IMRN International Mathematics Research Notices
1996, No. 4

Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer

Jean-Louis Colliot-Thélène et Shuji Saito

Introduction

En utilisant le théorème de dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique, S. Lichtenbaum [8] a établi un théorème de dualité pour toute courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un tel corps k. Il existe un accouplement naturel

$$\mathrm{Br}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Br}(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

entre groupe de Brauer et groupe de Picard de X, et Lichtenbaum montre que cet accouplement est non dégénéré des deux côtés. Dans ce même article [8], Lichtenbaum donne aussi une autre démonstration d'un théorème de Roquette: pour X une courbe comme ci-dessus, le noyau de l'application naturelle $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ est d'ordre I, où I désigne l'indice de X, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des degrés (par rapport à k) des points fermés de X. En particulier cet indice est 1 si et seulement si $\mathrm{Br}(k)$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(X)$.

Pour X/k une variété propre et lisse de dimension plus grande que 1, on peut se demander s'il existe des énoncés analogues. Notant $CH_0(X)$ le groupe de Chow des cycles de dimension zéro, on peut encore considérer l'accouplement (voir § 1):

$$\mathrm{Br}(X) \times CH_0(X) \to \mathrm{Br}(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Dans la présente note, où nous nous limitons à la torsion première à p de $\mathrm{Br}(X)$ (voir remarque 2.5 (a)), nous étudions le noyau à gauche de cet accouplement. Si l'on dispose d'un théorème de pureté convenable (voir § 1) pour le groupe de Brauer d'un modèle régulier, ce noyau coïncide avec le groupe de Brauer d'un modèle régulier et propre $\mathcal{X}$

Received 11 December 1995.
Communicated by Barry Mazur.

de X sur l'anneau des entiers de k (corollaire 2.4). A tout le moins peut-on assurer qu'un élément du noyau est non ramifié en codimension un sur un tel modèle (théorème 2.1).

L'idée est simple: si un élément α du groupe de Brauer de X (de torsion première à p) est ramifié au point générique d'une composante (réduite) Y de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, alors cet élément a un résidu non trivial, qui définit un revêtement cyclique connexe non trivial d'un ouvert lisse de Y. Le théorème de Tchebotareff permet de trouver un point fermé m de Y où ce revêtement est non scindé. On relève alors ce point fermé de la fibre spéciale en un point fermé M de la fibre générique (si la composante Y est multiple, on utilise le lemme 2.3). On vérifie alors que α ne s'annule pas en M.

Nous donnons également une version en toute dimension du théorème de Roquette-Lichtenbaum (théorème 3.1): lorsqu'on dispose du théorème de pureté pour le groupe de Brauer, on peut (à la partie p-primaire près) calculer l'indice I de X au moyen des groupes de Brauer de X et d'un modèle propre et régulier $\mathcal{X}$ (théorème 3.1). En particulier, si le groupe $\mathrm{Br}(k)$ s'injecte dans le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X})$, alors l'indice est une puissance de p.

1 Rappels et notations

Par anneau on entendra un anneau commutatif unitaire. Etant donné un groupe abélien de torsion M, et un nombre premier l, on note $M\{l\}$ la composante l-primaire de M. On note $\mathbf{Q}_l$ le corps des nombres l-adiques. On note ${}_nM$ le sous-groupe de M formé des éléments annulés par l'entier n.

La cohomologie employée dans cet article est la cohomologie étale. Suivant Grothendieck [5], on appelle groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ d'un schéma X le groupe $H^2(X, \mathbf{G}_m)$. Etant donné un anneau A, on note $\mathrm{Br}(A) = \mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A))$. Rappelons que si X est un schéma noethérien régulier intègre, $U \subset X$ un ouvert non vide et K le corps des fonctions rationnelles de X, les applications de restriction définissent des inclusions $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(U) \subset \mathrm{Br}(K)$, chacun des trois groupes étant de torsion [5, II, 1.10].

Lemme 1.1. Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel κ (non nécessairement parfait). Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) α appartient à $\mathrm{Br}(A) \subset \mathrm{Br}(K)$;

(ii) il existe un anneau de valuation discrète B de corps des fractions L et un homomorphisme local étale $A \to B$, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, tel que l'image de α dans $\mathrm{Br}(L)$ appartienne à $\mathrm{Br}(B) \subset \mathrm{Br}(L)$;

(iii) si A^h est le hensélisé de A, de corps des fractions K^h, l'image de α dans $\mathrm{Br}(K^h)$ appartient à $\mathrm{Br}(A^h)$.

Si de plus α est de torsion première à la caractéristique résiduelle de κ, alors ces conditions équivalent encore à la condition:

(iv) le résidu $\delta_A(\alpha) \in H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est trivial. □

Démonstration. L'équivalence de (i) et (iv) est donnée par [5, III, prop. (2.1)]. Celle de (ii) et (iii) est évidente. Celle de (i) et (ii) résulte de l'excision pour la cohomologie étale [9, prop. III.1.27, p. 92]. ■

Soient k un corps et X une k-variété (= k-schéma séparé de type fini). On note $Z_0(X)$ le groupe libre sur les points fermés de X, et $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle. La flèche d'évaluation sur les points fermés, combinée avec la corestriction, définit un accouplement bilinéaire $\mathrm{Br}(X) \times Z_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$. Si X/k est propre, cet accouplement passe au quotient par l'équivalence rationnelle, et définit donc un accouplement bilinéaire $\mathrm{Br}(X) \times CH_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$ (voir [17, XVII, § 6]). Cet accouplement induit un accouplement bilinéaire

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \times A_0(X) \to \mathrm{Br}(k),$$

où $A_0(X) \subset CH_0(X)$ est le groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro.

Soit p un nombre premier, et soit k un corps p-adique, c'est-à-dire un corps valué complet pour une valuation discrète de corps résiduel un corps fini. Soient O son anneau des entiers et $\mathcal{X}/O$ un schéma régulier, intègre, propre et plat sur O. Soit $X = \mathcal{X} \times_O k$. L'accouplement ci-dessus induit alors un accouplement

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \times CH_0(X) \to \mathrm{Br}(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(la dernière égalité étant donnée par la théorie du corps de classes local). Ceci résulte de la propreté de $\mathcal{X}/O$ et de la nullité du groupe de Brauer de O. Notons que dans ce cas, pour tout point fermé M de X, de corps résiduel $k(M)$, la corestriction $\mathrm{Br}(k(M)) \to \mathrm{Br}(k)$ se lit comme l'application identité de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Etant donné un schéma noethérien régulier intègre $\mathcal{X}$, de corps des fonctions K, on dira ici que le *théorème de pureté* vaut pour le groupe de Brauer sur $\mathcal{X}$ si l'intersection dans $\mathrm{Br}(K)$ des groupes de Brauer des anneaux locaux aux points de codimension un de $\mathcal{X}$ coïncide avec $\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \subset \mathrm{Br}(K)$. Le théorème de pureté est connu pour un schéma de dimension au plus trois (Auslander-Goldman, Grothendieck [5, I, thm. 2.1, p. 76]; Gabber [4, thm. 2′]). Pour $\mathcal{X}$ (régulier) comme au théorème 2.1 ci-dessous, et pour $l \neq p$ premier, le théorème vaut pour la partie l-primaire du groupe de Brauer. Ceci a été établi pour $l \geq \dim(\mathcal{X}) + 2$ par Thomason [18, cor. 3.7], et Gabber a annoncé une démonstration sans cette restriction. L'hypothèse de pureté (pour la torsion première à p) pourra donc être omise dans les énoncés 2.4, 2.6 et 3.1 ci-dessous.

2 Le théorème principal

Théorème 2.1. Soit k un corps p-adique, O son anneau des entiers, π une uniformisante et $\mathbf{F}$ le corps résiduel. Soit $\mathcal{X}$ un schéma normal, intègre, de type fini et plat sur $S = \mathrm{Spec}(O)$. Soit X/k la fibre générique, supposée régulière, et soit K le corps des fonctions rationnelles de X, qui est aussi celui de $\mathcal{X}$. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(K)$ un élément du groupe de Brauer de X, annulé par un entier n premier à p. Supposons que pour tout point fermé M d'un ouvert non vide de X, la restriction $\alpha(M) \in \mathrm{Br}(k(M))$ de α au corps résiduel $k(M)$ soit nulle. Alors, pour tout point η de codimension 1 de $\mathcal{X}$, d'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta}$, il existe un (unique) élément $\alpha_\eta \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta})$ dont l'image dans $\mathrm{Br}(K)$ coïncide avec celle de α. $\square$

En d'autres termes, la classe α est non ramifiée en codimension 1 sur $\mathcal{X}$.

Démonstration. Par localisation, on peut supposer qu'on a les propriétés suivantes. Le schéma $\mathcal{X}$ est affine et régulier, soit $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(A)$. Le diviseur défini par la fibre spéciale $\mathcal{X} \times_O \mathbf{F} \subset \mathcal{X}$ est un multiple d'un diviseur principal intègre $Y = \mathrm{Spec}(A/t) \hookrightarrow \mathcal{X}$, avec $t \in A$, et Y est lisse sur $\mathbf{F}$. On a l'égalité de diviseurs: $\mathcal{X} \times_O \mathbf{F} = e.Y$, équivalente à l'égalité $\pi = u.t^e$, avec u unité de A. Le point η est le point générique de Y. Enfin, pour tout point fermé M de X dont l'adhérence schématique dans $\mathcal{X}$ est finie sur S, on a $\alpha(M) = 0 \in \mathrm{Br}(k(M))$.

Soit A_η l'anneau local de A en η, et soit κ son corps résiduel, qui n'est autre que le corps des fonctions rationnelles $\mathbf{F}(Y)$ de Y. On appelle ici *voisinage spécial* de η (le spectre d')une A-algèbre étale intègre B telle que la flèche $\kappa \to B \otimes_A \kappa$ soit un isomorphisme. La limite inductive des voisinages spéciaux n'est autre que le hensélisé de A en η. En particulier (lemme 1.1), un élément de $\mathrm{Br}(K)$ appartient à $\mathrm{Br}(A_\eta)$ si et seulement si son image réciproque sur un voisinage spécial B/A convenable appartient à $\mathrm{Br}(B)$. On a le lemme facile suivant.

Lemme 2.2. Soit $p\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ un voisinage spécial de η. Soit $M \in \mathrm{Spec}(B[1/\pi])$ un point fermé. Soit $\widetilde{M} \subset \mathrm{Spec}(B)$ l'adhérence schématique de M. Supposons que $\widetilde{M}$ est régulier et fini sur S. Soit $N = p(M) \in \mathrm{Spec}(A[1/\pi])$. Soit $\widetilde{N} \subset \mathrm{Spec}(A)$ l'adhérence schématique de N. Alors chacune des applications $\widetilde{M} \to \widetilde{N} \times_A B \to \widetilde{N}$ est un isomorphisme. En particulier, l'inclusion de corps résiduels $k(N) \hookrightarrow k(M)$ est un isomorphisme. $\square$

Etant donnés $\mathcal{X}/S$, X, etc., comme dans l'énoncé du théorème 2.1, et $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$, on dira ici que α satisfait la propriété (**P**) si pour tout point fermé $M \in X$ d'adhérence schématique $\widetilde{M} \subset \mathcal{X}$ régulière et finie sur S, on a $\alpha(M) = 0 \in \mathrm{Br}(k(M))$. Si α provient de $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$, alors α satisfait (**P**) (en effet, $\mathrm{Br}(O) = 0$). Par ailleurs, si $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(A)$ est comme ci-dessus, si B/A est un voisinage spécial de η, et si $\alpha \in \mathrm{Br}(A[1/\pi])$ satisfait (**P**), alors la restriction $\alpha_B \in \mathrm{Br}(B[1/\pi])$ satisfait (**P**): ceci résulte du lemme ci-dessus.

Supposons le résidu $\delta_\eta(\alpha) \neq 0 \in H^1(\mathbf{F}(Y), \mathbf{Z}/n) \subset H^1(\mathbf{F}(Y), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (on note $\delta_\eta = \delta_{A_\eta}$). Par le lemme de Hensel, il existe un voisinage spécial B/A, avec ζ image réciproque de η, tel que la restriction de $\delta_\eta(\alpha)$ au corps résiduel de ζ (isomorphe à celui de η), qui vaut $\delta_\zeta(\alpha_B) \neq 0$, provienne par réduction d'un élément $\beta \in H^1(\mathrm{Spec}(B), \mathbf{Z}/n)$. La restriction α_B satisfait la propriété ($\mathbf{P}$) sur Spec(B), comme on l'a vu ci-dessus.

Soit L le corps des fractions de B, qui est aussi celui de B_ζ. Soit Z l'image réciproque de Y dans Spec(B) (c'est le diviseur principal de Spec(B) défini par t; la flèche $Z \to Y$ est par ailleurs une immersion ouverte). On a l'égalité

$$\delta_\zeta(\alpha_B - ((t) \cup \beta))) = 0,$$

où (t) désigne la classe de l'image de t dans $L^*/L^{*n} \simeq H^1(L, \mu_n)$ (on note μ_n le faisceau des racines n-èmes de l'unité). Quitte à remplacer Spec(B) par un ouvert affine non vide contenant ζ, on peut donc (lemme 1.1) supposer $\alpha_B - ((t) \cup \beta)) \in \mathrm{Br}(B)$.

La classe $\beta_Z \in H^1(Z, \mathbf{Z}/n)$, restriction de β à $Z \subset \mathrm{Spec}(B)$, n'est pas nulle, puisque sa restriction au point générique de Z est $\delta_\zeta(\alpha_B) \neq 0$. Elle définit donc un revêtement cyclique Z_1/Z connexe non trivial de Z (de groupe peut-être plus petit que $\mathbf{Z}/n$). Comme Z est lisse sur $\mathbf{F}$ et connexe, il en est de même de Z_1, qui est donc intègre. En appliquant le théorème de densité de Tchebotareff ([7], [16, thm. 7]) au revêtement Z_1/Z, on obtient une infinité de points fermés $m \in Z$ tels que l'évaluation $\beta(m) \in H^1(\mathbf{F}(m), \mathbf{Z}/n)$ soit non nulle. Soit m un tel point.

Des variantes du lemme suivant, qui n'est autre que le lemme de Hensel lorsque $e = 1$, apparaissent dans [1, cor. 9.1.9, p. 242] et [3, lemme 3.2].

Lemme 2.3. Pour Spec(B)/S et $Z = \mathrm{Spec}(B/t)$ comme ci-dessus, avec $Z/\mathbf{F}$ lisse et $\pi = ut^e$ pour $u \in A^*$, et m point fermé de Z de degré d sur $\mathbf{F}$, il existe un sous-schéma fermé intègre et régulier $T \subset \mathrm{Spec}(B)$, qui est fini et plat de degré ed sur S, et tel que Z et T se coupent seulement en m, leur intersection y étant transversale. Si $e = 1$, T est fini et étale sur S. □

Démonstration. Le lemme vaut sous la seule hypothèse que le corps résiduel $\mathbf{F}$ est parfait. Quitte à remplacer Spec(B) par un ouvert affine non vide, on peut supposer que le point $m \in Z$ est défini par un idéal $(f_1, \ldots, f_d)$ de B/t, où $d = \dim(Z)$. Soient $g_1, \ldots, g_d$ des relèvements de $f_1, \ldots, f_d$ dans B, et soit $C = B/(g_1, \ldots, g_d)$. On a l'immersion fermée $T_0 = \mathrm{Spec}(C) \subset \mathrm{Spec}(B)$. La fibre de T_0 au-dessus du point $\pi = 0$ est supportée sur le point m. Soit $T_1 \subset T_0$ l'ouvert formé des points où la projection de T_0 sur S est quasi-finie (c'est un ouvert, d'après le théorème principal de Zariski, voir [12, chap. IV, cor. 1, p. 42]). Le point m appartient à T_1. De plus, T_1 est régulier en m, puisque le quotient par t de l'anneau local de T_0 en m est un anneau régulier de dimension zéro. Quitte à remplacer T_1

par un voisinage ouvert de m, on peut donc supposer T_1 régulier. Puisque S est hensélien, il existe un voisinage ouvert $T \subset T_1$ de m tel que la projection $T \to S$ soit finie [1, prop. 2.4, p. 46], ce qui implique que $T \subset \mathrm{Spec}(B)$ est une immersion fermée. Puisque T est régulier, la projection $T \to S$ est aussi plate. Elle est donc finie et plate, et son degré peut se calculer au-dessus du point fermé de S: c'est de. Lorsque $e = 1$, la fibre de $Z \to S$ au-dessus du point fermé de S est réduite, donc la projection est alors lisse. ■

Pour m comme ci-dessus, choisissons T comme dans le lemme. Soit M le point générique de T. Alors $T = \widetilde{M}$ est le spectre de l'anneau des entiers du corps local $k(M)$, et donc $\mathrm{Br}(T) = 0$. De $\alpha_B - ((t) \cup \beta)) \in \mathrm{Br}(B)$ on déduit donc

$$\alpha_B(M) = (t_M) \cup \beta(M) \in \mathrm{Br}(k(M)),$$

où $(t_M) \in k(M)^*/k(M)^{*n} \simeq H^1(k(M), \mu_n)$ est l'image de la classe de l'unité $t \in (A \otimes_O k)^*$. Mais $t = 0$, qui définit $Z \subset \mathrm{Spec}(B)$, est transverse à T. Donc $t_M \in k(M)$ est un paramètre uniformisant de l'anneau des entiers $k(M)$, dont le spectre est T. Par ailleurs β_M est la restriction de β_T au point générique de T. Soit $\delta_M\colon {}_n\mathrm{Br}(k(M)) \simeq H^1(\mathbf{F}(m), \mathbf{Z}/n)$ l'application résidu (qui est l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local). La formule usuelle pour le résidu d'un cup-produit donne alors $\delta_M(\alpha(M)) = \beta(m)$, non nul d'après ce qu'on a vu. Ainsi $\alpha_B(M) \neq 0$ pour le point fermé $M \in \mathrm{Spec}(B[1/\pi])$, dont l'adhérence schématique $\widetilde{M} = T \subset \mathrm{Spec}(B)$ est un schéma régulier et fini sur S. Soit $N \in X$ le point fermé projection de M. En appliquant le lemme 2.2, on voit qu'on a $\alpha(N) = \alpha_B(M) \neq 0$. Ceci contredit l'hypothèse sur α, et donc en fait le résidu $\delta_\eta(\alpha) \in H^1(\mathbf{F}(Y), \mathbf{Z}/n)$ est nul, ce qui d'après le lemme 1.1 achève la démonstration du théorème. ■

Corollaire 2.4. Soit $\mathcal{X}/O$ un schéma régulier, intègre, propre et plat sur l'anneau O des entiers d'un corps p-adique k. Soit $X = \mathcal{X} \times_O k$. Supposons satisfait le théorème de pureté pour la partie première à p du groupe de Brauer sur $\mathcal{X}$. Pour qu'un élément α de $\mathrm{Br}(X)$ de torsion première à p appartienne à $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$, il faut et il suffit que α s'annule sur tout point fermé de X, ou même sur tout point fermé d'un ouvert de Zariski non vide de X. L'application naturelle $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}(CH_0(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ a un noyau de torsion p-primaire. □

Comme le montre la démonstration du théorème 2.1, on a en fait le résultat suivant. Soit U un ouvert dense et lisse de la fibre spéciale réduite $(\mathcal{X} \times_O \mathbf{F})_{\mathrm{red}}$. Sous les hypothèses du corollaire, pour que α appartienne à $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$, il suffit que α s'annule en tout point fermé de X dont l'adhérence schématique dans $\mathcal{X}$ est régulière, finie et plate sur $\mathrm{Spec}(O)$, et rencontre la fibre spéciale en un unique point, situé sur U, l'intersection y étant transversale.

Remarques 2.5. (a) Les énoncés 2.1 et 2.4 doivent valoir aussi pour la torsion p-primaire du groupe de Brauer de X. Les techniques requises semblent disponibles (voir [14] en dimension relative un), nous espérons y revenir plus tard.

(b) Lorsque X/k est une courbe (projective et lisse) et $\mathrm{car}(k) = 0$, le théorème de dualité de Lichtenbaum [8, thm. 4 p. 131], dont la démonstration repose sur le théorème de dualité de Tate [10, I, cor. 3.4], dit en particulier que l'homomorphisme $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Hom}(CH_0(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est injectif (voir aussi [14, § 9]). Le lien avec le corollaire 2.4 est la nullité du groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ pour une courbe régulière et propre sur l'anneau des entiers de k (voir [5, III, (2.15) et (3.1)]).

(c) Le corollaire 2.4 dit que l'accouplement $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X}) \times CH_0(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est non dégénéré à gauche (à la torsion p-primaire près). Lorsque X/k est une courbe, et k est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, il est non dégénéré des deux côtés [8]. Sous des conditions très restrictives (voir [2, chap. 8]), c'est encore le cas pour certaines surfaces, par exemple les surfaces rationnelles, mais c'est loin d'être le cas en général (le noyau à droite peut être très gros, à la Mumford/Bloch; il peut aussi contenir de la torsion, comme vient de le montrer un exemple de Parimala et Suresh [11]).

(d) Il y a un énoncé similaire à celui du théorème ci-dessus, mais au niveau H^1, en théorie du corps de classes supérieur [13, prop. 3.12].

(e) Soit $\mathcal{X}/O$ intègre, projectif et lisse au-dessus d'un ouvert $\mathrm{Spec}(O)$ de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Dans [6, § 2], Harari s'intéresse à un élément du groupe de Brauer du corps des fonctions de $\mathcal{X}$ qui possède un résidu au point générique d'un diviseur "non vertical" de $\mathcal{X}$. On comparera le théorème 2.1 ci-dessus avec le théorème 2.1.1 de [6].

Corollaire 2.6. Soit l un nombre premier différent de p. Soit k une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, soit X/k une k-variété projective et lisse géométriquement connexe, et soit $\mathcal{X}/O$ un modèle propre et régulier de X au-dessus de l'anneau O des entiers de k. Supposons satisfait le théorème de pureté pour la partie l-primaire du groupe de Brauer. Alors la composante l-primaire de $\mathrm{Br}(X)/(\mathrm{Br}(\mathcal{X}) + \mathrm{Br}(k))$ est un groupe abélien fini, dont le dual est un quotient du groupe $A_0(X)$ des classes de zéro-cycles de degré zéro. □

Démonstration. L'accouplement $(\mathrm{Br}(X)/(\mathrm{Br}(\mathcal{X})+\mathrm{Br}(k)))\{l\} \times A_0(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est non dégénéré à gauche d'après le théorème principal (utiliser la divisibilité de $\mathrm{Br}(k)$). Par ailleurs, on vérifie facilement que la partie l-primaire de $\mathrm{Br}(X)$ est un groupe l-primaire de cotype fini. En se réduisant par le théorème de Bertini aux courbes projectives et lisses tracées sur X, et en utilisant la structure du groupe des points rationnels de la jacobienne d'une courbe sur un corps p-adique, on voit (ici l'hypothèse $l \neq p$ est nécessaire) que tout homomorphisme de $A_0(X)$ dans le groupe $\mathbf{Z}_l$ est trivial, ce qui permet de conclure. ■

Remarque 2.7. Lorsque $\mathcal{X}/O$ est lisse, la finitude de la composante l-primaire de $(\mathrm{Br}(X)/(\mathrm{Br}(\mathcal{X})+\mathrm{Br}(k)))\{l\}$ résulte des conjectures de Weil (pour H^1), et l'on peut voir que, pour presque tout l, cette composante est nulle. Il est vraisemblable qu'il en est encore ainsi dans le cas de mauvaise réduction.

Exemple 2.8. Soit p premier, $p \neq 3$, et soit $X/\mathbf{Q}_p$ la surface cubique d'équation homogène $x^3+y^3+z^3+pt^3=0$. En utilisant le corollaire 2.6 et les résultats mentionnés à la remarque 2.5 (c), on montre: $A_0(X)=(\mathbf{Z}/3)^2$ si $p \equiv 1$ (3) et $A_0(X)=\mathbf{Z}/3$ si $p \equiv 2$ (3). Dans cet exemple, la surface rationnelle X n'est pas déployée par une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, à la différence du cas étudié en détail par Dalawat [3].

3 Indice et groupe de Brauer

Théorème 3.1. Soit $\mathcal{X}/O$ un schéma régulier, intègre, propre et plat sur l'anneau O des entiers d'un corps p-adique k, de corps résiduel $\mathbf{F}$. Soit $X=\mathcal{X}\times_O k$ et $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles. Soit $Y=\mathcal{X}\times_O \mathbf{F}$ la fibre spéciale de $\mathcal{X}/O$, et soit $Y=\sum_{j\in J} e_jY_j$ la décomposition du diviseur Y de $\mathcal{X}$ en somme de diviseurs intègres. Pour chaque $j \in J$, soit $\mathbf{F}_j$ la clôture intégrale de $\mathbf{F}$ dans le corps des fonctions $\mathbf{F}(Y_j)$ de Y_j, et soit $d_j=[\mathbf{F}_j:\mathbf{F}]$. Supposons satisfait le théorème de pureté pour la partie première à p du groupe de Brauer sur $\mathcal{X}$. Soit I_1 l'ordre du noyau de l'application

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}=\mathrm{Br}(k)\to \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X})\subset \mathrm{Br}(k(X))/\mathrm{Br}(\mathcal{X}).$$

Soit I_2 l'indice de X, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des degrés des points fermés de X. Soit I_3 le plus grand commun diviseur des d_je_j, pour $j \in J$. Alors I_1 divise I_2 qui divise I_3, les quotients successifs étant des puissances de p. □

Démonstration. On dispose du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(Z_0(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \uparrow \\ \mathrm{Br}(k) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est duale de l'application degré (par rapport au corps de base k) $Z_0(X)\to\mathbf{Z}$, et où la flèche horizontale du bas est l'invariant classique du corps de classe local. En considérant les noyaux des flèches verticales, on obtient une injection $\mathbf{Z}/I_1 \hookrightarrow \mathbf{Z}/I_2$, et donc I_1 divise I_2.

Etant donné $j \in J$, on sait qu'il existe un zéro-cycle, de support dans le lieu lisse de Y_j et étranger aux autres composantes de Y, et de $\mathbf{F}$-degré d_j (ceci résulte des estimations de Lang et Weil, et de L. Nisnevich). Le lemme 2.3 permet de relever ce zéro-cycle en un zéro-cycle relatif de $\mathcal{X}/O$ de degré d_je_j au-dessus de O. Ainsi I_2 divise I_3.

Pour l premier, $l \neq p$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(k(X))\{l\}/\,\mathrm{Br}(\mathcal{X})\{l\} \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} H^1(\mathbf{F}(Y_j), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \\
\mathrm{Br}(k)\{l\} \arrow[u, "\mathrm{Res}"] \arrow[r, "\simeq"] & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \arrow[u, "\{e_j\,\mathrm{Res}_j\}"']
\end{tikzcd}$$

où les applications horizontales sont des résidus (celle du bas donnant l'isomorphisme du corps de classes local), et Res désigne des applications de restriction. De ce diagramme pour chaque $l \neq p$, et du théorème de pureté pour le groupe de Brauer, qui implique que la flèche horizontale supérieure est injective, on déduit que I_3/I_1 est une puissance de p. ■

Remarques 3.2. (a) Le fait que I_2/I_1 est une puissance de p peut se déduire directement du théorème principal. Il est vraisemblable que l'on ait en fait l'égalité $I_1 = I_2 = I_3$. Nous espérons revenir sur ce point.

(b) Lorsque X/k est une courbe (projective et lisse), et $\mathrm{car}(k) = 0$, Lichtenbaum [8, thm. 3, p. 130], complétant un argument de Roquette, établit que l'ordre du noyau de $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ est précisément I_1. Le lien avec le théorème ci-dessus est la nullité du groupe $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ pour une courbe régulière relative propre sur O (voir remarque 2.5 (b)).

(c) Le théorème ci-dessus possède un analogue sur le corps $\mathbf{R}$ des réels. Soit X une $\mathbf{R}$-variété de dimension d. Alors $X(\mathbf{R}) = \emptyset$ si et seulement si la flèche naturelle $\mathbf{Z}/2 = H^{2d+1}(\mathbf{R}, \mathbf{Z}/2) \to H^{2d+1}(X, \mathbf{Z}/2)$ est injective (Artin-Verdier, Cox, voir [15, 7.18, 7.21, 20.4]).

Remerciements

Ce travail a été réalisé pendant un séjour du second auteur à l'Université de Paris-Sud, que S. Saito remercie pour son hospitalité.

Références

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **21**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, "Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique" dans *Arithmetic Algebraic Geometry*, éd. E. Ballico, Lecture Notes in Math. **1553**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–49.

[3] C. S. Dalawat, *Groupe des classes de zéro-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, thèse, Université de Paris-Sud, Juin 1993.

[4] O. Gabber, "Some theorems on Azumaya algebras" dans *Groupe de Brauer*, éd. M. Kervaire et M. Ojanguren, Lecture Notes in Math. **844**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 129–209.

[5] A. Grothendieck, "Le groupe de Brauer I, II, III" dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 46–188.

[6] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), 221–260.

[7] S. Lang, *Sur les séries* L *d'une variété algébrique*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 385–407.

[8] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over* p*-adic fields*, Invent. Math. **7** (1969), 120–136.

[9] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[10] ———, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspect. Math. **1**, Academic Press, Boston, 1986.

[11] R. Parimala et V. Suresh, *Zero-cycles on quadric fibrations: Finiteness theorems and the cycle map*, Invent. Math. **122** (1995), 83–117.

[12] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. **169**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[13] S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical schemes*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), 251–281.

[14] ———, *Arithmetic on two-dimensional local rings*, Invent. Math. **85** (1986), 379–414.

[15] C. Scheiderer, *Real and Étale Cohomology*, Lecture Notes in Math. **1588**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[16] J.-P. Serre, "Zeta and L-functions" dans *Arithmetical Algebraic Geometry*, éd. O. F. G. Schilling, Harper and Row, New York, 1965, 82–92.

[17] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. **305**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[18] R. W. Thomason, *Absolute cohomological purity*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 397–406.

Colliot-Thélène: Mathématiques C. N. R. S., Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France; jean-louis.colliot-thelene@math.u-psud.fr

Saito: Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan; shuji@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp