse. Soit $K = F(X)$. Soit n un entier premier à la caractéristique. Pour $x \in X^{(1)}$ on note K_x le corps des fractions du hensélisé $O_{X,x}^h$ de l'anneau local $O_{X,x}$ et $F(x)$ le corps résiduel.

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Nous prenons ici $\mu_n^{\otimes i}$ comme coefficients. On pourrait prendre tout module galoisien fini sur F d'ordre premier à la caractéristique de F .

On a la longue suite exacte de localisation en cohomologie étale :

$$H^r(X, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow H^r(F(X), \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow H^{r+1}(X, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow$$

pour laquelle nous renvoyons au rapport [6, §3].

L'application $\partial_x : H^r(F(X), \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)})$ est le résidu en x (voir [14, §6.8]).

On dispose des applications de corestriction

$$\text{Cores}_{F(x)/F} : H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow H^{r-1}(F, \mu_n^{\otimes(i-1)}).$$

On a la loi de réciprocité de Weil généralisée : la suite suivante est un complexe

$$H^r(F(X), \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow H^{r-1}(F, \mu_n^{\otimes(i-1)}).$$

Voir à ce sujet [33, Annexe, §3], [14, §6.9].

Soit Z une K -variété intègre projective et lisse. Nous renvoyons à [6, §4] pour la définition et les propriétés de base de la cohomologie non ramifiée.

D'après la conjecture de Gersten pour la cohomologie étale, établie par Bloch et Ogus [2], en tout point P de la K -variété lisse Z une classe dans $H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$ est l'image d'un (unique) élément de $H^r(O_{Z,P}, \mu_n^{\otimes i})$. Pour tout corps L contenant K , ceci définit un accouplement

$$\begin{aligned} H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times Z(L) &\rightarrow H^r(L, \mu_n^{\otimes i}) \\ (\alpha, P) &\mapsto \alpha(P). \end{aligned}$$

Dans la situation ci-dessus, pour chaque $x \in X^{(1)}$, en utilisant le résidu en x , on obtient un accouplement

$$\begin{aligned} H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times Z(K_x) &\rightarrow H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \\ (\alpha, P_x) &\mapsto \partial_x(\alpha(P_x)). \end{aligned}$$

Proposition 2.5. — (i) *L'accouplement*

$$\begin{aligned} H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times \prod_{x \in X^{(1)}} Z(K_x) &\rightarrow H^{r-1}(F, \mu_n^{\otimes(i-1)}) \\ (\alpha, \{P_x\}) &\mapsto \sum_{x \in X^{(1)}} \text{Cores}_{F(x)/F}(\partial_x(\alpha(P_x))) \end{aligned}$$

est bien défini.

(ii) *L'accouplement est nul lorsque $\{P_x\}$ est dans l'image diagonale de $Z(K)$ dans $\prod_{x \in X^{(1)}} Z(K_x)$.*

Démonstration. — Pour établir (i), il suffit de montrer que pour presque tout $x \in X^{(1)}$, l'application

$$\begin{aligned} Z(K_x) &\rightarrow H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \\ P &\mapsto \partial_x(\alpha(P)) \end{aligned}$$

définie par α est nulle. Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ et $\mathcal{Z} \rightarrow U$ un modèle projectif et lisse de $Z \rightarrow \text{Spec } K$. Une classe dans $H^r(F(\mathcal{Z}), \mu_n^{\otimes i})$ n'a qu'un nombre fini de résidus non nuls sur la F -variété lisse \mathcal{Z} . Comme par hypothèse α a tous ses résidus nuls sur Z , quitte à restreindre U on peut supposer que α a tous ses résidus nuls sur \mathcal{Z} . Soit alors $x \in U$ et $P \in Z(K_x)$. On a $Z(K_x) = \mathcal{Z}(O_{X,x}^h)$. Le point P définit donc un morphisme de $\text{Spec } O_{X,x}^h$ dans \mathcal{Z} . Soit $N \in \mathcal{Z}$ l'image du point fermé de $O_{X,x}^h$. D'après Bloch-Ogus (la conjecture de Gersten) appliqué à la k -variété lisse \mathcal{Z} , la classe α est image d'un élément bien défini de l'anneau local $H^r(O_{\mathcal{Z},N}, \mu_n^{\otimes i})$. On voit alors que $\alpha(P)$

appartient à $H^r(O_{X,x}^h, \mu_n^{\otimes i})$, et a donc un résidu nul dans $H^{r-1}(F(x), \mu_n^{\otimes(i-1)})$. Ceci montre que l'accouplement

$$H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times \prod_{x \in X^{(1)}} Z(K_x) \rightarrow H^{r-1}(F, \mu_n^{\otimes(i-1)})$$

$$(\alpha, \{P_x\}) \mapsto \sum_{x \in X^{(1)}} \text{Cores}_{F(x)/F}(\partial_x(\alpha(P_x)))$$

est bien défini. Ceci établit le point (i). Le point (ii) est une conséquence de la loi de réciprocité de Weil sur la courbe X . \square

Exemples 2.6. — On ne saurait espérer, même pour les variétés les plus simples, que cette obstruction cohomologique suffise à décider de l'existence d'un point. L'exemple suivant est une variante simple de celui donné dans [12, Rem. 7.9]. Soit $X/\mathbb{C}((t))$ la courbe elliptique donnée par l'équation affine

$$\rho^2 = \sigma(\sigma + 1)(\sigma - t).$$

Soit K son corps des fonctions. Soit Z/K la conique d'équation projective

$$U^2 - \sigma V^2 - tW^2 = 0.$$

Au voisinage de tout point fermé $x \in X$, on peut écrire $\sigma \in K$ comme le produit d'une unité en x et d'un carré. Comme le corps résiduel de tout tel point est un corps C_1 , ceci implique $Z(K_x) \neq \emptyset$ pour tout tel point x . Comme Z est une conique, les applications $H^i(K, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H_{nr}^i(K(Z)/K, \mathbb{Z}/n)$ sont toutes surjectives. Il n'y a donc pas d'obstruction de réciprocité donnée par la proposition 2.5.

La courbe elliptique X admet une réduction modulo $t = 0$ d'équation affine $\rho^2 = \sigma^2(\sigma + 1)$ sur \mathbb{C} , qui est birationnelle à $\tau^2 = \sigma + 1$ et donc à $\text{Spec } \mathbb{C}[\tau]$ via $\rho = \tau\sigma$. La conique Z n'a pas de point dans le hensélisé K_t de K le long de $t = 0$, car le résidu de l'algèbre de quaternions (σ, t) est donné par $\sigma = \tau^2 - 1 \in \mathbb{C}(\tau)^\times / \mathbb{C}(\tau)^{\times 2}$.

Ceci implique $Z(K) = \emptyset$. Comme Z est une K -compactification lisse d'un espace principal homogène sous un K -tore, ceci donne aussi un exemple du même type pour de telles variétés. Cela donne aussi un exemple où l'application $\text{Br } K \rightarrow \prod_{x \in X^{(1)}} \text{Br } K_x$ n'est pas injective.

2.3. Au-dessus d'une base de dimension quelconque : de nouvelles obstructions de réciprocité. — Les obstructions suivantes à l'existence de points rationnels ont été proposées il y a quelques années par Colliot-Thélène. Faute d'application, elles n'avaient pas été publiées. Le présent article les met pour la première fois en œuvre au-dessus d'une base de dimension plus grande que 1.

Proposition 2.7. — Soit \mathcal{X} un schéma régulier excellent intègre de dimension d , tel que pour tout fermé irréductible $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$, on a la propriété $\dim(\mathcal{F}) = d - \text{codim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{F})$. Soit K le corps de fonctions de \mathcal{X} . Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier inversible sur \mathcal{X} et soient $r \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$. Soit Z une K -variété projective, lisse, géométriquement intègre.

(i) Pour tout point γ de codimension 1 de \mathcal{X} , on dispose d'une évaluation

$$H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times Z(K_\gamma) \rightarrow H^r(K_\gamma, \mu_n^{\otimes i})$$

$$(\alpha, P) \rightarrow \alpha(P)$$

qui par application du résidu ∂_γ induit un accouplement

$$H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times Z(K_\gamma) \rightarrow H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)}).$$

(ii) Supposons que \mathcal{X} est un schéma au-dessus d'un corps. Pour tout $\alpha \in H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$, il existe un ouvert U dépendant de α tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ appartenant à U l'application

$$Z(K_\gamma) \rightarrow H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)})$$

définie par α a son image nulle.

(iii) Supposons que \mathcal{X} est un schéma au-dessus d'un corps. On dispose d'un accouplement bien défini

$$H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i}) \times \prod_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_\gamma) \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^2} H^{r-2}(\kappa(M), \mu_n^{\otimes(i-2)})$$

$$(\alpha, \{P_\gamma\}) \mapsto \sum_{\gamma} \partial_{\gamma, M}(\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma)))$$

et l'accouplement est nul lorsque $\{P_x\}$ est dans l'image diagonale de $Z(K)$ dans $\prod_{x \in \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_x)$.

(iv) Si $r = 1$, ou si $r = 2$ et $i = 1$, les énoncés valent sans supposer que \mathcal{X} est un schéma au-dessus d'un corps.

Démonstration. — L'énoncé (i) résulte de la théorie de Bloch-Ogus pour la variété lisse Z sur le corps K .

Il existe un ouvert non vide $U \subset \mathcal{X}$ et un modèle projectif et lisse $\mathcal{Z} \rightarrow U$ de Z/K . Pour $\alpha \in H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$ donné, après restriction de U on peut assurer que α a tous ses résidus triviaux sur \mathcal{Z} . Soit $P_\gamma \in Z(K_\gamma)$. Comme on a $Z(K_\gamma) = \mathcal{Z}(O_{\mathcal{Z}, \gamma}^h)$, le point P_γ s'étend en un morphisme $\text{Spec } O_{\mathcal{Z}, \gamma}^h \rightarrow \mathcal{Z}$. Soit N l'image du point fermé de $\text{Spec } O_{\mathcal{Z}, \gamma}^h$. Par la théorie de Bloch-Ogus sur le schéma régulier \mathcal{Z} (on utilise ici [26]), la classe α provient d'une classe dans $H^r(O_{\mathcal{Z}, N}, \mu_n^{\otimes i})$. On a donc $\alpha(P_\gamma) \in H^r(O_{\mathcal{Z}, \gamma}^h, \mu_n^{\otimes i})$ et donc $\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma)) = 0$. Ceci établit (ii) et donc le fait que l'accouplement en (iii) est bien défini.

Par la conjecture de Gersten [2] pour la K -variété Z , pour tout $\alpha \in H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$ et tout $P \in Z(K)$, la classe α est représentée par un

unique élément de $H^r(O_{Z,P}, \mu_n^{\otimes i})$, qui définit une classe $\alpha(P) \in H^r(K, \mu_n^{\otimes i})$, dont l'image dans $H^r(K_\gamma, \mu_n^{\otimes i})$ coïncide avec sa valeur calculée sur K_γ . La fin de l'énoncé (iii) résulte alors du fait que les applications ∂_γ et $\partial_{\gamma,M}$ définissent un complexe

$$H^r(K, \mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^{r-1}(\kappa(\gamma), \mu_n^{\otimes(i-1)}) \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} H^{r-2}(\kappa(M), \mu_n^{\otimes(i-2)})$$

comme rappelé au début du paragraphe 2.1.

L'énoncé (iv) résulte du fait que dans ces deux cas, pour tout schéma régulier \mathcal{Z} de corps de fonctions F , si une classe dans $H^r(F, \mu_n^{\otimes i})$ a tous ses résidus triviaux sur \mathcal{Z} , alors elle provient de $H_{\text{ét}}^r(\mathcal{Z}, \mu_n^{\otimes i})$. Le cas $r = 1$ est classique, le cas $r = 2$ est une conséquence du théorème de pureté absolue de Gabber [30, Thm. 3.1.1]. \square

Remarque 2.8. — Sous les hypothèses de la proposition 2.7, on voit donc qu'une condition nécessaire d'existence d'un K -point sur Z est l'existence d'une famille $\{P_\gamma\} \in \prod_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_\gamma)$ telle que, pour tout i , tout r , tout n , tout $\alpha \in H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$, et tout $M \in \mathcal{X}^{(2)}$, on ait

$$\sum_{\gamma} \partial_{\gamma,M}(\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma))) = 0 \in H^{r-2}(\kappa(M), \mu_n^{\otimes(i-2)}),$$

où la somme porte sur les $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ dont l'adhérence contient M .

Remarque 2.9. — Soit $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme propre birationnel de schémas excellents réguliers intègres satisfaisant l'hypothèse sur les dimensions faite au début de la proposition 2.7. Soit K le corps de fonctions de \mathcal{X} . Soit Z une K -variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $\alpha \in H_{nr}^r(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes i})$. Sous les hypothèses de la proposition 2.7, s'il existe une famille $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{Y}^{(1)}}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}^{(2)}$ on ait

$$\sum_{\gamma} \partial_{\gamma,M}(\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma))) = 0,$$

alors la famille $\{Q_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{X}^{(1)}}$ définie par $Q_\zeta = P_\gamma$, où $\gamma \in \mathcal{Y}$ désigne l'unique point de codimension 1 de \mathcal{Y} au-dessus de ζ satisfait, pour tout $N \in \mathcal{X}^{(2)}$

$$\sum_{\zeta} \partial_{\zeta,N}(\partial_\zeta(\alpha(Q_\zeta))) = 0 \in H^{r-2}(\kappa(N), \mu_n^{\otimes(i-2)}).$$

Ceci résulte de la la functorialité covariante par morphisme propre du complexe de Bloch-Ogus [23, §2].

On peut se demander s'il existe un énoncé permettant de remonter de propriétés sur \mathcal{X} à des propriétés sur \mathcal{Y} . On en verra un exemple très particulier à la section 4.4.

Proposition 2.10. — Soient k un corps séparablement clos, R une k -algèbre locale intègre, hensélienne, excellente, de corps résiduel k , de corps des fractions F , puis \mathcal{X} un schéma régulier intègre de dimension 2 équipé d'un morphisme projectif $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$. Supposons que l'on est dans l'un des cas suivants.

(a) L'anneau R est un anneau de valuation discrète, les fibres de p sont de dimension 1, la fibre générique est lisse et géométriquement intègre.

(b) L'anneau R est de dimension 2, et p est birationnel.

Soit K le corps des fonctions rationnelles de \mathcal{X} . Soit $n > 0$ un entier inversible dans k . Soit Z une K -variété projective, lisse, géométriquement intègre, et soit $A \in {}_n\text{Br } Z$. Fixons un isomorphisme $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mu_n$.

Supposons qu'il existe une famille $\{P_\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$, telle que la famille $\{\partial_\gamma(A(P_\gamma))\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$ soit dans le noyau de la flèche $\bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} k(\gamma)^\times / k(\gamma)^{\times n} \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^2} \mathbb{Z}/n$. Alors :

(i) Il existe $\alpha \in \text{Br } K$ tel que pour tout γ on ait $A(P_\gamma) = \alpha \in \text{Br } K_\gamma$, et cet élément α est uniquement déterminé.

(ii) Dans le cas (a), soit $X = \mathcal{X} \times_R F$. Alors $\{\partial_\gamma(A(P_\gamma))\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$ est dans le noyau de la flèche

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \text{Cores}_{F(\gamma)/k} : \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(F(\gamma), \mu_n) \rightarrow H^1(F, \mu_n).$$

Démonstration. — L'énoncé (i) résulte de la proposition 2.1 et de la remarque 2.3 et du fait que, comme k est séparablement clos, la flèche de résidu

$${}_n\text{Br } K_\gamma \rightarrow k(\gamma)^\times / k(\gamma)^{\times n}$$

est un isomorphisme. L'énoncé (ii) résulte de la remarque 2.4 et du fait que la flèche

$$F^\times / F^{\times n} \rightarrow \mathbb{Z}/n$$

induite par la valuation est un isomorphisme. \square

Remarque 2.11. — Pour k un corps fini plutôt que séparablement clos, l'énoncé ci-dessus ne vaut pas. On a une obstruction possible : la famille $\{\partial_\gamma(A(P_\gamma))\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$ pourrait être un élément non nul dans l'homologie du complexe de Bloch-Ogus, qui est alors un sous-groupe de \mathbb{Z}/n (Prop. 2.1).

Pour κ un corps fini il serait intéressant d'utiliser les obstructions à l'existence d'un K -point sur Z définies par le groupe $H_{nr}^3(K(Z)/K, \mu_n^{\otimes 2})$. Voir à ce sujet [16].

3. L'équation $(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$

3.1. Rappels. — Soit K un corps de caractéristique différente de 2, soient $a, b, c \in K^\times$. Dans [8], on a étudié le K -tore Q défini par l'équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = 1.$$

Pour $c \in K^\times$, on note $E = E_c$ l'espace principal homogène sous Q défini par l'équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c,$$

avec $c \in K^\times$. Tout espace principal homogène sous Q s'écrit ainsi pour un c convenable.

Soit L la K -algèbre étale $K[u, v]/(u^2 - a, v^2 - b)$. Pour $\rho \in K^\times$, soit K_ρ la K -algèbre étale $K[x]/(x^2 - \rho)$. On définit des inclusions naturelles et compatibles $K_a \subset L$, $K_b \subset L$, $K_{ab} \subset L$. Soit $d \in K^\times$. Soit E'_d la K -variété d'équation

$$\text{Norm}_{L/K}(\Xi) = d.$$

La K -variété E'_d est un espace principal homogène sous le K -tore T d'équation

$$\text{Norm}_{L/K}(\Xi) = 1,$$

et tout espace principal homogène sous T est de la forme E'_d pour d convenable.

Rappelons qu'un espace principal homogène E d'un K -tore M a un point rationnel sur K si et seulement si la classe $[E] \in H^1(K, M)$ est nulle.

D'après [8, Prop. 3.1], on a une suite exacte de K -tores

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_{m, K}^2 \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où l'application $Q \rightarrow T$ est induite par l'application $K_a^\times \times K_b^\times \times K_{ab}^\times \rightarrow L^\times$ envoyant un triplet $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_{ab})$ sur le produit $\alpha_a \cdot \alpha_b \cdot \alpha_{ab}$. L'application $H^1(K, Q) \rightarrow H^1(K, T)$ envoie la classe de $E = E_c$ sur la classe de E'_{c^2} .

Le théorème 90 de Hilbert donne $H^1(K, \mathbb{G}_m) = 0$. La suite exacte ci-dessus induit donc une injection fonctorielle en le corps de base

$$H^1(K, Q) \hookrightarrow H^1(K, T).$$

Lemme 3.1. — Soient K un corps et M un K -tore. Il existe un K -groupe de type multiplicatif fini μ et une inclusion fonctorielle en le corps de base

$$H^1(K, M) \hookrightarrow H^2(K, \mu).$$

Démonstration. — Soit L/K une extension finie galoisienne, de groupe de Galois G , déployant le K -tore M . Soit $n = [L : K]$ son degré. Soit $\mu = {}_n M$ le noyau de la multiplication par n . La multiplication par n sur M induit une suite exacte K -groupes de type multiplicatif

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 1.$$

Le théorème 90 de Hilbert et un argument de corestriction-restriction montre que le groupe $H^1(K, M)$ est annulé par n . La suite exacte de cohomologie donne donc naissance à un plongement $H^1(K, M) \hookrightarrow H^2(K, \mu)$, qui est fonctoriel en le corps de base. \square

Appliquant le lemme au cas $M = T$, on obtient une inclusion $H^1(K, T) \hookrightarrow H^2(K, \mu)$ fonctorielle en K , et donc aussi une inclusion $H^1(K, Q) \hookrightarrow H^2(K, \mu)$ fonctorielle en K .

Soit Z une K -compactification lisse de $E = E_c$. On sait [10] que sur tout corps il existe une telle compactification, qu'on peut même choisir équivariante pour l'action de Q sur lui-même. On sait [4, Lemma 2.1 (iv)] que l'on a $Z(K) \neq \emptyset$ si et seulement si $E(K) \neq \emptyset$.

On a montré dans [8] que le groupe de Brauer de Z modulo le groupe de Brauer de K est engendré par la classe de l'algèbre de quaternions

$$A = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \text{Br } K(E).$$

Dans le présent article, il nous suffira d'utiliser le fait évident que la classe A appartient à $\text{Br } E$.

En utilisant la bilinéarité du symbole (α, β) , la relation $(u^2 - av^2, a) = 0$ pour tout u, v, a avec $a(u^2 - av^2) \neq 0$, et l'équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c,$$

on voit que la classe $A = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \text{Br } K(E)$ peut s'écrire de multiples façons :

$$(3.1) \quad A = (X_1^2 - aY_1^2, b) = (X_1^2 - aY_1^2, ab),$$

$$(3.2) \quad A = (X_2^2 - bY_2^2, a) + (c, ab) = (X_2^2 - bY_2^2, ab) + (c, ab) = (c(X_2^2 - bY_2^2), ab),$$

$$(3.3) \quad A = (X_3^2 - abY_3^2, a) + (c, b) = (X_3^2 - abY_3^2, b) + (c, b) = (c(X_3^2 - abY_3^2), b).$$

3.2. Un exemple. — Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, F son corps des fractions, k son corps résiduel, supposé parfait de caractéristique différente de 2, π une uniformisante de R . On note v la valuation de F .

Soient $\mathcal{X} = \mathbf{P}_R^1$ et $X = \mathbf{P}_F^1$. Soit K le corps des fonctions rationnelles sur \mathcal{X} . Notons $\text{Spec } R[x] = \mathbf{A}_R^1 \subset \mathbf{P}_R^1$. Notons η le point générique de la fibre spéciale $\mathbf{P}_k^1 \subset \mathbf{P}_R^1$.

Soit $c \in F^\times$. La réunion des supports des diviseurs de x , $x + 1$, c et de la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux sur $\mathcal{X} = \mathbf{P}_R^1$, et ce diviseur est un arbre, union de $x = 0$, $x + 1 = 0$, $x = \infty$ et $\pi = 0$.

Soit E_c la k -variété définie par l'équation

$$(X_1^2 - xY_1^2)(X_2^2 - (x + 1)Y_2^2)(X_3^2 - x(x + 1)Y_3^2) = c.$$

Proposition 3.2. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, supposons que k est le corps \mathbb{C} des complexes, ou que k est un corps fini \mathbb{F} dans lequel -1 est un carré.*

(a) *Pour tout point $\gamma \in X^{(1)}$, on a $E_c(K_\gamma) \neq \emptyset$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(b1) $E_c(K) = \emptyset$.

(b2) $E_c(K_\eta) = \emptyset$.

(b3) $c \notin F^{\times 2}$.

(b4) *La proposition 2.5 appliquée à $A = (X_1^2 - xY_1^2, x + 1) \in H_{nr}^2(K(E_c), \mathbb{Z}/2)$ et à la F -courbe X donne une obstruction de réciprocity à l'existence d'un point dans $E_c(K)$.*

Démonstration. — Pour tout corps ℓ extension finie de k , le quotient $\ell^\times/\ell^{\times 2}$ a au plus deux éléments et -1 est un carré dans ℓ . Un calcul simple montre qu'en tout point fermé γ de la droite projective \mathbf{P}_F^1 , l'un de $x, x + 1, x(x + 1)$ est un carré dans le hensélisé K_x . Pour tout $c \in F^\times$ et tout point fermé γ de la droite projective \mathbf{P}_F^1 , on a alors clairement $E_c(K_\gamma) \neq \emptyset$.

Au point générique η de la fibre spéciale $\mathbf{P}_k^1 \subset \mathbf{P}_R^1$, chacun de $x, x + 1, x(x + 1)$ est une unité, mais aucun n'est un carré dans le corps résiduel en η . Ceci implique que pour $X_i, Y_i \in K_\eta$ tels que le produit

$$(X_1^2 - xY_1^2)(X_2^2 - (x + 1)Y_2^2)(X_3^2 - x(x + 1)Y_3^2)$$

soit non nul, la valuation en η de ce produit est paire (voir le lemme 4.1 (ii)).

Si $v(c)$ est impaire, on voit que $E_c(K_\eta) = \emptyset$. Ainsi $E_c(K) = \emptyset$.

Supposons $v(c)$ paire. On peut supposer que c est une unité dans R . Si $k = \mathbb{C}$, alors c est un carré dans R et de façon évidente $E_c(K) \neq \emptyset$.

Soit $A = (X_1^2 - xY_1^2, x + 1) \in {}_2\text{Br } E_c$, qui est non ramifiée sur un modèle projectif et lisse Z_c de E_c sur K . La proposition 5.1 (d) de [8] permet de calculer l'obstruction associée à $A \in H_{nr}^2(K(E)/K, \mathbb{Z}/2)$ par la proposition 2.5. On trouve que pour toute famille $\{P_\gamma \in E(K_\gamma)\}$, γ parcourant les points fermés de \mathbf{P}_F^1 ,

$$\sum_{\gamma} \text{Cores}_{F(\gamma)/F} \partial_\gamma(A(P_\gamma)) = c \in F^\times/F^{\times 2} = H^1(F, \mathbb{Z}/2).$$

Ainsi $E(K) = \emptyset$ si $v(c)$ est impaire, mais aussi si $v(c)$ est paire et c non carré, ce qui peut se produire si $k = \mathbb{F}$ est un corps fini. \square

Remarque 3.3. — Soit K le corps des fonctions d'une courbe X projective, lisse, géométriquement connexe sur $\mathbb{C}((t))$. On verra à la remarque 5.4 que, pour E un espace principal homogène sous un K -tore Q comme ci-dessus, on peut avoir $E(K_v) \neq \emptyset$ pour tout complété de K en une valuation discrète, pas d'obstruction de réciprocité comme dans la proposition 2.5, par rapport aux points fermés de la $\mathbb{C}((t))$ -courbe X , et néanmoins $E(K) = \emptyset$.

Le corollaire 6.2 ci-dessous explique pourquoi on ne peut s'attendre à une telle situation dans le cas de la proposition 3.2, où $X = \mathbf{P}_{\mathbb{C}((t))}^1$.

Remarque 3.4. — Supposons $k = \mathbb{F}$ fini. Si $c \in F^\times$ n'est pas un carré, il existe un élément $d \in F^\times$ tel que les classes de c et d aient un cup-produit non nul dans $H^2(F, \mathbb{Z}/2)$. Notons $B = A \cup (d) \in H_{nr}^3(K(E)/K, \mathbb{Z}/2)$. On trouve que pour toute famille $\{P_\gamma \in E(K_\gamma)\}$, γ parcourant les points fermés de \mathbf{P}_F^1 ,

$$\sum_{\gamma} \text{Cores}_{F(\gamma)/F} \partial_{\gamma}(B(P_{\gamma})) = c \cup d \neq 0 \in H^2(F, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2.$$

Ainsi l'application de la proposition 2.5 à $B \in H_{nr}^3(K(E)/K, \mathbb{Z}/2)$ permet aussi d'établir $E_c(K) = \emptyset$. On trouve ainsi une illustration des résultats généraux de Harari et Szamuely [16].

4. Calculs locaux

4.1. Existence de points rationnels de E sur un corps valué discret.

— Soient R un anneau de valuation discrète, κ son corps résiduel supposé de caractéristique différente de 2, et K son corps des fractions. On note $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation associée.

Lemme 4.1. — Soit $d \in K^\times$.

(i) Si $d \in K^{\times 2}$, alors tout élément de K^\times peut s'écrire sous la forme $x^2 - dy^2$ avec $x, y \in K$.

Supposons R hensélien.

(ii) Si $v(d)$ est paire et d n'est pas un carré dans R , alors pour $x, y \in K$ avec $x^2 - dy^2 \neq 0$, la valuation $v(x^2 - dy^2)$ est paire.

(iii) Si $v(d)$ est impaire, alors les classes dans $K^\times / K^{\times 2}$ des valeurs prises par $x^2 - dy^2$ pour $x, y \in K$ avec $x^2 - dy^2 \neq 0$ sont exactement 1 et $-d$.

(iv) Si $v(d)$ est paire et d n'est pas un carré dans R , si de plus le corps κ satisfait $\text{cd}_2 \kappa \leq 1$, alors les valeurs prises par $x^2 - dy^2$ pour $x, y \in K$ avec $x^2 - dy^2 \neq 0$ sont exactement les produits d'une unité et d'un carré de K .

Démonstration. — Les énoncés (i) à (iii) sont clairs. Pour l'énoncé (iv), il suffit de remarquer que sous l'hypothèse $\text{cd}_2 \kappa \leq 1$, toute équation $x^2 - \alpha y^2 = \beta$ avec $\alpha, \beta \in \kappa^\times$ possède une solution avec $x, y \in \kappa$. \square

Proposition 4.2. — *Supposons R hensélien. Soient $a, b, c \in K^\times$. On considère la K -variété E définie par l'équation*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

(a) *Si les trois conditions suivantes sont simultanément satisfaites :*

- (i) *les éléments a et b ont une valuation paire,*
- (ii) *aucun de a , b , ab , n'est un carré dans K ,*
- (iii) *la valuation de c est impaire,*

alors $E(K) = \emptyset$.

(b) *Si l'on a $\text{cd}_2(\kappa) \leq 1$, la réciproque est vraie.*

Démonstration. — Ceci se déduit aisément du lemme 4.1. □

4.2. Valeurs prises par l'algèbre $A \in \text{Br } E$ sur un corps valué discret.

— Soit R un anneau de valuation discrète de rang 1 avec $2 \in R^\times$. Soit K le corps des fractions de R et κ son corps résiduel. On note π une uniformisante de R .

On a la suite exacte bien connue (cf. [15, III, Prop. (2.1)])

$$0 \rightarrow {}_2\text{Br } R \rightarrow {}_2\text{Br } K \rightarrow \kappa^\times / \kappa^{\times 2} \rightarrow 1.$$

On note $\partial : {}_2\text{Br } K \rightarrow \kappa^\times / \kappa^{\times 2}$ l'application résidu. Il est bien connu [24, §1] qu'elle envoie la classe d'une algèbre de quaternions (a, b) sur la classe

$$(-1)^{v(a)v(b)} \overline{a^{v(b)}/b^{v(a)}} \in \kappa^\times / \kappa^{\times 2}.$$

Si R est hensélien, alors ${}_2\text{Br } R \xrightarrow{\cong} {}_2\text{Br } \kappa$. Si R est hensélien et $\text{cd}_2(\kappa) \leq 1$, alors $\partial : {}_2\text{Br } K \xrightarrow{\cong} \kappa^\times / \kappa^{\times 2}$.

Proposition 4.3. — *Soient $a, b, c \in K^\times$. Soit E la K -variété E définie par*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

Soit $A = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \text{Br } E$. Soit $ev_A : E(K) \rightarrow \text{Br } K$ l'application donnée par $P \mapsto A(P)$, et soit Δ l'application composée

$$E(K) \rightarrow {}_2\text{Br } K \rightarrow \kappa^\times / \kappa^{\times 2}.$$

$$P \mapsto \partial(A(P)).$$

(i) *Si b ou ab est un carré dans K , l'image de ev_A est 0.*

(ii) *Si a est un carré dans K , l'image de ev_A est (c, b) ; si de plus c et b sont de valuation paire, l'image de Δ est 1.*

(iii) *Supposons R hensélien. Si $v(a)$ et $v(b)$ sont paires et a n'est pas un carré dans K , et si $E(K) \neq \emptyset$, l'image de Δ est 1.*

(iv) *Supposons R hensélien. Supposons qu'aucun de a, b, ab n'est un carré dans K , et que $v(a)$ et $v(b)$ ne sont pas toutes deux paires.*

Si $v(a)$ est paire et $v(b)$ impaire, l'image de ev_A est contenue dans $\{(c, b), (ac, b)\}$.

Si $v(a)$ est impaire et $v(b)$ paire, l'image de ev_A est contenue dans $\{0, (-a, b)\}$.

Si $v(a)$ et $v(b)$ sont impaires, l'image de ev_A est contenue dans $\{0, (-a, b)\}$.

L'image de Δ est contenue dans la réunion de deux classes (éventuellement confondues) dans $\kappa^\times / \kappa^{\times 2}$ qui diffèrent par multiplication par $(-1)^{v(a) \cdot v(b)} \partial((a, b))$.

(v) Sous l'hypothèse de (iv), si de plus $cd_2(\kappa) \leq 1$, alors les classes indiquées ci-dessus sont toutes dans l'image de ev_A , resp. dans celle de Δ .

Démonstration. — Supposons d'abord que l'un de a, b, ab est un carré dans K , auquel cas on a automatiquement $E(K) \neq \emptyset$. Si $a \notin K^{\times 2}$, alors soit b soit ab est dans $K^{\times 2}$ et alors $A = 0 \in \text{Br } E$ d'après (3.1) et (3.3), donc pour tout $P \in E(K)$, on a $A(P) = 0 \in \text{Br } K$. Si $a \in K^{\times 2}$, alors $A = (c, b) \in \text{Br } E$ d'après (3.3), donc pour tout $P \in E(K)$, on a $A(P) = (c, b) \in \text{Br } K$. Si c et b sont de valuation paire, ceci implique $\partial(A(P)) = 0$. Ceci établit (i) et (ii).

Supposons que aucun de a, b, ab n'est un carré dans K .

Si R est hensélien et si les valuations de a et de b sont paires, alors, pour tout $P \in E(K)$, de $A = (X_1^2 - aY_1^2, b)$, en utilisant le lemme 4.1 (ii), on déduit $\partial(A(P)) = 0$, c'est-à-dire l'énoncé (iii).

Nous ne détaillons pas ici les calculs faits pour établir (iv) et (v), qui utilisent le lemme 4.1. On doit dans chaque cas discuter selon la parité de la valuation de c . \square

4.3. Obstruction de réciprocité attachée à l'algèbre $A \in \text{Br } E$ en un point fermé d'un anneau local régulier de dimension 2. — Soit R un anneau local régulier excellent de dimension 2, avec $2 \in R^\times$. Pour γ un point de codimension 1 de $\text{Spec } R$ on note aussi γ sa fermeture dans $\text{Spec } R$ et on note encore $\gamma \in R^{(1)}$ l'idéal premier de hauteur 1 de R associé.

Notons M le point fermé de $\text{Spec } R$. C'est aussi le point fermé de $\text{Spec } R/\gamma$ pour tout point γ de codimension 1 de $\text{Spec } R$. Soit K le corps des fractions de R .

On a un complexe

$${}_2\text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in R^{(1)}} \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times 2} \rightarrow \mathbb{Z}/2,$$

avec

$$\partial_\gamma : {}_2\text{Br } K \rightarrow \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times 2}$$

et

$$\partial_{\gamma, M} : \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times 2} \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Soient $a, b, c \in K^\times$.

Soit

$$E : (X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$$

et

$$A = (X_1^2 - aY_1^2, b) = (c(X_3^2 - abY_3^2), b) = (c(X_2^2 - bY_2^2), ab) \in \text{Br } E.$$

Supposons $E(K_\gamma) \neq \emptyset$ en tout point de codimension 1 de $\text{Spec } R$.

On veut calculer la valeur des sommes

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_{\gamma, M}(\partial_\gamma(A(P_\gamma)))$$

pour une famille $\{P_\gamma \in E(K_\gamma)\}_{\gamma \in R^{(1)}}$.

Pour simplifier, pour $\alpha \in \text{Br } K_\gamma$, on note ici

$$\partial_M(\partial_\gamma(\alpha)) = \partial_{\gamma, M}(\partial_\gamma(\alpha)).$$

Lemme 4.4. — *Si l'un de a , b ou ab est le produit d'une unité de R par un carré de K , alors pour toute famille $\{P_\gamma\} \in \prod_\gamma E(K_\gamma)$, on a*

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0.$$

Démonstration. — Si b est le produit d'une unité de R par un carré de K , on peut supposer que b est une unité dans R . On a

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = \sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(X_1^2 - aY_1^2, b)(P_\gamma)) = \sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M((\bar{b})^{\nu_\gamma(X_1^2 - aY_1^2)}(P_\gamma)).$$

Puisque b est une unité, la classe \bar{b} est une unité dans R/γ donc $\partial_M(\bar{b}) = 0$, et

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0.$$

Si ab est le produit d'une unité de R par un carré de K , on peut supposer que ab est une unité dans R . En utilisant $A = (X_1^2 - aY_1^2, ab)$, le même argument que ci-dessus donne

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0.$$

Si a est le produit d'une unité de R par un carré de K , on peut supposer que a est une unité dans R , le même argument que ci-dessus donne

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A_1(P_\gamma))) = 0$$

pour $A_1 = (X_2^2 - bY_2^2, a)$. Comme on a

$$A = A_1 + (c, ab),$$

on obtient

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = \sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(c, ab)),$$

et le second terme est nul par la loi de réciprocité appliquée à $(c, ab) \in {}_2\text{Br } K$.
□

Lemme 4.5. — Soit R un anneau local régulier de dimension 2 et π, δ un système régulier de paramètres. Si $z \in R$ non nul a son diviseur supporté sur la réunion des diviseurs de π et de δ , et si c'est un carré dans le corps des fractions du hensélisé du localisé de R le long de π , alors $z = u\pi^{2r}\delta^{2s} \in R$ avec $u \in R^\times$ d'image un carré dans R/π , donc d'image un carré dans R/m .

Démonstration. — C'est clair. □

Proposition 4.6. — Si la réunion des diviseurs réduits de a et de b est un diviseur à croisements normaux, et si en tout $\gamma \in R^{(1)}$ l'un de a, b ou ab est un carré dans K_γ , alors pour toute famille $\{P_\gamma\} \in \prod_{\gamma \in R^{(1)}} E(K_\gamma)$, on a

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0.$$

Démonstration. — Cela résulte des lemmes 4.4 et 4.5. □

Proposition 4.7. — Supposons que la réunion des diviseurs réduits de a et de b et de c est contenue dans un diviseur à croisements normaux défini par un système régulier de paramètres (π, δ) .

On a alors les propriétés suivantes.

(i) Pour toute famille $\{P_\gamma\} \in \prod_{\gamma \in R^{(1)}} E(K_\gamma)$,

$$\sum_{\gamma \in R^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = \partial_M(\partial_\pi(A(P_\pi))) + \partial_M(\partial_\delta(A(P_\delta))) \in \mathbb{Z}/2.$$

Supposons qu'aucun de a, b ou ab n'est le produit d'une unité de R par un carré dans K .

(ii) Si le corps des fractions $\kappa(\pi)$ de R/π satisfait $\text{cd}_2\kappa(\pi) \leq 1$, alors pour P_π variant dans $E(K_\pi)$, $\partial_M(\partial_\pi(A(P_\pi)))$ prend les deux valeurs dans $\mathbb{Z}/2$.

(iii) Si le corps des fractions $\kappa(\delta)$ de R/δ satisfait $\text{cd}_2\kappa(\delta) \leq 1$, alors pour P_δ variant dans $E(K_\delta)$, $\partial_M(\partial_\delta(A(P_\delta)))$ prend les deux valeurs dans $\mathbb{Z}/2$.

Démonstration. — Soit γ un point de codimension 1 de R autre que π et δ . Soit K_γ le corps des fractions du hensélisé de R en γ . En un tel point, $v_\gamma(a) = 0, v_\gamma(b) = 0$ et $v_\gamma(c) = 0$. La proposition 4.3 montre alors que pour tout $P_\gamma \in E(K_\gamma)$, on a $\partial_\gamma(A(P_\gamma)) = 0$. Ceci donne l'énoncé (i).

Si aucun de a, b ou ab n'est le produit d'une unité de R par un carré dans K , quitte à se débarrasser de carrés et à modifier le système régulier de paramètres en les multipliant par des unités, on peut supposer que l'on est dans l'un des

cas suivants : $(a, b) = (\pi, \delta)$, ou $(a, b) = (\pi, \pi\delta)$, ou $(a, b) = (\pi\delta, \delta)$, et $c = u\pi^r\delta^s$ avec $u \in R^\times$ et $r, s \in \mathbb{Z}$.

Supposons que le corps des fractions $\kappa(\pi)$ de R/π satisfait $\text{cd}_2\kappa(\pi) \leq 1$. La proposition 4.3 appliquée au hensélisé de l'anneau de valuation discrète R_π montre que $\partial_\pi(A(P_\pi))$, pour P_π variant dans $E(K_\pi)$, prend deux valeurs dans $\kappa(\pi)^\times/\kappa(\pi)^{\times 2}$ qui diffèrent par multiplication par $\pm\bar{\delta} \neq 1$. Ainsi $\partial_M(\partial_\pi(A(P_\pi))) \in \mathbb{Z}/2$, pour P_π variant dans $E(K_\pi)$, prend les deux valeurs dans $\mathbb{Z}/2$. Ceci donne l'énoncé (ii), et la démonstration de (iii) est analogue. \square

4.4. Comportement dans un éclatement. — Cette section sera utilisée au paragraphe 6.

Proposition 4.8. — *Soit R un anneau local régulier intègre de dimension 2, de corps des fonctions K , de corps résiduel k séparablement clos, de caractéristique différente de 2. Soit $p = \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ l'éclatement de $\mathcal{X} = \text{Spec } R$ en le point fermé M de \mathcal{X} et soit $\lambda \in \mathcal{Y}^{(1)}$ la courbe exceptionnelle introduite dans l'éclatement.*

Soient $a, b, c \in K^\times$, puis

$$E : (X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$$

et $A = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \text{Br } E$.

Supposons que la réunion des diviseurs réduits de a et de b et de c est un diviseur à croisements normaux sur $\text{Spec } R$.

Soit $\{P_\gamma \in E(K_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$ une famille de points telle que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0 \in \mathbb{Z}/2.$$

Il existe alors un point $P_\lambda \in E(K_\lambda)$ tel que pour tout point fermé $N \in \mathcal{Y}$ on ait

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{Y}^{(1)}, N \in \zeta} \partial_N(\partial_\zeta(A(P_\zeta))) = 0 \in \mathbb{Z}/2,$$

où, pour $\zeta \in \mathcal{Y}^{(1)}, \zeta \neq \lambda$, on note $P_\zeta = P_{p(\zeta)}$.

Démonstration. — Il suffit d'établir l'énoncé pour les points $N \in \lambda$. Toutes les égalités qui suivent sont dans $\mathbb{Z}/2$.

Par hypothèse, la réunion des diviseurs réduits de a et de b et de c est un diviseur à croisements normaux sur $\text{Spec } R$. On choisit $(\pi, \delta) \in R$ des générateurs de l'idéal maximal de R tels que chacun de a et b soit produit d'une unité en M par des puissances de π et de δ .

Soit S_λ le hensélisé de l'anneau local de \mathcal{Y} en λ et K_λ l'anneau des fractions de S_λ . Le corps résiduel de S_λ est $k(\mathbf{P}^1)$ qui satisfait $\text{cd}_2k(\mathbf{P}^1) \leq 1$ par l'hypothèse faite sur k .

L'éclaté au voisinage de M est obtenu par recollement de $\text{Spec } R[t]/(\pi - t\delta)$ et $\text{Spec } R[s]/(\delta - s\pi)$. Dans la première carte, λ est donné par $\delta = 0$, dans la seconde par $\pi = 0$.

Si l'un de a , b ou ab est une unité fois un carré en M , alors, comme k est séparablement clos, c'est un carré dans S_λ , donc $E(K_\lambda) \neq \emptyset$. Par ailleurs, sous cette même hypothèse, en tout point $N \in \lambda$, l'un de a , b ou ab est une unité fois un carré en N , le lemme 4.4 montre que pour tout point $N \in \lambda$ et pour toute famille de points $\{P_\zeta \in E(K_\zeta)\}_{\zeta \in \mathcal{Y}^{(1)}}$ on a

$$\sum_{\zeta \in \mathcal{Y}^{(1)}, N \in \zeta} \partial_N(\partial_\zeta(A(P_\zeta))) = 0.$$

Si aucun de a , b ou ab n'est une unité fois un carré en M , on peut supposer que l'on a : $(a, b) = (\pi, \delta)$ ou $(a, b) = (\pi, \pi\delta)$ ou $(a, b) = (\pi\delta, \delta)$. Dans la première carte, le couple (a, b) est, à multiplication par des carrés près, égal à l'un de $(t\delta, \delta)$, $(t\delta, t)$, (t, δ) . L'une des coordonnées a, b a une δ -valuation impaire. La proposition 4.2 donne $E(K_\lambda) \neq \emptyset$.

Pour γ passant par M et différent de π ou δ , a , b et c sont des unités dans R_γ , ce qui d'après la proposition 4.3 implique $\partial_\gamma(A(P_\gamma)) = 0$.

L'hypothèse

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}, M \in \gamma} \partial_M(\partial_\gamma(A(P_\gamma))) = 0$$

implique alors

$$(4.1) \quad \partial_M(\partial_\pi(A(P_\pi))) = \partial_M(\partial_\delta(A(P_\delta))).$$

Soient N_1 , resp. N_2 , le point de $\lambda \subset \mathcal{Y}$ où le transformé propre de $\pi = 0$ (donné par $t = 0$), resp. de $\delta = 0$ (donné par $s = 0$), rencontre λ .

Il nous faut montrer qu'il existe $P_\lambda \in E(K_\lambda)$ tel que l'on ait

$$\partial_{N_1}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = \partial_{N_1}(\partial_\pi(A(P_\pi)))$$

et

$$\partial_{N_2}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = \partial_{N_2}(\partial_\delta(A(P_\delta)))$$

et enfin

$$\partial_N(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = 0$$

pour $N \in \lambda$, $N \neq N_1, N_2$.

On a

$$(4.2) \quad \partial_{N_1}(\partial_\pi(A(P_\pi))) = \partial_M(\partial_\pi(A(P_\pi)))$$

et

$$(4.3) \quad \partial_{N_2}(\partial_\delta(A(P_\delta))) = \partial_M(\partial_\delta(A(P_\delta))).$$

La proposition 4.3 et les hypothèses sur a , b , c impliquent que pour tout point $P_\lambda \in E(K_\lambda)$, $\partial_\lambda(A(P_\lambda))$ est de la forme $\partial_\lambda((u, v))$ avec chacun de u, v

produit d'une unité en M et de puissances de π et de δ . Une considération d'une des cartes locales de \mathcal{Y} montre immédiatement que pour une telle algèbre de quaternions (u, v) on a

$$\partial_N(\partial_\lambda((u, v))) = 0$$

pour $N \in \lambda$, $N \neq N_1, N_2$. Ainsi, quel que soit le choix de P_λ , on a

$$\partial_N(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = 0$$

pour $N \in \lambda$, $N \neq N_1, N_2$.

La loi de réciprocité sur la courbe λ et l'élément $\partial_\lambda(A(P_\lambda)) \in \kappa(\lambda)^\times / \kappa(\lambda)^{\times 2}$ donne

$$\sum_{N \in \lambda} \partial_N(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = 0.$$

On a donc pour tout P_λ

$$(4.4) \quad \partial_{N_1}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) + \partial_{N_2}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = 0.$$

Dans la première carte de \mathcal{Y} , où λ est donné par $\delta = 0$, sur lequel $t = 0$ (transformé propre du diviseur $\pi = 0$ sur \mathcal{X}) découpe le diviseur N_1 on trouve, à multiplication par des carrés près, l'égalité de couples $(a, b) = (t\delta, \delta)$ ou $(a, b) = (t\delta, t)$ ou $(a, b) = (t, \delta)$ et l'idéal maximal dans l'anneau local au point N_1 est engendré par (t, δ) .

Comme le corps résiduel $\kappa(\lambda)$ de S_λ satisfait $\text{cd}_2 \kappa(\lambda) \leq 1$, la proposition 4.3 appliquée au voisinage du point N_1 de \mathcal{Y} montre que l'on peut trouver $P_\lambda \in E(K_\lambda)$ tel que

$$(4.5) \quad \partial_{N_1}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = \partial_{N_1}(\partial_\pi(A(P_\pi))).$$

Les égalités (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) impliquent alors

$$\partial_{N_2}(\partial_\lambda(A(P_\lambda))) = \partial_{N_2}(\partial_\delta(A(P_\delta))).$$

□

5. Le principe local-global ne vaut pas en général

5.1. Un énoncé semi-local. —

Proposition 5.1. — *Soit R un anneau semi-local régulier intègre de dimension 2, avec $2 \in R^\times$. Supposons que R a exactement trois idéaux maximaux m_1, m_2, m_3 , et que $m_1 = (\pi_2, \pi_3)$, $m_2 = (\pi_1, \pi_3)$, $m_3 = (\pi_1, \pi_2)$, chacun des (π_i) étant un idéal premier. Soit K le corps des fractions de R . Soient $a = \pi_2\pi_3$, $b = \pi_3\pi_1$ et $c = \pi_1\pi_2\pi_3$. Alors la K -variété d'équation*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$$

n'a pas de point rationnel sur K .

Démonstration. — Soit K_i le corps des fractions du hensélisé du localisé de R en l'idéal premier π_i . Soit κ_i le corps des fractions de R/π_i , corps résiduel de ce hensélisé. D'après la proposition 4.3, l'image de l'application composée

$$E(K_i) \rightarrow {}_2\text{Br } K_i \rightarrow \kappa_i^\times / \kappa_i^{\times 2},$$

où la première flèche est l'évaluation de $A = (X_1^2 - aY_1^2, b)$ et la seconde l'application résidu, est contenue :

- pour $i = 1$, dans $\{-\pi_2, -\pi_3\}$;
- pour $i = 2$, dans $\{1, \pi_1\pi_3\}$;
- pour $i = 3$, dans $\{1, \pi_1\pi_2\}$.

On considère l'application composée

$$\prod_i E(K_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=3} {}_2\text{Br } K_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=3} \kappa_i^\times / \kappa_i^{\times 2} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$$

définie à partir des applications d'évaluations de A et du complexe de Bloch-Ogus sur l'anneau semi-local R . Les indices j sont ceux des points fermés m_j . L'application $\kappa_i^\times / \kappa_i^{\times 2} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$ envoie une classe $\gamma \in \kappa_i^\times / \kappa_i^{\times 2}$ sur la valuation modulo 2 de γ en m_j pour $j \neq i$ et sur 0 en m_i .

Pour tout idéal premier x de R autre que ceux définis par π_1, π_2, π_3 , les éléments a, b, c sont des unités dans R_x . La proposition 4.3 montre qu'en un tel x , pour tout point $P_x \in E(K_x)$, on a $\partial_x(A(P_x)) = 0$.

Ceci implique que l'application composée

$$E(K) \rightarrow \prod_i E(K_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=3} {}_2\text{Br } K_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=3} \kappa_i^\times / \kappa_i^{\times 2} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$$

est nulle.

Pour $i = 1$, l'image dans $\bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$ de $(-\pi_2)$, resp. $(-\pi_3)$ dans $\kappa_1^\times / \kappa_1^{\times 2}$, consiste en $(0, 0, 1)$, resp. $(0, 1, 0)$.

Pour $i = 2$, l'image dans $\bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$ de 1, resp. $\pi_1\pi_3$, consiste en $(0, 0, 0)$, resp. $(1, 0, 1)$.

Pour $i = 3$, l'image dans $\bigoplus_{j=1}^{j=3} \mathbb{Z}/2$ de 1, resp. $\pi_1\pi_2$ consiste en $(0, 0, 0)$, resp. $(1, 1, 0)$.

Aucune addition sur $i = 1, 2, 3$ de ces triplets (un par indice i) ne donne $(0, 0, 0)$. Ainsi $E(K) = \emptyset$. \square

5.2. Contre-exemple au principe local-global pour les valuations. —

Soit \mathcal{X} un schéma intègre régulier excellent de dimension deux avec 2 inversible sur \mathcal{X} , quasi-projectif sur un anneau, satisfaisant la condition suivante :

Il existe un triplet de diviseurs intègres lisses $L_i \subset \mathcal{X}$ formant triangle : pour $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, $L_i \cap L_j$ est une intersection transverse en un point fermé m_k , où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et les points $m_k, k \in \{1, 2, 3\}$ sont distincts.

Soit K le corps des fonctions de \mathcal{X} .

Comme tout anneau semi-local a un groupe de Picard trivial, il existe des éléments $\pi_i \in K^\times, i = 1, 2, 3$, de diviseurs

$$\operatorname{div}_{\mathcal{X}}(\pi_i) = L_i + D_i$$

satisfaisant les conditions suivantes.

(a) Le support du diviseur D_1 ne contient aucun des m_i (et donc aucun des L_i).

(b) Le support du diviseur D_2 ne contient aucun des m_i (et donc aucun des L_i), ni aucune composante du support de D_1 , ni aucun des points de rencontre des L_i avec un point du support de D_1 .

(c) Le support du diviseur D_3 ne contient aucun des m_i (et donc aucun des L_i), ni aucune composante du support de D_1 ou de D_2 , ni aucun des points de rencontre des L_i avec un point du support de D_1 , ni aucun des points de rencontre des L_i avec un point du support de D_2 , ni aucun point de rencontre des supports des diviseurs D_1 et D_2 .

Ces conditions impliquent que pour tout point fermé M de \mathcal{X} l'un des π_i est inversible en M .

Proposition 5.2. — Avec les notations ci-dessus, soient $a = \pi_2\pi_3$, $b = \pi_3\pi_1$ et $c = \pi_1\pi_2\pi_3$. Soit E la K -variété d'équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c$$

(i) La K -variété E n'a pas de point K -rationnel.

(ii) Supposons que les corps résiduels des points de codimension 2 sont séparablement clos, et que les corps résiduels des points de codimension 1 de \mathcal{X} sont de 2-dimension cohomologique inférieure ou égale à 1. Alors pour tout anneau local hensélien intègre R , de corps des fractions F , et tout morphisme dominant $\operatorname{Spec} R \rightarrow \mathcal{X}$, on a $E(F) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Soit B l'anneau semi-local de \mathcal{X} dont les points fermés sont m_1, m_2, m_3 . Sur cet anneau, la situation est exactement celle décrite dans la proposition 5.1. Ceci établit (i).

Soit γ un point de codimension 1 de \mathcal{X} . On a

$$\operatorname{div}_{\mathcal{X}}(a) = L_2 + L_3 + D_2 + D_3,$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{X}}(b) = L_3 + L_1 + D_3 + D_1,$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{X}}(c) = L_1 + L_2 + L_3 + D_1 + D_2 + D_3.$$

Si l'on a $v_\gamma(a)$ pair, alors γ est une des composantes du support de D_2 ou D_3 , où elle apparaît avec multiplicité paire. Mais alors $v_\gamma(c)$ est pair. De la proposition 4.2 et de l'hypothèse $\text{cd}_2(\kappa(\gamma)) \leq 1$ il résulte alors :

Pour tout point γ de codimension 1 de \mathcal{X} , on a $E(K_\gamma) \neq \emptyset$.

Soient R un anneau local hensélien intègre, de corps des fractions F , et $\text{Spec } R \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme dominant.

Soit x l'image du point fermé de R . Ceci induit une inclusion locale $O_{M,x} \hookrightarrow R$ et donc une inclusion locale $O_{M,x}^h \hookrightarrow R$ au niveau des hensélisés, puis une inclusion des corps de fractions $K_x \hookrightarrow F$.

Si $x = \gamma$ est un point de codimension 1 de \mathcal{X} , on vient d'établir $E(K_\gamma) \neq \emptyset$, on a donc $E(F) \neq \emptyset$.

Supposons que $x = M$ est un point fermé de \mathcal{X} . Les conditions imposées aux D_i garantissent, comme on le vérifie aisément, que l'un au moins des π_i , soit π_{i_0} , est inversible en x . Comme le corps résiduel de M est séparablement clos de caractéristique différente de 2, la classe de $-\pi_{i_0}$ dans ce corps résiduel est un carré, elle l'est donc aussi dans le corps résiduel de l'anneau local hensélien R , et donc $-\pi_{i_0}$ est un carré dans $R \subset F$. Ainsi l'image de $\pi_1\pi_2\pi_3$ dans F est le produit d'un carré de F et du produit $-\prod_{i \neq i_0} \pi_i$.

L'équation

$$(X_1^2 - \pi_2\pi_3Y_1^2)(X_2^2 - \pi_3\pi_1Y_2^2)(X_3^2 - \pi_1\pi_2\pi_3^2Y_3^2) = \pi_1\pi_2\pi_3$$

admet sur F une solution avec toutes les coordonnées sauf Y_{i_0} nulles, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 5.3. — *Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, excellent, de corps résiduel séparablement clos de caractéristique différente de 2, et \mathcal{X}/R un R -schéma régulier intègre, projectif sur R , à fibre générique une courbe lisse géométriquement intègre. Soit K le corps des fonctions de \mathcal{X} . Supposons que la fibre spéciale réduite de \mathcal{X}/R contient un triangle L_1, L_2, L_3 . Choisissons les $\pi_i \in K$ et $a, b, c \in K$ comme dans la proposition 5.2. Soit E la K -variété d'équation*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

Soit $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Soit E' la K -variété d'équation

$$\text{Norm}_{L/K}(\Xi) = c^2.$$

Alors :

(i) *Pour toute valuation discrète γ de K , de hensélisé K_γ , on a $E(K_\gamma) \neq \emptyset$ et $E'(K_\gamma) \neq \emptyset$.*

(ii) *On a $E(K) = \emptyset$ et $E'(K) = \emptyset$.*

(iii) *Il existe un module galoisien fini μ sur le corps K et une classe non nulle dans $H^2(K, \mu)$ qui s'annule dans chaque $H^2(K_\gamma, \mu)$.*

(iv) Il existe un K -groupe semi-simple connexe G et un élément non trivial de $H^1(K, G)$ d'image triviale dans chaque $H^1(K_\gamma, G)$.

Démonstration. — On commence par observer que tout anneau de valuation discrète T du corps des fonctions de \mathcal{X} contient le groupe 2-divisible R^\times et donc l'anneau R , donc, puisque \mathcal{X}/R est projectif, définit un morphisme dominant $\text{Spec } T \rightarrow \mathcal{X}$.

Les énoncés pour E résultent immédiatement de ce qui précède. Ceux pour E' et pour μ résultent des rappels du paragraphe 3, selon lesquels :

(a) on a une injection

$$H^1(K, Q) \hookrightarrow H^1(K, T),$$

envoyant la classe de E sur celle de E' , et fonctorielle en le corps de base K .

(b) Pour μ un module galoisien fini convenable, on a une injection

$$H^1(K, Q) \hookrightarrow H^2(K, \mu)$$

fonctorielle en le corps de base K .

Une fois établi l'énoncé (iii), il suffit de recopier l'argument de Serre ([33, Chap. III, §4.7]) pour obtenir l'énoncé (iv). L'énoncé (iii) est en effet l'analogie dans notre contexte du lemme 8 de Serre (lemme d'arithmétique « nettement moins trivial »). Le lemme 9 de [33] vaut aussi dans notre contexte : le groupe noté S est une restriction à la Weil d'un produit de groupes SL_n , on a donc $H^1(F, S) = 0$ sur tout surcorps F du corps de base. La démonstration du théorème 8 de [33] est formelle à partir des lemmes 8 et 9 de [33] \square

Remarque 5.4. — Soit $R = \mathbb{C}[[t]]$. Dans la situation du corollaire 5.3, montrons que l'on peut choisir les π_i dans la proposition 5.2 de telle façon que l'obstruction définie au §2.2, provenant de la loi de réciprocité de Weil sur la courbe $X = \mathcal{X} \times_R K$, ne permette pas d'établir $E(K) \neq \emptyset$. Dans le cas ici considéré, le seul groupe de cohomologie qui puisse, via la proposition 2.5, donner une information est $H_{nr}^2(K(E)/K, \mathbb{Z}/2)$, groupe qui est engendré modulo $H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ par la classe de l'algèbre de quaternions A .

Avec les notations ci-dessus, les diviseurs des π_i sur la fibre générique X sont deux à deux disjoints.

On calcule les valeurs possibles pour

$$\partial_v(A(P_v)) \in H^1(\kappa(v), \mathbb{Z}/2) = \kappa(v)^\times / \kappa(v)^{\times 2} = \mathbb{Z}/2$$

pour $v \in X^{(1)}$ et $P_v \in E(K_v)$.

En utilisant la proposition 4.3, on trouve :

Si toutes les valuations $v(\pi_i)$ sont paires, on obtient 0.

Si $v(\pi_1)$ est impair, on trouve $\bar{\pi}_2$ et $\bar{\pi}_3$.

Si $v(\pi_2)$ est impair, on trouve 0 et $\bar{\pi}_1\bar{\pi}_3$.

Si $v(\pi_3)$ est impair, on trouve 0 et $\bar{\pi}_1\bar{\pi}_2$.

Pour tout $v \in X^{(1)}$, la corestriction $\mathbb{Z}/2 = \kappa(v)^\times / \kappa(v)^{\times 2} \rightarrow k^\times / k^{\times 2} = \mathbb{Z}/2$ est l'identité. Passant en notation additive, on voit que l'on a

$$\sum_{v \in X^{(1)}} \text{Cores}_{\kappa(v)/k}(\partial_v(A(P_v))) = 1 \in \mathbb{Z}/2$$

pour toute adèle $\{P_v\}$ si et seulement si l'on a les trois propriétés suivantes :

Si $v(\pi_1)$ est impair on a $\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3$, et il existe un nombre impair de tels v avec $\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3$ non carré dans $\kappa(v)^\times$.

Si $v(\pi_2)$ est impair, $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_3$.

Si $v(\pi_3)$ est impair, $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$.

Or on peut choisir les π_i dans la construction ci-dessus de façon qu'il y ait une valuation $v \in X^{(1)}$ avec $v(\pi_2)$ impair et $\bar{\pi}_1 \neq \bar{\pi}_3$. Voici comment. Une fois choisi π_1 , on choisit une place v quelconque non dans le diviseur de π_1 sur X . On choisit π_2 comme ci-dessus, avec la condition supplémentaire d'avoir $v(\pi_2) = 1$. Ceci est possible car le groupe de Picard d'un anneau semi-local est nul. Le corps résiduel L en v est le corps des fractions d'une extension finie de K , on a $L^\times / L^{\times 2} = \mathbb{Z}/2$. On choisit alors π_3 comme ci-dessus, avec la condition supplémentaire que sa classe dans $L^\times / L^{\times 2}$ diffère de celle de π_1 . C'est possible par l'indépendance des valuations sur le corps des fractions d'un anneau de Dedekind.

Il existe alors une famille $\{P_v\}$ telle que

$$\sum_{v \in X^{(1)}} \text{Cores}_{\kappa(v)/k}(\partial_v(A(P_v))) = 0 \in \mathbb{Z}/2.$$

La proposition 2.5 ne permet donc pas de montrer $E(K) = \emptyset$, résultat que nous obtenons en utilisant les obstructions de réciprocité supérieure sur la surface \mathcal{X} .

Lemme 5.5. — *Soit R un anneau de valuation discrète de corps résiduel k un corps parfait de caractéristique différente de 2. Soient K le corps des fractions de R et π une uniformisante. Le modèle propre minimal régulier \mathcal{X}/R de la courbe elliptique sur K d'équation affine*

$$y^2 = x^3 + x^2 + \pi^3$$

est de type I_3 , la fibre spéciale est réduite, elle est réunion de trois courbes isomorphes à \mathbf{P}_k^1 se coupant deux à deux transversalement en un unique point k -rationnel.

Démonstration. — On applique l'algorithme de Tate [34, Chap.IV, §9]. \square

Exemples 5.6. — (a) Soient $R = \mathbb{C}[[t]]$ et $F = \mathbb{C}((t))$. Le modèle régulier minimal $\mathcal{X}/\mathbb{C}[[t]]$ de la courbe elliptique sur $\mathbb{C}((t))$ d'équation affine

$$y^2 = x^3 + x^2 + t^3,$$

est d'après le lemme ci-dessus de type I_3 . Cela fournit un exemple concret pour le corollaire 5.3.

On peut aussi partir d'une courbe elliptique sur $\mathbb{C}((t))$ dont le modèle régulier minimal dans la classification de Kodaira–Néron (cf. [34, Chap. IV, Thm. 8.2]) est de type I_1 , resp. I_2 , et éclater deux fois, resp. une fois, en des points convenables pour obtenir que la fibre spéciale réduite est un triangle.

(b) Soit K' le corps des fonctions d'un schéma \mathcal{X} comme en (a). C'est une extension finie (de degré 2) du corps $K = \mathbb{C}((t))(\mathbf{P}^1) = \mathbb{C}((t))(x)$. Soit G' un K' -groupe algébrique linéaire. Le descendu à la Weil $G = R_{K'/K}G'$ est un K -groupe linéaire. Si le K' -groupe G' est commutatif, resp. fini, resp. un tore, resp. semi-simple, resp. semi-simple simplement connexe, les propriétés correspondantes sont satisfaites pour le K -groupe G . On a une bijection fonctorielle en le corps de base $H^1(K', G') \simeq H^1(K, G)$ qui à la classe d'un K' -espace principal homogène E' sous G' associe la classe du K -espace principal homogène $E = R_{K'/K}E'$ sous G . Pour G' commutatif, on a $H^r(K', G') \simeq H^r(K, G)$ pour tout entier $r \geq 0$. Les valuations discrètes sur K entretiennent avec celles de K' les relations usuelles. Ce procédé bien connu permet de déduire de tout contre-exemple au principe local-global par rapport aux hensélisés en les valuations discrètes de F' pour un F' -groupe d'un type donné (tore, semisimple, fini, commutatif) un contre-exemple à ce même principe sur $K = \mathbb{C}((t))(x)$, pour un K -groupe convenable de même type.

Corollaire 5.7. — *Soit R un anneau local normal, hensélien, excellent de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique différente de 2. Soit $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ une désingularisation de R , c'est-à-dire que \mathcal{X} est régulier et le morphisme p est projectif et birationnel. Supposons que le diviseur réduit associé à la fibre de p au-dessus de l'idéal maximal de R contient un triangle. Choisissons les $\pi_i \in K$ et $a, b, c \in K$ comme à la proposition 5.2. Soit E la K -variété d'équation*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

Soit $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Soit E' la K -variété d'équation

$$\text{Norm}_{L/K}(\Xi) = c^2.$$

Alors :

(i) Pour toute valuation discrète γ sur K , de hensélisé K_γ , on a $E(K_\gamma) \neq \emptyset$ et $E'(K_\gamma) \neq \emptyset$.

(ii) On a $E(K) = \emptyset$ et $E'(K) = \emptyset$.

(iii) Il existe un module galoisien fini μ sur le corps K et une classe non nulle dans $H^2(K, \mu)$ qui est triviale dans $H^2(K_\gamma, \mu)$ pour chaque valuation discrète γ de K .

(iv) Il existe un K -groupe semi-simple connexe G et un élément non trivial de $H^1(K, G)$ d'image triviale dans $H^1(K_\gamma, G)$ pour chaque valuation discrète γ de K .

Démonstration. — On commence par observer que tout anneau de valuation discrète du corps des fractions de R contient le groupe infiniment 2-divisible R^\times , donc aussi l'anneau R . Le reste de la démonstration est entièrement analogue à la démonstration précédente. \square

Exemples 5.8. — Rappelons un exemple concret fourni par Gabber ([9, §3.4, Remark 2]) : on prend $R = \mathbb{C}[[x, y, z]]/(xyz + x^4 + y^4 + z^4)$. On peut vérifier que dans la fibre d'une résolution convenable $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ au-dessus du point singulier $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ on a un triangle. Notant K le corps des fractions de R . On peut vérifier que la K -variété d'équation

$$(X_1^2 - yzY_1^2)(X_2^2 - xzY_2^2)(X_3^2 - xyY_3^2) = xyz(x + y + z)$$

a des points dans tous les hensélisés de K et n'a pas de point dans K .

On a dans ce cas une inclusion $\mathbb{C}[[x, y]] \subset R$, et une extension finie de corps des fractions $K/\mathbb{C}((x, y))$. En utilisant un argument de restriction du corps de base à la Weil, comme à la remarque 5.6, on construit des exemples sur le corps $\mathbb{C}((x, y))$.

Le corollaire 5.7 et l'exemple 5.8 répondent à la question posée à la fin du §3 de [9]. On notera que pour un K -groupe fini commutatif déployé μ d'ordre inversible dans R , l'application

$$H^2(K, \mu) \rightarrow \prod_{\gamma} H^2(K_\gamma, \mu)$$

est injective pour K et les valuations γ comme au corollaire 5.3 ou au corollaire 5.7. C'est une conséquence immédiate de la propriété du groupe de Brauer de K citée au début de l'introduction.

5.3. Exemples au-dessus d'un anneau de valuation discret complet à corps résiduel non algébriquement clos. — L'hypothèse que le corps résiduel des points fermés est séparablement clos nous a permis de donner une construction relativement simple et indépendante de la nature de la surface \mathcal{X} .

Nous relâchons ici l'hypothèse sur les corps résiduels aux points fermés, en nous limitant au cas « semi-global ».

Proposition 5.9. — Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k parfait de caractéristique différente de 2, F son corps des fractions et \mathcal{X}/R un R -schéma projectif régulier intègre à fibre générique une courbe lisse et géométriquement connexe. Soit K son corps des fonctions. Supposons que

la fibre spéciale X_0/k est une union transverse de trois courbes $L_i, i = 1, 2, 3$, chacune k -isomorphe à \mathbf{P}_k^1 , formant triangle, les 3 points d'intersection étant k -rationnels.

Quitte à remplacer R par une extension finie étale, il existe des éléments $a, b, c \in K$ tels que la K -variété définie par

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

n'ait pas de point dans K , mais ait des points dans tous les complétés de K pour les valuations discrètes de ce corps.

Démonstration. — Le foncteur $R_1 \rightarrow R_1 \otimes_R k = k_1$ est une équivalence de catégories entre les extensions finies étales d'algèbres locales henséliennes R_1/R et les extensions finies séparables de corps k_1/k ([29, Corollaire, p. 84]).

Pour R_1/R de ce type, le schéma $\mathcal{X} \times_R R_1$ est un schéma régulier intègre, de fibre spéciale $X_0 \times_k k_1$ admettant exactement la même configuration que X_0/k .

Soit A le semi-localisé en m_1, m_2, m_3 , et soient, par abus de langage, m_1, m_2, m_3 les idéaux maximaux associés. Soit $\pi_1 \in A$ satisfaisant $\text{div}_{\mathcal{X}}(\pi_1) = L_1 + D_1$, le support de D_1 ne contenant aucun de m_1, m_2, m_3 . Soit $\pi_2 \in A$ tel $\text{div}_{\mathcal{X}}(\pi_2) = L_2 + D_2$, le support de D_2 sans composante commune avec celui de D_1 , ne contenant aucun des m_i ni aucun des points d'une intersection $L_i \cap \text{Supp}(D_1)$.

Soit $\pi_3 \in A$ tel que $\text{div}_{\mathcal{X}}(\pi_3) = L_3 + D_3$, le support de D_3 sans composante commune avec celui de D_1 ou de D_2 , ne contenant aucun des m_i ni aucun des points d'une intersection $L_i \cap \text{Supp}(D_1)$ ou $L_i \cap \text{Supp}(D_2)$.

Alors $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in A$ sont des éléments premiers définissant respectivement L_1, L_2, L_3 . Dans A , on a $m_1 = (\pi_2, \pi_3)$, $m_2 = (\pi_1, \pi_3)$ and $m_3 = (\pi_1, \pi_2)$.

Soit $a = \pi_2\pi_3$, $b = \pi_3\pi_1$ et $c = \pi_1\pi_2\pi_3$. Soit E la K -variété définie par

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

Notons \bar{k} une clôture algébrique de k . Pour chaque permutation (i, j, ℓ) de $(1, 2, 3)$, il existe une extension finie k_i/k telle que la classe de l'algèbre de quaternions définie par (π_j, π_ℓ) sur le corps des fonctions $k(L_i)$ s'annule sur $k_i(L_i)$. Le groupe de Brauer de $\bar{k}(L_i)$ est en effet nul (théorème de Tsen).

Soit T l'ensemble fini de points fermés

$$T = \cup_{i,j}(L_i \cap \text{Supp}(D_j)) \cup \{m_1, m_2, m_3\}.$$

Pour chaque $P \in T$, l'un au moins des π_i est une unité en P . On choisit un tel π_i , et on pose $u_P = \pi_i(P) \in \kappa(P)^\times$.

Soit k' une extension galoisienne finie de k contenant tous les corps k_i et tous les corps $\kappa(P)(\sqrt{u_P})$ for $P \in T$, et aussi $\sqrt{-1}$.

Remplaçons R par l'extension finie étale locale R'/R de corps résiduel k' , et F par le corps des fractions F' de R' .

Quitte à changer les notations, sur ce nouvel anneau, renommé R , de corps des fractions renommé F , on a $k = k_i$ pour tout i et $k = \kappa(P)(\sqrt{u_P})$ pour tout $P \in T$.

Comme la preuve de la proposition 5.1 ne dépend pas du corps résiduel k , elle donne $E(K) = \emptyset$.

Montrons que E possède des points dans tout hensélisé K_v de K en une valuation v discrète. Soit $x \in \mathcal{X}$ le centre de la valuation.

Supposons d'abord que le point x est le point générique de l'une des composantes L_i de la fibre spéciale X_0 . Supposons que x est le point générique de L_1 . L'algèbre de quaternions (π_2, π_3) est déployée sur le corps $k(L_1)$. Il en est donc de même de l'algèbre $(\pi_2\pi_3, -\pi_2)$. L'équation

$$X^2 - \pi_2\pi_3Y^2 = -\pi_2$$

a donc une solution (u, v) dans le hensélisé de l'anneau local en x , et E possède donc le point rationnel $(u, v, 0, 1, 1, 0)$ sur K_x . Le calcul aux points génériques de L_2 et L_3 est le même.

Supposons que x est un point fermé M de \mathcal{X} , donc un point fermé de la fibre spéciale.

Supposons d'abord $M \notin T$. Le point M appartient à l'une des composantes L_i de la fibre spéciale. Supposons que ce soit L_1 . Alors π_2 et π_3 sont des unités en M . L'algèbre de quaternions (π_2, π_3) est donc non ramifiée au voisinage de M . Dans le corps résiduel de L_1 , sa classe est nulle. Ceci implique que sa classe est nulle dans le corps résiduel de M , et donc aussi dans le groupe de Brauer du hensélisé de l'anneau local de \mathcal{X} en M . L'équation

$$X^2 - \pi_2\pi_3Y^2 = -\pi_2$$

a donc une solution (u, v) dans K_M , et E possède donc le point rationnel $(u, v, 0, 1, 1, 0)$ sur K_M . Le calcul pour M dans L_2 ou L_3 est le même.

Supposons $M \in T$, donc $\kappa(M) = k$, et $M \in L_1$. Alors π_2 ou π_3 est une unité en M , et pour l'un au moins d'entre eux, disons que ce soit π_2 , la valeur $\pi_2(M) \in k^\times$ est un carré non nul, donc π_2 est un carré dans le hensélisé en M et donc dans K_M . La K -variété E admet alors un point évident de la forme $(0, u, 1, 0, 0, 1)$ dans K_M . Les autres cas sont analogues.

Si le point x est de codimension 1 et situé sur la fibre générique $X = \mathcal{X} \times_R F$, comme R est hensélien, l'adhérence de x sur \mathcal{X} rencontre la fibre spéciale en un unique point fermé, qu'on notera M . Cette adhérence est le spectre d'un anneau local hensélien S , fini sur R , de corps résiduel $\kappa(M)$. On reprend alors la discussion ci-dessus.

Si l'on a $M \notin T$, et $M \in L_1$, l'algèbre de quaternions (π_2, π_3) est non ramifiée au voisinage de M , donc en particulier sur $\text{Spec } S$, et sa classe est nulle dans le corps résiduel de S , donc aussi dans $\text{Br } S$, donc dans $\text{Br } \kappa(x)$.

L'équation

$$X^2 - \pi_2\pi_3Y^2 = -\pi_2$$

a donc une solution (u, v) dans K_x , et E possède donc le point rationnel $(u, v, 0, 1, 1, 0)$ sur K_x . Le calcul pour M dans L_2 ou L_3 est le même.

Si l'on a $M \in T$, donc $\kappa(M) = k$, et $M \in L_1$. Alors par exemple π_2 est une unité en M et un carré dans le corps résiduel, il induit donc une unité sur S qui est un carré dans le corps résiduel de S , c'est donc un carré dans S et dans le corps des fractions de S . La K -variété E admet alors un point évident de la forme $(0, u, 1, 0, 0, 1)$ dans K_M . Les autres cas sont analogues. \square

Remarque 5.10. — On peut ainsi de multiples façons produire une courbe projective et lisse X sur un corps p -adique, de corps des fonctions K , et une K -variété E , espace homogène d'un K -tore, telle que E ait des points dans tous les complétés de K en ses valuations discrètes, mais n'ait pas de K -point. On fabrique un exemple concret en partant de la courbe sur le corps \mathbb{Q}_p ($p \neq 2$) d'équation

$$y^2 = x^3 + x^2 + p^3$$

dont le modèle propre minimal régulier sur \mathbb{Z}_p est d'après le lemme 5.5 du type voulu, et en passant à une extension finie non ramifiée convenable de \mathbb{Q}_p suivant la procédure décrite dans la proposition 5.9.

En utilisant un argument de restriction du corps de base à la Weil, comme à la remarque 5.6, sur tout corps $\mathbb{Q}_p(x)$, avec $p \neq 2$, on peut donner des exemples de tores et de groupes semi-simples ayant un espace principal homogène qui a des points dans tous les hensélisés de $\mathbb{Q}_p(x)$ par rapport aux valuations discrètes, mais qui n'a pas de point sur $\mathbb{Q}_p(x)$.

5.4. Traduction des exemples à la Harbater–Hartmann–Krashen.

— Soient R un anneau de valuation discrète complet, k son corps résiduel et F son corps des fractions. Soit K le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse, géométriquement intègre sur F . Soit \mathcal{X} un schéma régulier intègre de dimension 2, propre et plat sur $\text{Spec}(R)$, de corps des fonctions K . Soit X_0 la fibre spéciale réduite de \mathcal{X} et soit \mathcal{P} un ensemble fini de points fermés de X_0 qui contient tous les points singuliers de X_0 . Soit \mathcal{U} l'ensemble des composantes connexes de $X_0 \setminus \mathcal{P}$. Pour tout point P de \mathcal{X} , notons K_P le corps des fractions du complété de l'anneau local de \mathcal{X} en P . Soit $t \in R$ une uniformisante.

Pour $U \in \mathcal{U}$, notons R_U le sous-anneau de K formé des fonctions rationnelles sur \mathcal{X} qui sont régulières aux points de U . Soit K_U le corps des fractions de la complétion t -adique de R_U .

Soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur K . On note

$$\text{III}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}, G) = \ker[H^1(K, G) \rightarrow \prod_{\zeta \in \mathcal{P} \cup \mathcal{U}} H^1(K_{\zeta}, G)]$$

et

$$\text{III}_0(\mathcal{X}, G) = \ker[H^1(K, G) \rightarrow \prod_{P \in X_0} H^1(K_P, G)].$$

Dans cette dernière définition, P parcourt tous les points de la fibre spéciale, y compris les points génériques des composantes.

Harbater, Hartmann et Krashen [17, Thm. 3.7] ont montré que si G est connexe et K -rationnel, alors $\text{III}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}, G) = 1$. Dans [18, Cor. 5.9], ils montrent que pour tout groupe algébrique linéaire G sur K , $\text{III}_0(\mathcal{X}, G) = \cup_{\mathcal{P}} \text{III}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}, G)$, où \mathcal{P} parcourt tous les ensembles finis de points fermés de \mathcal{X} contenant tous les points singuliers de X_0 .

Ils montrent également [18, Prop. 8.4] que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \rightarrow \text{III}_0(\mathcal{X}, G) \rightarrow \text{III}(K, G) \rightarrow \prod_{P \in X_{0,0}} H^1(K_P, G).$$

Ici $X_{0,0}$ est l'ensemble des points fermés de X_0 , et

$$\text{III}(K, G) = \text{Ker}[H^1(K, G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, G)].$$

Proposition 5.11. — *Il existe un anneau de valuation discrète complet R de corps résiduel k séparablement clos de caractéristique différente de 2, de corps des fractions F , un R -schéma régulier intègre, propre et plat sur $\text{Spec } R$ de fibre générique une F -courbe projective, lisse géométriquement intègre, de corps des fonctions K , et un K -groupe connexe lisse G , non K -rationnel, et un ensemble \mathcal{P} de points fermés comme ci-dessus tels qu'aucun des ensembles $\text{III}_0(\mathcal{X}, G)$, $\text{III}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}, G)$ et $\text{III}(K, G)$ ne soit réduit à un élément.*

Démonstration. — En utilisant la proposition 5.2, le corollaire 5.3 et les exemples 5.6, on trouve un K -groupe G et un élément non trivial dans $\text{III}(K, G)$ dont l'image dans chaque $H^1(K_P, G)$ pour P point fermé de \mathcal{X} est triviale (voir le point (ii) de la proposition 5.2). L'énoncé résulte alors des rappels ci-dessus. \square

6. Une descente

Soit k un corps séparablement clos de caractéristique différente de 2. Soit R une k -algèbre locale intègre, excellente, hensélienne, de corps résiduel k . Soit \mathcal{X} un schéma régulier intègre de dimension 2 équipé d'un morphisme projectif $p : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$. On suppose que l'on est dans l'une des situations suivantes :

(a) L'anneau R est un anneau de valuation discrète, les fibres de p sont de dimension 1, la fibre générique est lisse et géométriquement intègre.

(b) L'anneau R est de dimension 2, et p est birationnel.

Soit K le corps des fonctions rationnelles de \mathcal{X} . Soient $a, b, c \in K^\times$. Soit E la K -variété définie par l'équation

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

On suppose que le support de la réunion des diviseurs de a et b et c sur \mathcal{X} est à croisements normaux stricts.

Théorème 6.1. — *Soit $A = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \text{Br } E$. S'il existe une famille de points locaux $P_\gamma \in E(K_\gamma)$ pour $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ et K_γ le hensélisé de K en γ telle que la famille $\partial_\gamma(A(P_\gamma))$ pour les $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ soit dans le noyau de*

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/2,$$

alors $E(K) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Si l'un de a, b, ab est un carré dans K , alors $E(K) \neq \emptyset$. Supposons donc qu'aucun de a, b, ab n'est un carré dans K . Soit $L = K(\sqrt{b})$.

Par un résultat d'Abhyankar [1, Theorem 8, p. 77], quitte à remplacer \mathcal{X} par un éclaté, on peut supposer que la clôture intégrale de \mathcal{X} dans L est un schéma régulier. D'après la proposition 4.8, l'hypothèse d'existence d'une famille $\{P_\gamma\}$ comme dans l'énoncé est préservée par tout éclatement.

Comme R est une k -algèbre, ce qui garantit la validité de la conjecture de Gersten pour \mathcal{X} , et comme le corps k est séparablement clos, la proposition 2.1 établit l'existence de $\alpha \in {}_2\text{Br}(K)$ tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$, on ait

$$\partial_\gamma(\alpha) = \partial_\gamma(A(P_\gamma)) \in H^1(\kappa(\gamma), \mathbf{Z}/2),$$

et donc, puisque $\text{Br } \kappa(\gamma) = 0$,

$$\alpha = A(P_\gamma) \in \text{Br } K_\gamma.$$

Montrons que la classe $\alpha \in \text{Br } K$ s'annule dans $\text{Br } L$. Soit \mathcal{Z} la clôture intégrale de \mathcal{X} dans L , qui est donc un schéma régulier, fini et plat sur \mathcal{X} . Soit $\zeta \in \mathcal{Z}^{(1)}$. Son image $\gamma \in \mathcal{X}$ est aussi de codimension 1. La restriction de la valuation discrète v_ζ de L à K est la valuation discrète v_γ . Puisque $\alpha = A(P_\gamma) \in \text{Br } K_\gamma$ et $A = (X_1^2 - aY_1^2, b)$, on a $\alpha \otimes L_\zeta = 0 \in \text{Br } L_\zeta$. Ceci vaut pour tout point ζ de codimension 1 sur la surface régulière \mathcal{Z} , laquelle est propre sur un anneau local, normal, hensélien, extension finie de R , de corps résiduel séparablement clos de caractéristique différente de 2. La proposition 2.1 appliquée à \mathcal{Z} donne alors $\alpha \otimes_K L = 0 \in \text{Br } L$.

Ceci implique que $\alpha \in \text{Br } K$ est la classe d'une algèbre de quaternions (ρ, b) avec $\rho \in K^\times$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$, on a

$$A(P_\gamma) = (\rho, b) \in \text{Br } K_\gamma.$$

Par éclatements successifs on trouve un morphisme projectif birationnel $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que sur \mathcal{Y} la réunion des supports des diviseurs de a, b, c et ρ et

aussi de la fibre spéciale forment un diviseur à croisements normaux dont deux composantes irréductibles se coupent au plus en un point.

D'après la proposition 4.8, on peut trouver sur un tel \mathcal{Y} des points P_γ complétant ceux qui viennent de \mathcal{X} et tels que la nouvelle famille $\partial_\gamma(A(P_\gamma))$ soit dans l'homologie du complexe de Bloch-Ogus de \mathcal{Y} . La proposition 2.10 appliquée à \mathcal{Y} assure l'existence de $\beta \in \text{Br } K$ d'image la famille des $\partial_\gamma(A(P_\gamma))$.

La functorialité covariante du complexe de Bloch-Ogus (Proposition 2.1) donne un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_2\text{Br } K & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{Y}^{(1)}} & H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) & \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & {}_2\text{Br } K & \longrightarrow & \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} & H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) & \end{array}$$

où les flèches verticales de droite sont des flèches d'oubli et la flèche verticale de gauche est l'identité, et la commutativité de ce diagramme assure $\beta = \alpha \in \text{Br } K$.

Pour tout γ de codimension 1 sur \mathcal{Y} , on a donc

$$(A(P_\gamma)) = (\rho, b) \in \text{Br } K_\gamma.$$

Notons $f = X_1^2 - aY_1^2 \in K(E)^\times$. On a donc

$$(f(P_\gamma), b) = (\rho, b) \in \text{Br } K_\gamma.$$

On peut donc résoudre l'équation

$$f(P_\gamma) = \rho(U^2 - bV^2) \neq 0$$

sur K_γ .

On trouve donc que la K -variété W définie par

$$X_1^2 - aY_1^2 = \rho(U^2 - bV^2) \neq 0$$

et

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2) = c(X_3^2 - abY_3^2) \neq 0,$$

a des solutions dans tous les K_γ pour tout γ de codimension 1 sur \mathcal{Y} .

La K -variété W est un torseur sur la K -variété W sous le K -tore $R_{K(\sqrt{b})/K}^1 \mathbb{G}_m$, le morphisme structural étant donné par l'oubli de la première équation.

Après changement de variables,

$$(U + \sqrt{b}V)(X_2 + \sqrt{b}Y_2) = X_4 + \sqrt{b}Y_4$$

la K -variété W est définie par le système

$$\begin{aligned} X_1^2 - aY_1^2 &= \rho(U^2 - bV^2) \neq 0 \\ \rho.(X_4^2 - bY_4^2) &= c(X_3^2 - abY_3^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Ceci définit le produit de deux K -variétés, chacune un cône épointé sur une quadrique lisse de dimension 2, donnée par une forme quadratique diagonale dont les coefficients possèdent la propriété : la réunion de leurs supports et du support de la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux et dont deux composantes irréductibles se coupent en au plus un point.

Montrons que pour toute valuation discrète v sur K , une telle quadrique $q = 0$ admet un point dans le hensélisé K_v . Soit $S_v \subset K_v$ l'anneau de la valuation v . Comme k est séparablement clos, R hensélien et $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$ projectif, cet anneau est centré sur un point $x \in \mathcal{X}$. On a donc une inclusion locale $O_{\mathcal{X},x} \subset S_v$. Si x est un point de codimension 1 de \mathcal{X} , l'énoncé est clair. Supposons que x est un point de codimension 2. Le corps résiduel en x est alors séparablement clos. Si en x , le quotient de deux des 4 coefficients de q est une unité à multiplication par un carré près, alors dans K_v , c'est un carré et la quadrique $q = 0$ a un point dans K_v . Si aucun de ces quotients n'est une unité à multiplication par un carré près, l'hypothèse de croisements normaux fait que l'on peut supposer que ces 4 coefficients sont $(\pi, \delta, u\pi\delta, v)$ avec u, v des unités en x et (π, δ) des générateurs de l'idéal maximal. Mais la forme quadratique diagonale $\langle \pi, \delta, u\pi\delta, v \rangle$ n'a pas de zéro non trivial dans le hensélisé K_π , car la classe de δ dans le corps des fonctions de $O_{\mathcal{X},x}/\pi$ n'est pas un carré. Ce cas est donc exclu. Ainsi $q = 0$ admet des points dans tous les hensélisés K_v .

Dans le cas (b) (cas « local »), le théorème [11, Thm. 3.1] sur les formes quadratiques de rang 3 ou 4 garantit l'existence d'un K -point sur $q = 0$. Appliquant ceci à chacune des deux quadriques, on obtient $W(K) \neq \emptyset$ et donc $E(K) \neq \emptyset$.

Plaçons-nous dans le cas (a) (cas « semi-global »). Une forme quadratique $q = \langle 1, a, b, abc \rangle$ de rang 4 a un zéro non trivial sur un corps K si et seulement si la forme quadratique ternaire $\langle 1, a, b \rangle$ a un zéro non trivial sur le corps $K_1 = K(\sqrt{c})$. Dans la situation ici étudiée, il existe un anneau de valuation discrète hensélien R_1 à corps résiduel séparablement clos et un schéma régulier \mathcal{X}_1 projectif et plat sur $\text{Spec } R_1$, à fibre générique géométriquement connexe et lisse, dont le corps des fonctions est K_1 . La forme quadratique $\langle 1, a, b \rangle$ a des points dans tous les hensélisés K_{1w} . Ainsi l'algèbre de quaternions $(a, b) \in \text{Br } K_1$ est en particulier triviale dans tous les $\text{Br } K_{1y}$ pour y parcourant les points de codimension 1 de \mathcal{X}_1 . Sa classe est donc dans $\text{Br } \mathcal{X}_1$, et ce groupe est nul ([11, Cor. 1.10], Prop. 2.1 ci-dessus). Ainsi $\langle 1, a, b \rangle$ est isotrope sur K_1 , et donc q l'est sur K . On conclut comme ci-dessus $W(K) \neq \emptyset$ et donc $E(K) \neq \emptyset$. \square

Corollaire 6.2. — *Si la fibre spéciale réduite est un arbre, et si $E(K_\gamma) \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$, alors $E(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Soit S l'ensemble fini des points fermés de \mathcal{X} où aucun des a , b ou ab n'est le produit d'une unité par un carré dans K . À chaque tel point x sont attachées deux courbes lisses intègres, celles qui sont dans les supports de la réunion du diviseur de a et de b et passent par x , définies localement en x par les π, δ du paragraphe 4.3. Soit T l'ensemble de ces courbes. Ces courbes sont deux à deux transverses. Comme R est hensélien, si une courbe de T n'est pas une composante de la fibre spéciale, elle rencontre la fibre spéciale en exactement un point. De l'hypothèse que la fibre spéciale est un arbre et des observations ci-dessus résulte que le graphe dont les sommets sont les courbes de T et les arêtes les intersections de deux telles courbes lorsqu'elles sont dans S est un arbre.

Sur chaque composante connexe de cet arbre, partant d'un point γ quelconque et d'un point P_γ de $E(K_\gamma)$, on peut d'après la proposition 4.7 choisir les points M_δ sur tout sommet voisin δ de façon à ce que l'on ait en l'intersection M de γ et δ la formule

$$\partial_M(\partial_\gamma(P_\gamma)) + \partial_M(\partial_\delta(M_\delta)) = 0.$$

On continue de proche en proche, ce qui est possible car le graphe défini sur T est un arbre. Pour les courbes γ qui n'appartiennent pas à T , on choisit un point $P_\gamma \in E(K_\gamma)$ quelconque.

Les calculs du paragraphe 4.3 montrent alors que la famille $\{\partial_\gamma(A(P_\gamma))\}$ pour γ parcourant les points de codimension 1 de \mathcal{X} est dans l'homologie du complexe de Bloch-Ogus.

On conclut alors en utilisant le théorème 6.1. \square

Exemples 6.3. — Dans la situation « locale », l'hypothèse que la fibre spéciale forme un arbre est satisfaite si la singularité de R est rationnelle. C'est le cas par exemple si R est régulier, par exemple si $R = \mathbb{C}[[X, Y]]$.

Dans la situation « semi-globale », l'hypothèse que la fibre spéciale forme un arbre est satisfaite si la fibre générique est la droite projective sur le corps des fractions de R . Elle est aussi satisfaite si la fibre générique de \mathcal{X}/R est une courbe elliptique dont le modèle de Kodaira-Néron sur R (cf. [34]) n'a pas de lacet, ce qui exclut les types $I_n, n \geq 1$.

Corollaire 6.4. — *Supposons qu'en tout point $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$ l'un de a , b ou ab est un carré dans K_γ . Alors $E(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. — L'hypothèse implique clairement que l'on a $E(K_\gamma) \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$. D'après la proposition 4.6, l'hypothèse implique aussi que pour toute famille $\{P_\gamma \in E(K_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}}$ la famille $\{\partial_\gamma(A(P_\gamma))\}$ est dans le noyau de

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) \rightarrow \bigoplus_{M \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/2.$$

On conclut alors en utilisant le théorème 6.1. \square

Remarque 6.5. — Soit K un corps de nombres, $a, b, c \in K^\times$, puis E la K -variété définie par

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abY_3^2) = c.$$

et Z une K -compactification lisse de E . En utilisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_K} \text{Br } K_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de la théorie du corps de classes, la démonstration ci-dessus, fortement simplifiée car on est en dimension 1, montre, via une descente, que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour Z est la seule obstruction à l'existence d'un point rationnel. C'est un cas particulier d'un théorème sur les espaces principaux homogènes de K -tores [32, Cor. 8.7]. Ceci nous amène à poser la question :

Le théorème 6.1 est-il un cas particulier d'un théorème général sur les espaces principaux homogènes de tores ?

Remerciements. Le travail sur cet article a commencé en 2010. Pour de nombreuses discussions, nous remercions David Harari, David Harbater, Yong Hu et Alena Pirutka. Les institutions suivantes nous ont permis d'avancer dans ce projet : l'Université Emory (Atlanta), l'Université Paris Sud (Orsay), et le Centre Interfacultaire Bernoulli de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Pour ce travail, J.-L. Colliot-Thélène a partiellement bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005. R. Parimala and V. Suresh are partially supported by the National Science Foundation grants DMS-1001872 and DMS-1301785 respectively.

Références

- [1] S. Abhyankar, Simultaneous resolution for algebraic surfaces, Amer. J. Math. **78** (1956), 761–790.
- [2] S. Bloch et A. Ogus, Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. 4ème série **7** (1974) 181–202.
- [3] M. Borovoi, The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **473** (1996), 181–194.
- [4] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, The elementary obstruction and homogeneous spaces, Duke Math. J. **141** (2008) 321–364.
- [5] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, avec un appendice par P. Gille, J. Algebra **276** (2004) 292–339.

- [6] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58.1**, A. M. S. (1995) 1–64.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, Groupes linéaires sur les corps de fonctions de courbes réelles. *J. für die reine und angew. Mathematik (Crelle)* **474** (1996) 139–167.
- [8] J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Brauer non ramifié d’espaces homogènes de tores, à paraître dans le *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*.
- [9] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields, *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 2, 285–341.
- [10] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, Compactification équivariante d’un tore (d’après Brylinski et Künnemann), *Expositiones Mathematicae* **23** (2005) 161–170.
- [11] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren et R. Parimala, Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes. In : *Algebra, Arithmetic and Geometry, Mumbai, 2000*, R. Parimala (editor), Part I, Narosa Publishing House, 2002, 185–217.
- [12] J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala et V. Suresh, Patching and local-global principles for homogeneous spaces over function fields of p -adic curves, *Commentarii Mathematici Helvetici* **87** (2012) 1011–1033.
- [13] A. Ducros, L’obstruction de réciprocité à l’existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d’une courbe réelle. *J. für die reine und angew. Math. (Crelle)* **504** (1998), 73–114.
- [14] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge studies in advanced mathematics **101** (2006).
- [15] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson et North Holland, 1968, 88–188.
- [16] D. Harari et T. Szamuely, Local-global questions for tori over p -adic function fields, <http://arxiv.org/abs/1307.4782>, à paraître dans *Journal of Algebraic Geometry*.
- [17] D. Harbater, J. Hartmann, D. Krashen, Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras, *Invent. math.* **178** (2009) 231–263.
- [18] D. Harbater, J. Hartmann, D. Krashen, Local-global principles for torsors over arithmetic curves, <http://http://arxiv.org/abs/1108.3323>.
- [19] D. Harbater, J. Hartmann, D. Krashen, Local-global principles for Galois cohomology, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **89** no. 1 (2014), 215–253.
- [20] Yong Hu, Local-global principle for quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains, *Ann. Inst. Fourier* **62**, no. 6 (2012), 2131–2143.
- [21] Yong Hu, Division algebras and quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian domains, *Algebra & Number Theory* **7** no. 8 (2013), 1919–1952.

- [22] Yong Hu, Hasse principle for simply connected groups over function fields of surfaces, <http://arxiv.org/abs/1203.1075>, à paraître dans Journal of the Ramanujan Mathematical Society.
- [23] U. Jannsen et S. Saito, Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, Doc. math. Extra volume Kato (2003) 479–538.
- [24] K. Kato, A Hasse principle for two-dimensional fields, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **366** (1986) 142–181.
- [25] Yu. I. Manin, Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne, in *Congrès intern. math. Nice*, 1970, tome **I**, Gauthier-Villars, Paris (1971) p. 401–411.
- [26] I. A. Panin, Le cas équivariant de la conjecture de Gersten, Tr. Mat. Inst. Steklova 241 (2003), Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom., 169–178 ; trad. ang. dans Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 2 (241), 154–163.
- [27] R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*. Volume I, 339–361, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
- [28] R. Preeti, Classification theorems for hermitian forms, the Rost kernel and Hasse principle over fields with $cd_2(k) \leq 3$, J. Algebra **385** (2013) 294–313.
- [29] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, LNM **169** (1970) Springer-Verlag.
- [30] J. Riou, Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue, Exposé XVI in *Travaux de Gabber sur l’uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, Séminaire à l’École polytechnique 2006–2008 (L. Illusie, Y. Laszlo et F. Orgogozo), à paraître.
- [31] S. Saito et K. Sato, A finiteness theorem for zero-cycles over p -adic fields, avec un appendice par U. Jannsen : Resolutions of singularities for embedded curves, Ann. of Math. **172** (2010), 1593–1639.
- [32] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **327** (1981) 12–80.
- [33] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer LNM 5 (1994) Cinquième édition.
- [34] J. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM **151** Springer Verlag (1994).

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr

R. PARIMALA, Department of Mathematics & CS, Emory University, Atlanta, Georgia, USA
E-mail : parimala@mathcs.emory.edu

V. SURESH, Department of Mathematics & CS, Emory University, Atlanta, Georgia, USA
E-mail : suresh.venapally@gmail.com