SUR LA CONJECTURE DE TATE ENTIÈRE POUR LE PRODUIT D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE CH_0-TRIVIALE SUR UN CORPS FINI

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET FEDERICO SCAVIA

Abstract. We investigate a strong version of the integral Tate conjecture for 1-cycles on the product of a curve and a surface over a finite field, under the assumption that the surface is geometrically CH_0-trivial. By this we mean that over any algebraically closed field extension, the degree map on the zero-dimensional Chow group of the surface is an isomorphism. This applies to Enriques surfaces. When the Néron-Severi group has no torsion, we recover earlier results of A. Pirutka. The results rely on a detailed study of the third unramified cohomology group of specific products of varieties.

Résumé. Nous étudions une forme forte de la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur le produit d'une courbe et d'une surface sur un corps fini, sous l'hypothèse que la surface est géométriquement CH_0-triviale. Nous entendons par cela que, sur toute extension de corps algébriquement clos, la flèche degré sur le groupe de Chow de dimension zéro de la surface est un isomorphisme. Cela s'applique aux surfaces d'Enriques. Lorsque le groupe de Néron-Severi n'a pas de torsion, nous retrouvons des résultats antérieurs de A. Pirutka. Le travail implique l'étude détaillée du troisième groupe de cohomologie non ramifiée pour les produits de variétés considérés.

1. Introduction

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p, $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et soit G le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ et $\ell \neq p$ un nombre premier. Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse et géométriquement connexe, de dimension d, et soit $\overline{X} := X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$. Si $i \geq 0$ est un entier et $\ell \neq p$ est un nombre premier, la conjecture de Tate pour les cycles de codimension i en cohomologie ℓ-adique prédit que les applications cycle

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^G, \tag{1.1}$$

$$CH^i(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{(1)} \tag{1.2}$$

et

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) \tag{1.3}$$

sont surjectives. Dans (1.2), si M est un G-module, on note par $M^{(1)} \subset M$ le sous-groupe formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de G. En fait ces trois versions de la conjecture de Tate pour toute extension finie de $\mathbb{F}$ sont

Date: 20 juillet 2021.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14C25; 14C35, 14G15.

équivalentes entre eux : l'équivalence entre la surjectivité de (1.1) et de (1.2) suit par un argument de restriction-corestriction, et celle entre la surjectivité de (1.1) et de (1.3) utilise les conjectures de Weil.

On s'intéresse ici aux variantes entières de la conjecture de Tate, obtenues en remplaçant partout $\mathbb{Q}_\ell$ par $\mathbb{Z}_\ell$. On ne s'attend pas à ce que ces variantes soient vraies en toute généralité, mais on a des raisons d'espérer dans le cas $i = d-1$, c'est à dire pour les 1-cycles ; voir [CTSz10, §2]. Les questions d'intérêt sont donc les suivantes : Est-ce que les applications

$$CH^{d-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^G, \tag{1.1'}$$

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^{(1)} \tag{1.2'}$$

ou

$$CH^{d-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)) \tag{1.3'}$$

sont surjectives ? On ne sait pas si (1.1'), (1.2') et (1.3') sont surjectives en général, ou même si leurs surjectivités sont équivalentes entre elles.

La surjectivité de (1.3') pour $d = 2$ équivaut à la conjecture de Tate initiale (surjectivité de (1.3)) pour $d = 2$ et $i = 1$. Comme l'on voit à la proposition 5.4, pour établir la surjectivité de (1.3') pour tout $d \geq 3$ (Conjecture 5.1 ci-dessous), il suffit de considérer le cas $d = 3$.

Par ailleurs un théorème bien connu de Schoen (Théorème 5.8) affirme que si la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur les surfaces sur les corps finis (donc $d = 2$ et $i = 1$), alors l'application (1.2') est surjective pour tout d.

Pour un solide (c'est-à-dire, une variété de dimension trois) projectif et lisse sur $\mathbb{C}$, la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles ne vaut pas ; voir les exemples rappelés dans [CTV12]. Elle est même négative pour des solides à la géométrie relativement simple, comme le produit d'une courbe elliptique et d'une surface d'Enriques "très générales", comme l'on montré récemment Benoist et Ottem [BO18], voir aussi [CT19b]. La situation sur les corps finis est donc (conjecturalement) très différente de celle sur $\mathbb{C}$. En effet, les contre-exemples de [BO18] sont obtenus par une méthode de spécialisation, qui n'est pas reproductible sur un corps fini. C'est aussi les cas pour les contre-exemples de Kollár [CTV12, §5.3] : sous l'hypothèse que la conjecture de Tate sur les diviseurs sur les surfaces sur un corps fini vaut, le théorème de Schoen implique qu'il n'existe pas d'exemple à la Kollár sur $\mathbb{F}$ (ni même sur $\overline{\mathbb{F}}$) ; voir [CTSz10, §6].

Il est donc naturel d'étudier la surjectivité de (1.1'), (1.2') et (1.3') pour les produits d'une courbe elliptique et d'une surface d'Enriques sur $\mathbb{F}$. Nos résultats principaux ne concernent que la surjectivité de (1.3'), qui n'est connue que dans très peu de cas. Le théorème de Schoen ne dit rien sur (1.3'), même sous la conjecture de Tate pour les diviseurs sur les surfaces. Par ailleurs la surjectivité de (1.3') est un énoncé plus fort que la surjectivité de (1.1') ; voir la remarque 4.6 (ii).

Pour $X/\mathbb{F}$ de dimension $d = 3$, notre point de départ est le lien entre le conoyau de l'application (1.3') et le groupe de cohomologie non-ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$, cas particulier d'un énoncé pour les cycles de codimension 2 établi par B. Kahn [Kah12] et par B. Kahn et le premier auteur [CTK13].

Soient k un corps d'exposant caractéristique p et X une k-variété projective, lisse, et géométriquement connexe et soit $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X. Pour chaque nombre premier $\ell \neq p$ et chaque entier $n \geq 1$, on a un groupe de cohomologie non-ramifiée [CT95, Thm. 4.1.1]

$$H^n_{\mathrm{nr}}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(n-1)) \subset H^n(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(n-1))$$

qui est un invariant k-birationnel (et même stablement k-birationnel) de X. Pour $n = 2$, c'est la partie ℓ-primaire du groupe de Brauer de X. Pour $n = 3$, ce groupe intervient dans des questions de rationalité, de descente galoisienne des classes de cycles de codimension 2 modulo équivalence rationnelle, et aussi dans l'étude des zéro-cycles des variétés définies sur les corps globaux ; voir [CTK13].

Dans le cas où $k = \mathbb{F}$ est un corps fini, on sait que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul si $\dim X \leq 2$: c'est trivial si $\dim(X) = 1$, et a été établi dans [CTSS83, Remarque 2, p. 790] par Sansuc et Soulé et le premier auteur si $\dim(X) = 2$, et aussi par Kato [Kato86, Thm. 0.7, Corollaire].

Dans [Pir11], Pirutka a construit des exemples de $\mathbb{F}$-variétés projectives, lisses et géométriquement rationnelles X de dimension 5, et donc aussi de toute dimension ≥ 5, avec $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$. Pour $\dim(X) = 3$ et pour $\dim(X) = 4$, on ne sait pas s'il existe des variétés projectives et lisses avec $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$.

Dans [CTK13, Question 5.4], Kahn et le premier auteur ont demandé : Est-ce que

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0 \tag{1.4}$$

pour tout solide X sur $\mathbb{F}$ et tout $\ell \neq p$? Comme on explique au §5 (Proposition 5.2 et Théorème 5.10), si la réponse à cette question est affirmative, et si la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur le solide X, alors (1.3') est surjective.

Kahn et le premier auteur ont conjecturé que la réponse à (1.4) est affirmative si le solide X est géométriquement uniréglé ; voir [CTK13, Conjecture 5.7]. L'annulation du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ a été établie par Parimala et Suresh [PS16] si X est un fibré en coniques au dessus d'une surface. Elle a aussi été établie par Pirutka [Pir16, Théorème 1.1] lorsque le solide X est le produit d'une courbe C et d'une surface S géométriquement CH_0-triviale telle que $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{S})$ de S n'a pas de torsion, ce qui est le cas par exemple lorsque S est une surface géométriquement rationnelle. On dit qu'une surface S est *géométriquement* CH_0-*triviale* si pour toute extension algébriquement close Ω de $\mathbb{F}$, le degré

$$CH_0(S_\Omega) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

est un isomorphisme. On donne ci-dessous des rappels sur cette hypothèse, avec ses conséquences remarquables. Les surfaces géométriquement CH_0-triviales font l'objet de nombreuses investigations, voir par exemple [GO13]. Pour $p \neq 2$, toute surface d'Enriques est géométriquement CH_0-triviale.

Nous arrivons maintenant à nos résultats principaux, qui soutiennent une réponse affirmative à (1.3') et (1.4) dans certains cas particuliers. Comme on a déjà mentionné, par la proposition 5.4 le cas plus intéressant de (1.3') est $d = 3$. Motivés par [BO18] et [Pir16], nous considérons des solides X de la forme suivante. Soient C et S deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimension 1 et 2 respectivement, $J(C)$ la jacobienne de la courbe C, et $X := C \times_{\mathbb{F}} S$.

Nous établissons le théorème général suivant.

Théorème 1.1. *On suppose que la surface S est géométriquement CH_0-triviale et que ℓ ne divise pas l'ordre de $\mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}}$. Alors $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, et l'application cycle*

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Lorsque le groupe de Néron-Severi géométrique de la surface S dans le théorème 1.1 est sans torsion, on retrouve le résultat de Pirutka.

Théorème 1.2. *Supposons que la surface S est géométriquement CH_0-triviale et que l'on a*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})) = 0. \tag{1.5}$$

Alors la flèche naturelle $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est injective.

La preuve du théorème 1.2 est le cœur technique de notre travail. La condition restrictive (1.5) est requise pour notre démonstration. Nous ne savons pas si elle est nécessaire. Il faut souligner que sous cette condition la surjectivité de (1.1') et (1.2') est facile à démontrer (voir la remarque 4.6 (i)), mais ceci n'est pas le cas pour (1.3'). C'est une autre manifestation du fait que la version (1.3') de la conjecture entière de Tate est beaucoup plus délicate que les versions (1.1') et (1.2').

Théorème 1.3. *Supposons que la surface S est géométriquement CH_0-triviale, que la condition restrictive (1.5) est satisfaite et que l'application cycle*

$$CH^2(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective, alors $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ et l'application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Le théorème 1.3 ne dépend pas de la conjecture de Tate pour les surfaces sur un corps fini. Si X est le produit d'une courbe C et d'une surface S géométriquement CH_0-triviale, $H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{(1)} = H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$. Si la conjecture de Tate vaut pour toutes les surfaces sur un corps fini, le théorème de Schoen implique alors que l'application $CH^2(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective, c'est-à-dire, X satisfait l'hypothèse supplémentaire du théorème 1.3. On obtient ainsi - pour nos cas particuliers, voir le théorème 3.7 - un énoncé de la forme du théorème de Schoen, mais avec (1.2') remplacée par (1.3') :

Théorème 1.4. *Sous la conjecture de Tate pour les surfaces, si $X = C \times_{\mathbb{F}} S$ où C est une courbe, S est une surface CH_0-triviale et la condition restrictive (1.5) est satisfaite, alors l'application cycle $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective.*

Comme exemple d'application des théorèmes 1.2 et 1.4, on peut prendre pour S une surface d'Enriques sur un corps fini $\mathbb{F}$, et pour C une courbe elliptique E sur $\mathbb{F}$. Pour $\ell \neq 2$, la condition (1.5) est automatiquement satisfaite. Si $\ell = 2$, la condition (1.5) est que la courbe elliptique n'a pas de point de 2-torsion non nul défini sur $\mathbb{F}$, c'est-à-dire, que E a un modèle affine d'équation $y^2 = f(x)$, où $f(x)$ est un polynome irréductible de degré 3. Donc cette condition est remplie "une fois sur deux".

Nous décrivons maintenant les principaux ingrédients de nos preuves. Des techniques de K-théorie algébrique combinées aux conjectures de Weil montrent ([CTK13, Théorème 6.8]) que, pour toute variété X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$, on a une suite exacte longue de groupes de torsion

$$\begin{aligned}(1.6)\quad 0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}})\\ \to \mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]\\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to 0.\end{aligned}$$

Sous certaines hypothèses sur X, on cherche à établir la nullité du groupe

$$\mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]$$

en analysant d'une part la nullité de la flèche

$$H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

d'autre part la trivialité du groupe

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\}$$

dans (1.6).

La nullité de la flèche mentionnée est un pur problème de cohomologie ℓ-adique, qui se transcrit ainsi :

Pour X projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini, le noyau de la flèche $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ a-t-il une image nulle dans le groupe $H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$?

À notre connaissance, c'est un problème ouvert. C'est connu pour X de dimension au plus 2. C'est un des premiers résultats de la théorie du corps de classes supérieur [CTSS83, Kato86]. Au §2, nous montrons (Corollaire 2.8) que c'est aussi le cas pour tout produit d'une surface et d'un nombre quelconque de courbes :

Théorème 1.5. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et ℓ un premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Soit $S/\mathbb{F}$ une surface projective lisse, géométriquement connexe. Soit $Y/\mathbb{F}$ un produit de courbes projectives, lisses, géométriquement connexes. Soit $X = Y \times S$. Alors le noyau de la flèche $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ a une image nulle dans le groupe $H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$.*

C'est une conséquence d'un énoncé général, le Théorème 2.6.

L'étude du groupe $\mathrm{Coker}(CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G)$ (groupe qui est de torsion) pour un produit $X = C \times S$ d'une courbe et d'une surface est plus délicate. Au §3, sous l'hypothèse que la surface S est géométriquement CH_0-triviale, nous donnons une condition équivalente à l'injectivité de la restriction

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

en termes du groupe de Chow des zéro-cycles de degré 0 sur la surface $S \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(C)$, à savoir :

$$(1.7)\qquad \text{L'homomorphisme } A_0(S_{\mathbb{F}(C)})\{\ell\} \to A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G \text{ est surjectif.}$$

Ce résultat (Théorème 3.6) est obtenu par un calcul de correspondances sur le produit $X = C \times S$. On l'utilise avec des résultats sur les exposants de torsion des surfaces qui reposent sur [CTR85] pour démontrer le théorème 1.1.

Au §4, en utilisant des outils élaborés venant de la K-théorie algébrique, nous montrons que la condition (1.7) est satisfaite sous l'hypothèse supplémentaire (1.5), car elle implique $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G = 0$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.2. La preuve du théorème 1.3, portant sur la conjecture de Tate entière pour les

1-cycles, est aussi établie, à l'aide des résultats rappelés au §5. Le §4 se termine par deux remarques. La première remarque fait le parallèle avec le travail de Benoist et Ottem [BO18] sur la conjecture de Hodge entière pour le produit d'une courbe et d'une surface d'Enriques complexes. La seconde remarque, déjà mentionnée ci-dessus, donne une preuve simple de la surjectivité de (1.1') pour X comme dans le théorème 1.2. Au §5 on donne des rappels sur l'application cycle en cohomologie étale ℓ-adique pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini, la question de la surjectivité de cette application pour les 1-cycles, et le lien de cette question, dans le cas de variétés X de dimension 3, avec la nullité éventuelle du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Comme indiqué ci-dessus, ces rappels sont utilisés dans la démonstration du théorème 1.3.

Notations et rappels. Si A est un groupe abélien, $n \geq 1$ est un entier, et ℓ est un nombre premier, on note $A[n] := \{a \in A : na = 0\}$, $A\{\ell\}$ le sous-groupe de torsion ℓ-primaire de A, A_{tors} le sous-groupe de torsion de A, et $A/\mathrm{tors} := A/A_{\mathrm{tors}}$. Si B est un autre groupe abélien, on note $A \otimes B := A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ et $\mathrm{Hom}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$. Si p est un nombre premier, on note $A_p := A \otimes \mathbb{Z}[1/p]$.

Si k est un corps, on note $k^* := k \backslash \{0\}$ le groupe multiplicatif de k, et $\overline{k}$ une clôture séparable de k. Si k'/k est une extension galoisienne de corps, $G = \mathrm{Gal}(k'/k)$ est le groupe de Galois, et M est un G-module continu, on note $H^i(G, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne de G à valeurs dans M, et on écrit $M^G := H^0(G, M)$ pour le sous-module des éléments fixés par G. Si $k' = \overline{k}$, on écrit $H^i(k, M)$ pour $H^i(G, M)$. Si X est un schéma et F un faisceau pour la topologie étale sur X, on note $H^i(X, F) = H^i_{\text{ét}}(X, F)$ les groupes de cohomologie étale.

Si k est un corps, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k, et $n \geq 1$ un entier, on note μ_{ℓ^n} le faisceau abélien étale sur X associé au schéma en groupes fini étale des racines ℓ^n-ièmes de l'unité. Si $i > 0$, on note $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \mu_{\ell^n} \otimes \cdots \otimes \mu_{\ell^n}$ (i fois), et si $i < 0$ on note $\mu_{\ell^n}^{\otimes i} := \mathrm{Hom}(\mu_{\ell^n}^{\otimes(-i)}, \mathbb{Z}/\ell^n)$, et $\mu_{\ell^n}^{\otimes 0} := \mathbb{Z}/\ell^n$. Si X est un k-schéma, on note $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ les groupes de cohomologie étale associés. On note $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$ la limite directe des $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ pour n tendant vers l'infini. On note $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j))$ la limite projective des $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ et $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell(j)) := H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Si k est séparablement clos et X est propre et lisse, on note $b_i(X) := \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ les nombres de Betti de X.

Si k'/k est une extension de corps et X est un k-schéma, on note $X_{k'} := X \times_k k'$. Si $k' = \overline{k}$, on écrit $\overline{X}$ pour $X \times_k \overline{k}$.

Une variété sur k est un schéma séparé de type fini sur le corps k. Si X est un schéma, on note $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ les groupes de cohomologie de Zariski à valeurs dans le faisceau structural $\mathcal{O}_X$, on note $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe de Picard $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \simeq H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, et on note $\mathrm{Br}(X)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. Si X est une variété connexe, propre et lisse sur un corps séparablement clos, on note $\mathrm{NS}(X)$ le groupe de Néron-Severi de X (qui est un groupe de type fini), et on note $\rho(X)$ le rang de $\mathrm{NS}(X)$. Si X est une variété propre, lisse, géométriquement connexe sur un corps k, on note $q(X)$ la dimension du k-espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Si X est une variété sur un corps k, on note $CH_i(X)$ le groupe des cycles de dimension i modulo équivalence rationnelle. Si X est lisse et irréductible de dimension d, on note $CH^i(X) := CH_{d-i}(X)$. Si X est propre sur k, on note $A_0(X)$ le noyau de l'homomorphisme de degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$. Si X est irréductible, on note $X^{(j)}$ l'ensemble des points de codimension j de X.

Si ℓ est un nombre premier inversible dans $\mathcal{O}_X$, on note $\mathcal{H}^i(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ le faisceau Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U,\mu_{\ell^n}^{\otimes j})$. Si X est un schéma, on note $\mathcal{K}_i$ le faisceau Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U,\mathcal{O}_X))$, K_i étant le i-ème groupe de K-théorie de Quillen.

Terminons par un rappel sur les variétés géométriquement CH_0-trivales. Soient k un corps d'exposant caractéristique p et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons que X est *géométriquement CH_0-trivale*, c'est-à-dire que pour tout corps algébriquement clos Ω contenant k, l'application degré $CH_0(X_\Omega)\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ est un isomorphisme (pour une propriété équivalente, voir le lemme 3.5). Si cette propriété est satisfaite, alors, pour tout corps F contenant k, le noyau $A_0(X_F)$ de la flèche degré $CH_0(X_F)\to\mathbb{Z}$ est un groupe de torsion. Supposons de plus k séparablement clos. Un argument de correspondances (voir [ACP17, §1]) montre qu'alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout ℓ premier, $\ell\neq p$, on a $b_1(X)=\dim(H^1(X,\mathbb{Q}_\ell))=0$. La variété de Picard réduite $\mathrm{Pic}^0_{X/k,\mathrm{red}}$ est triviale, et la variété d'Albanese, dont la dimension est b_1, est triviale. Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de X coïncide avec le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ de X, qui est un groupe de type fini. [On n'a pas nécessairement $q=\dim(H^1(X,\mathcal{O}_X))=0$, comme le montre l'exemple de certaines surfaces d'Enriques supersingulières en caractéristique 2, qui sont (inséparablement) unirationnelles.]

(ii) Pour tout premier $\ell\neq p$, la flèche naturelle $\mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell\to H^2(X,\mathbb{Z}_\ell(1))$ est un isomorphisme. En particulier la dimension ρ de l'espace vectoriel $\mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ est égal au rang b_2 du $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel $H^2(X,\mathbb{Q}_\ell)$.

(iii) Si $\dim(X)=2$, la forme d'intersection sur $\mathrm{Num}(X)=\mathrm{NS}(X)/\mathrm{NS}(X)_{\mathrm{tors}}$ a son discriminant de la forme $\pm p^r$ pour un entier $r\geq 0$.

Au moins en caractéristique zéro, Spencer Bloch a conjecturé que toute surface connexe X projective et lisse sur le corps des complexes avec $b_1=0$ et $b_2-\rho=0$, est géométriquement CH_0-trivale. Cela a été établi pour certaines surfaces [BKL76], parmi lesquelles les surfaces d'Enriques.

En caractéristique p quelconque, y compris $p=2$, les surfaces d'Enriques sont géométriquement CH_0-trivales. En caractéristique différente de 2, ceci se voit en suivant la démonstration de [BKL76], soit en utilisant le fait que ces surfaces se relèvent en des surfaces d'Enriques en caractéristique zéro [Lan83, Proof of Thm. 1.1], et en utilisant la flèche de spécialisation de Fulton sur les groupes de Chow. En caractéristique 2, les résultats de relèvement et d'unirationalité [Lan83, Bla82] donnent le résultat.

La conjecture de Bloch a été établie pour des surfaces de type général, par exemple pour la surface de Godeaux quotient de la surface de Fermat de degré 5 par $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, si $p\neq 5$ (voir [IM79, Theorem 1, Remark p. 210]).

2. Le noyau de $CH^2(X)\to CH^2(\overline{X})$

2.1. **Rappels.** Rappelons d'abord des arguments remontant à des travaux de Spencer Bloch, et qu'on peut trouver détaillés dans [CTSS83] et [CT93].

Pour X/k une variété lisse sur un corps, et $n>0$ entier premier à la caractéristique de k, on dispose de suites exactes

$$0\to H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2)/n\to H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2/n)\to CH^2(X)[n]\to 0$$

et si X est de plus intègre

$$0\to H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2}))\to H^3(X,\mu_n^{\otimes 2})\to H^3(k(X),\mu_n^{\otimes 2});$$

voir [CT93, (3.11), (3.10)] (la première utilise la conjecture de Gersten pour la K-théorie, établie par Quillen, la deuxième utilise la conjecture de Gersten en cohomologie étale, établie par Bloch et Ogus). Ces deux résultats et le théorème de Merkurjev-Suslin donnent un isomorphisme de faisceaux $\mathcal{K}_2/n \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})$.

Soient désormais $k = \mathbb{F}$ un corps fini et X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur $\mathbb{F}$. Soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. En passant à la limite directe sur les puissances de ℓ on obtient des suites exactes

$$0 \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to CH^2(X)\{\ell\} \to 0$$

et

$$0 \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Il résulte des conjectures de Weil prouvées par Deligne que le groupe $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est fini ; voir [CTSS83, Théorème 2, p.780]. Ainsi la flèche composée

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \hookrightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est nulle. On obtient en fin de compte la suite exacte

$$0 \to CH^2(X)\{\ell\} \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Par passage à la limite sur les extensions de $\mathbb{F}$ on obtient une suite exacte analogue pour $\overline{X}/\overline{\mathbb{F}}$. On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & CH^2(X)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & CH^2(\overline{X})\{\ell\} \arrow[r] & H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] & H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).
\end{tikzcd}$$

On en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned}(2.1)\quad & 0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \to \\ & \mathrm{Ker}[H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)),\end{aligned}$$

qui est le début de la suite exacte (1.6).

Soit $n \geq 1$ un entier. Si $U \subset X$ est un ouvert, on a la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale

$$E_2^{p,q} := H^p(\mathbb{F}, H^q(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \Longrightarrow H^{p+q}(U, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Pour chaque ouvert $U \subset X$, on a donc une suite exacte

$$(2.2)\qquad 0 \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^3(U, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^3(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

et aussi une suite exacte

$$(2.3)\qquad 0 \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Par limite directe sur les coefficients $\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}$ pour n tendant vers l'infini, on a donc les suites exactes

$$(2.4)\qquad 0 \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(U, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

et

(2.5)

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

On a donc une injection

$$\theta_\ell : \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$$

Ces deux groupes sont finis, car le théorème de Deligne sur les valeurs propres de Frobenius implique que les groupes $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$ et $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ sont finis ; voir [CTSS83, Théorème 2, p.780]. Ce théorème implique aussi que l'on a un isomorphisme de groupes finis

$$\rho_\ell : H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}).$$

En composant avec l'application θ_ℓ, on obtient une injection de groupes finis

$$\varphi_\ell : \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}).$$

2.2. **La flèche φ_ℓ est-elle un isomorphisme ?**

Proposition 2.1. *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit ℓ un premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- *(i) L'application θ_ℓ est un isomorphisme.*
- *(ii) L'application φ_ℓ est un isomorphisme.*
- *(iii) Le composé de l'injection de groupes finis*

  $$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

  et de l'application

  $$H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

  est nul.
- *(iv) Le noyau de la flèche $H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ a une image nulle dans le groupe $H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$.*
- *(v) La flèche naturelle $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$ est nulle.*
- *(vi) Pour tout entier $n \geq 1$, le noyau de la flèche $H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^3(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ a une image nulle dans $H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$.*
- *(vii) La propriété précédente vaut pour tout entier n suffisamment grand.*
- *(viii) Pour tout entier $n \geq 1$, la flèche naturelle*

  $$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \subset H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

  est nulle.
- *(ix) La propriété précédente vaut pour tout entier n suffisamment grand.*

Démonstration. L'équivalence des propriétés (i) à (v) est formelle à partir des suites exactes mentionnées ci-dessus, qui montrent aussi que les propriétés (vi) et (vii) sont équivalentes. La propriété (vii) implique la propriété (v) par limite inductive. Que la propriété (iv) implique la propriété (vi) est une conséquence du théorème de Merkurjev-Suslin [MS82], qui implique que pour tout corps k de caractéristique différente de ℓ, les flèches naturelles $H^3(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^3(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ sont injectives. □

Remarque 2.2. (i) L'application de groupes finis

$$t : H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}) \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

est injective mais pas a priori surjective.

Soit $X = C \times_{\mathbb{F}} S$, où C et S sont variétés irréductibles, projectives et lisses de dimension 1 et 2, respectivement. Comme la dimension cohomologique de $\mathbb{F}$ est égale à 1, on a

$$\operatorname{Coker} t \simeq H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))/\,\mathrm{tors}).$$

Montrons que ce groupe n'est pas nul en général. Par la formule de Künneth ℓ-adique, $(H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))/\,\mathrm{tors}) \otimes H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est un facteur direct galoisien de $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))/\,\mathrm{tors}$, et donc

$$H^1(\mathbb{F}, (H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))/\,\mathrm{tors}) \otimes H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \subset \operatorname{Coker} t.$$

(On a égalité si $b_1(\overline{S}) = 0$.) Supposons que $b_2(\overline{S}) = \rho(\overline{S})$, que G agit trivialement sur $\mathrm{NS}(\overline{S})$ et que $J(\mathbb{F})\,\{\ell\} \neq 0$, J étant la jacobienne de C. Pour démontrer $\operatorname{Coker} t \neq 0$, il suffit alors de vérifier que l'on a $H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \neq 0$. La suite exacte courte

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \to H^2(C, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to H^2(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G \to 0$$

et le fait que l'on ait $\mathrm{Br}(C) = 0$ entraînent

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \simeq J(\mathbb{F})\,\{\ell\} \neq 0.$$

(ii) On observera que les énoncés (iii) à (vi) de la proposition 2.1 se formulent purement en termes de la cohomologie étale des variétés sur les corps finis, ils ne font pas intervenir la K-théorie algébrique. Mais pour passer des énoncés au niveau $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)$ à tout niveau fini $\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}$, il faut utiliser le théorème de Merkurjev-Suslin.

(iii) Les énoncés de la proposition 2.1 sont trivialement vrais pour X de dimension 1. Pour X de dimension 2, [CTSS83, Remarque 2, p. 790] implique que l'application de restriction

$$H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est nulle. Les énoncés (iii) et (iv) de la proposition 2.1 s'en suivent, et donc aussi les autres.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 2.3. *Soit k un corps parfait dont le groupe de Galois absolu est procyclique. Soit M un k-groupe de type multiplicatif fini, $\hat{M}$ son groupe des caractères. Supposons que la torsion de $\hat{M}$ est d'ordre premier à la caractéristique de k. Alors il existe une suite exacte de k-groupes algébriques commutatifs lisses*

$$1 \to M \to P \to Q \to 1$$

avec P un k-tore quasitrivial et Q un k-tore facteur direct d'un k-tore quasitrivial.

Démonstration. Rappelons qu'un k-tore T est appelé quasitrivial si son groupe de caractères $\hat{T}$ est un module galoisien de permutation et qu'il est appelé coflasque si $H^1(K, \hat{T}) = 0$ pour toute extension de corps K/k. D'après Endo et Miyata [EM75, Lemma 1.1], pour tout k-groupe de type multiplicatif M il existe une suite exacte de modules galoisiens $0 \to \hat{Q} \to \hat{P} \to \hat{M} \to 0$ avec $\hat{P}$ de permutation et $\hat{Q}$ coflasque. Sous l'hypothèse que le groupe de Galois absolu est procyclique, tout module galoisien sans torsion de type fini qui est coflasque est un facteur direct d'un module de permutation (Endo et Miyata, [EM75, Theorem 1.5]). Par dualité de Cartier, on conclut. □

Proposition 2.4. *Soit X une variété projective et lisse, géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soient $\mathbb{F}(X)$ son corps des fonctions rationnelles, et*

$$\mathrm{Br}_1(X) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})].$$

Supposons que le module galoisien défini par le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{X})$ de X est facteur direct d'un module de permutation (en particulier, $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est sans-torsion). Alors :

(a) On a $\mathrm{Br}_1(X_{\mathbb{F}'}) = 0$ pour toute extension finie $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{F}$.

(b) Pour tout $\mathbb{F}$-tore R facteur direct d'un $\mathbb{F}$-tore quasitrivial, on a

$$\mathrm{Ker}[H^2(X, R) \to H^2(\overline{X}, R)] = 0.$$

(c) Pour tout $\mathbb{F}$-groupe de type multiplicatif fini M d'ordre premier à la caractéristique de $\mathbb{F}$, l'image de $\mathrm{Ker}[H^2(X, M) \to H^2(\overline{X}, M)]$ dans $H^2(\mathbb{F}(X), M)$ est nulle. [1]

(d) Pour tout $\mathbb{F}$-groupe de type multiplicatif fini M d'ordre premier à la caractéristique de $\mathbb{F}$, l'image de $H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{X}, M))$ dans $H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{\mathbb{F}}(X), M))$ est nulle.

Démonstration. Pour une variété projective X géométriquement intègre sur un corps k et $\overline{k}$ une clôture séparable de k, et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, on a la suite exacte

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

Si X de plus est lisse, on a une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to J_X(\overline{k}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{NS}(\overline{X}) \to 0,$$

où $J_X = \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est la variété de Picard, qui est une variété abélienne, et $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est le groupe de Néron-Severi géométrique. Pour $k = \mathbb{F}$ un corps fini, on a $H^1(\mathbb{F}, J_X) = 0$ (Lang) et $\mathrm{Br}(\mathbb{F}) = 0$. Sous l'hypothèse faite sur le groupe de Néron-Severi, on a $H^1(\mathbb{F}, \mathrm{NS}(\overline{X})) = 0$. On a donc $\mathrm{Br}_1(X) = 0$. Comme les hypothèses sont inchangées, ceci vaut encore sur toute extension finie de $\mathbb{F}$. Ceci donne (a) et (b).

Soit

$$1 \to M \to P \to Q \to 1$$

une suite exacte donnée par le lemme 2.3. Comme Q est facteur direct d'un tore quasitrivial, le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert donnent $H^1(\mathbb{F}(X), Q) = 0$. On a donc une injection $H^2(\mathbb{F}(X), M) \hookrightarrow H^2(\mathbb{F}(X), P)$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, M) & \longrightarrow & H^2(X, P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\mathbb{F}(X), M) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{F}(X), P). \end{array}$$

D'après (b), le noyau de $\mathrm{Ker}[H^2(X, M) \to H^2(\overline{X}, M)]$ a une image nulle dans $H^2(X, P)$. Il résulte alors du diagramme que l'image de $\mathrm{Ker}[H^2(X, M) \to H^2(\overline{X}, M)]$ dans $H^2(\mathbb{F}(X), M)$ est nulle, soit (c). L'énoncé (d) résulte alors de la suite des termes de bas degré des suites spectrales de Hochschild-Serre. □

1. Même si l'action du groupe de Galois absolu sur $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est triviale, la restriction $\mathrm{NS}(\overline{X})$ sans torsion est nécessaire. Soit $X/\mathbb{F}$ une surface d'Enriques sur un corps fini $\mathbb{F}$ de caractéristique impaire. Supposons $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$. Pour $M = \mu_2$, l'énoncé (c) est en défaut.

Lemme 2.5. *Soit X une variété projective, lisse, connexe sur un corps k séparablement clos. Soit ℓ premier distinct de la caractéristique de k.*

(i) Si le groupe $\mathrm{NS}(X)$ est sans ℓ-torsion, alors pour tout entier $n > 0$ le groupe $H^1(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ est un $\mathbb{Z}/\ell^n$-module libre.

(ii) Si de plus le groupe $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion, alors pour tout entier $n > 0$ le groupe $H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ est un $\mathbb{Z}/\ell^n$-module libre.

Démonstration. Ceci résulte d'arguments de passage à la limite dans les suites de Kummer [Gro68, §8]. La suite de Kummer pour la cohomologie étale donne un isomorphisme $H^1(X, \mu_{\ell^n}) \simeq \mathrm{Pic}(X)[\ell^n]$. Le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ est une extension du groupe $\mathrm{NS}(X)$ par le groupe des k-points de la variété de Picard J de X. Sous l'hypothèse de (i), on a donc $H^1(X, \mu_{\ell^n}) \simeq J[\ell^n]$, qui est libre sur $\mathbb{Z}/\ell^n$. On sait que l'on a $\mathrm{NS}(X)\{\ell\} \simeq H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))\{\ell\}$. Sous l'hypothèse de (i), le $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini $H^2(X, \mathbb{Z}_l)$ est donc un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre. Sous l'hypothèse supplémentaire de (ii), on a $H^2(X, \mathbb{Z}_\ell)/n \simeq H^2(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$. □

Théorème 2.6. *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini et ℓ un premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Soient Y et Z deux variétés géométriquement connexes, projectives et lisses sur $\mathbb{F}$, de dimensions quelconques. Supposons que le module galoisien défini par le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{Y})$ de Y est facteur direct d'un module de permutation. Supposons de plus que le groupe $H^3(\overline{Y}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion. Si les propriétés équivalentes de la proposition 2.1 valent pour Y et pour Z, alors elles valent pour $X := Y \times Z$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $U \subset Y$ et $V \subset Z$ des ouverts non vides. Soit $W := U \times V$. On a un homomorphisme Galois-équivariant

$$H^2(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \oplus [H^1(\overline{U}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{V}, \mu_{\ell^n})] \oplus H^2(\overline{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^2(\overline{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}). \tag{2.6}$$

Les flèches $H^2(\overline{U}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^2(\overline{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ et $H^2(\overline{V}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^2(\overline{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ sont induites par les projections naturelles. La flèche $H^1(\overline{U}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{V}, \mu_{\ell^n}) \to H^2(\overline{W}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ est induite par les projections naturelles et le cup-produit.

D'après le lemme 2.5, les hypothèses sur $\overline{Y}$ impliquent que les groupes de cohomologie $H^i(\overline{Y}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ pour $i = 0, 1, 2$ sont libres sur $\mathbb{Z}/\ell^n$. Le théorème [Mil80, Chap. VI, Thm. 8.13] implique alors que l'homomorphisme

$$H^2(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \oplus [H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})] \oplus H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}). \tag{2.7}$$

est un isomorphisme.

La projection $X \to Z$ induit un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) & \longrightarrow & H^3(Z, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{F}(Z), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) & \longrightarrow & H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \end{array}$$

Par hypothèse, la composée $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^3(\mathbb{F}(Z), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ est nulle. Ainsi la flèche composée

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

est nulle. Le même argument vaut avec avec Y en place de Z.

Pour établir l'énoncé sur X, il reste à voir que, pour tout $n \geq 1$, la flèche de modules galoisiens

$$H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) \to H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

induit une application nulle par application de $H^1(\mathbb{F}, -)$.

Notons $M_n := H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})$.

Considérons le diagramme commutatif d'homomorphismes galoisiens

$$\begin{tikzcd}
H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \arrow[d] & H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) = H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes M_n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n) \arrow[d] \\
H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}) = H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes M_n \arrow[l] \arrow[r] & H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n} \otimes M_n).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales de droite sont données par les cup-produits sur la cohomologie étale de $\overline{Y}$ et de $\overline{\mathbb{F}}(Y)$:

$$H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \to H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n)$$

et

$$H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \to H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n} \otimes M_n).$$

La flèche verticale de droite est injective car $\overline{Y}$ est normale. La flèche horizontale inférieure droite est Galois-équivariante pour l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}(Y)/\mathbb{F}(Y)) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ (voir [GS17, Prop. 3.4.10.4]). La flèche horizontale supérieure droite est donc $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ équivariante.

La flèche inférieure droite est par ailleurs un isomorphisme de modules galoisiens. Pour le voir, il suffit de considérer les groupes abéliens sous-jacents. Comme groupe abélien, le module $M_n = H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})$ est une somme directe $\oplus_i \mathbb{Z}/\ell^{r_i}$ avec $r_i \leq n$. Par la théorie de Kummer, l'application

$$H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes M_n = H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes H^0(\overline{\mathbb{F}}, M_n) \to H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n} \otimes M_n)$$

est donc un isomorphisme.

L'hypothèse que $\mathrm{NS}(\overline{Y})$ est un facteur direct d'un module de permutation et la proposition 2.4 (d) donnent que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n} \otimes M_n)) \to H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n} \otimes M_n))$$

est nulle.

On en déduit que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})) \to H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{\mathbb{F}}(Y), \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n}))$$

est nulle. Ceci implique alors que l'application

$$H^1(\mathbb{F}, H^1(\overline{Y}, \mu_{\ell^n}) \otimes H^1(\overline{Z}, \mu_{\ell^n})) \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{\mathbb{F}}(X), \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$$

déduite du diagramme commutatif ci-dessus est nulle, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 2.7. La restriction $H^3(\overline{Y}, \mathbb{Z}_\ell)$ sans torsion dans le théorème 2.6 n'est pas nécessaire. L'hypothèse que $\mathrm{NS}(\overline{Y})$ est sans torsion suffit en effet à assurer que l'homomorphisme (2.7) est un isomorphisme. C'est là un énoncé assez délicat, pour lequel nous renvoyons à [SZ14, Theorem 2.6] et à [CTSk21, Thm. 5.7.7 (iii)].

Corollaire 2.8. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et ℓ un premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Soit $S/\mathbb{F}$ une surface projective lisse, géométriquement connexe. Soit $Y/\mathbb{F}$ un produit de courbes projectives, lisses, géométriquement connexes. Soit $X = Y \times S$. Alors :*

(a) Les propriétés équivalentes de la proposition 2.1 valent pour X.

(b) La flèche

$$\varphi_\ell : \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}})$$

est un isomorphisme de groupes finis.

(c) On a un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\}.$$

Démonstration. Pour une courbe C géométriquement connexe, projective et lisse, on a $\mathrm{NS}(\overline{C}) = \mathbb{Z}$ avec action triviale du groupe de Galois, et $H^3(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell) = 0$. Les conditions équivalentes de la proposition 2.1 sont connues pour une surface projective, lisse, géométriquement connexe (voir la remarque 2.2 (iii)). Le théorème 2.6 donne (a) par produits successifs avec une courbe. Il en résulte (b). Dans la suite exacte (1.6), la flèche injective de groupes finis

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}})$$

est donc surjective. La suite exacte (1.6) donne alors (c). □

Remarque 2.9. Soit $X = C \times_{\mathbb{F}} S$, où C et S sont variétés irréductibles, projectives et lisses de dimension 1 et 2, respectivement. L'homomorphisme

$$\mathrm{Ker}[CH^2(S)\{\ell\} \to CH^2(\overline{S})\{\ell\}] \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}]$$

induit par la projection $X \to S$ n'est pas surjectif en général. En effet, d'après le corollaire 2.8, la surjectivité de cette flèche équivaut à celle de

$$H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}) \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}).$$

Par la formule de Künneth en cohomologie ℓ-adique, le dernier homomorphisme n'est pas surjective dès que

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\mathrm{tors}} \otimes H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \neq 0,$$

ce qui est le cas, par exemple, si $\ell = 2$, S est une surface de Enriques, et la jacobienne de C admet de 2-torsion non-triviale définie sur $\mathbb{F}$.

3. Correspondances et preuve du théorème 1.1

La Nature est un temple où de vivants piliers
Laissent parfois sortir de confuses paroles ;
L'homme y passe à travers des forêts de symboles
Qui l'observent avec des regards familiers.
(Sonnet des Correspondances, Charles Baudelaire)

3.1. **Sur un corps algébriquement clos.** Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p. Soient C une courbe connexe, projective et lisse sur k, S une surface connexe, projective et lisse sur k, et $X := C \times S$.

Notons $p : X \to C$ et $q : X \to S$ les deux projections [2].

On a un homomorphisme

$$\mu : \mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{p^* \otimes q^*} \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathrm{Pic}(X) \to CH^2(X),$$

2. La lettre p est ici utilisée dans deux acceptions distinctes, mais aucune confusion n'est possible.

où l'homomorphisme à droite est la flèche d'intersection. Soit

$$\lambda : CH^2(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S), CH_0(C)), \qquad \lambda(\Delta) := p_*(q^*(-) \cap \Delta),$$

tel que $\lambda(\Delta) : \mathrm{Pic}(S) \to CH_0(C)$ est l'homomorphisme standard induit par une correspondance Δ ; voir par exemple [Ful98, Definition 16.1.2]. Enfin, on a un homomorphisme

$$\nu : \mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{\mu} CH^2(X) = CH_1(X) \xrightarrow{q_*} CH_1(S) = \mathrm{Pic}(S).$$

Lemme 3.1. *(i) L'application composée*

$$\lambda \circ \mu : \mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \to CH^2(X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S), CH_0(C))$$

envoie un élément $z \otimes D$ sur l'application qui envoie un élément $E \in \mathrm{Pic}(S)$ sur $\deg(D \cdot E) \cdot z$, où $(D \cdot E) \in CH_0(S)$.

(ii) L'application $\nu : \mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(S)$ envoie un élément $z \otimes D$ sur $\deg(z) \cdot D$.

Démonstration. On utilisera le diagramme cartésien évident

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & S \arrow[d, "r"] \\ C \arrow[r, "s"] & \mathrm{Spec}\, k. \end{tikzcd}$$

(i) On veut démontrer que l'on a $p_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) \cdot q^*(D)) = \deg(D \cdot E) \cdot z$. Par la formule de projection, on a

$$p_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) \cdot q^*(E)) = p_*(p^*(z) \cdot q^*(D \cdot E)) = z \cdot p_* q^*(D \cdot E).$$

En utilisant le diagramme ci-dessus, on obtient

$$p_* q^*(D \cdot E) = s^* r_*(D \cdot E) = s^*(\deg(D \cdot E)) = \deg(D \cdot E)[C].$$

On conclut que l'on a $z \cdot p_* q^*(D \cdot E) = \deg(D \cdot E) \cdot z$.

(ii) On veut montrer que l'on a $q_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) = \deg(z) \cdot D$. Par la formule de projection, on a

$$q_*((p^*(z) \cdot q^*(D)) = q_* p^*(z) \cdot D.$$

Par le diagramme ci-dessus, on a

$$q_* p^*(z) \cdot D = r^* s_*(z) \cdot D = r^*(\deg(z)) \cdot D = \deg(z) \cdot D. \qquad \square$$

Proposition 3.2. *Soit k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p. Soit C/k une courbe projective et lisse connexe. Soit S une surface projective, lisse sur k et connexe. Supposons que $\mathrm{Pic}(S)$ est de type fini et que le discriminant de la forme d'intersection sur $\mathrm{Num}(S) = \mathrm{NS}(S)/\mathrm{tors}$ est de la forme $\pm p^r$ pour un entier $r \geq 0$, ce qui est le cas si l'on a $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$. Soit $X = C \times S$. Alors :*

(i) La flèche composée

$$\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \to CH^2(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S), \mathrm{Pic}(C))$$

se factorise comme

$$\mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(C) \otimes \mathrm{Num}(S)$$
$$\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S), \mathrm{Pic}(C)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S), \mathrm{Pic}(C))$$

où la première flèche est une surjection, la dernière flèche une injection et la flèche médiane a noyau et conoyau finis p-primaires.

(ii) *Le noyau N de l'homorphisme naturel*

$$\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to CH^2(X)$$

obtenu par image réciproque via chacune des projections, et intersection sur X, est un groupe fini p-primaire.

(iii) *Soit $L=k(C)$ le corps des fonctions de la courbe C. La restriction de la projection $p:X\to C$ au-dessus du point générique de C induit une flèche surjective $CH^2(X)\to CH^2(S_L)$ et une suite exacte*

$$0\to N\to\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to CH^2(X)\to CH^2(S_L)\to 0.$$

avec N un groupe fini p-primaire.

(iv) *La flèche $\lambda: CH^2(X)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S),\mathrm{Pic}(C))$ induit un homomorphisme*

$$CH^2(S_L)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}},\mathrm{Pic}(C)).$$

Démonstration. On utilise tacitement le fait que $\mathrm{Pic}(C)\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}^0(C)$, et que pour tout entier $n>0$ la multiplication par n sur $\mathrm{Pic}^0(C)$ est surjective à noyau fini.

(i) Vu le lemme 3.1(i), cette flèche composée se factorise par

$$\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Num}(S)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S),\mathrm{Pic}(C)).$$

L'hypothèse sur S et la forme d'intersection donnent une suite exacte

$$0\to\mathrm{Num}(S)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S),\mathbb{Z})\to R\to 0$$

avec R fini p-primaire. Si l'on tensorise cette suite exacte par $\mathrm{Pic}(C)$ et l'on utilise la structure de $\mathrm{Pic}(C)$, on voit que l'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Num}(S)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S),\mathbb{Z})\otimes\mathrm{Pic}(C)=\mathrm{Hom}(\mathrm{Num}(S),\mathrm{Pic}(C))$$

a noyau et conoyau finis p-primaires. Notons p^r l'exposant du noyau.

(ii) Soit α dans le noyau de $\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to CH^2(X)$. Ce groupe est contenu dans le noyau de l'application composée avec λ :

$$\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(S),\mathrm{Pic}(C)).$$

L'image de $p^r\cdot\alpha$ dans $\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Num}(S)$ est nulle.

On a la suite exacte

$$0\to\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}\to\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Num}(S)\to 0 \tag{3.1}$$

qui est scindée comme suite de groupes abéliens. On a donc une suite exacte

$$0\to\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}\to\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Num}(S)\to 0.$$

Ainsi $\beta=p^r\cdot\alpha$ est dans l'image du groupe fini $\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$. Fixons un point $P\in C(k)$. Comme le groupe $\mathrm{Pic}^0(C)$ est divisible, et donc $\mathrm{Pic}^0(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}=0$, l'élément β peut s'écrire $n\cdot(P\otimes D)$ avec $D\in\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}}$ et n un entier.

Par hypothèse, l'image de α, et donc de β dans $CH^2(X)$ est nulle. Utilisons maintenant l'application $CH^2(X)\to\mathrm{Pic}(S)$ et le lemme 3.1(ii). On obtient $n\cdot D=0\in\mathrm{Pic}(S)$. Donc $\beta=0$ et $p^r\cdot\alpha=0$. On conclut que le noyau de

$$\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)\to CH^2(X)$$

est contenu dans le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(C)\otimes\mathrm{Pic}(S)$ annulé par p^r. Ce sous-groupe est un groupe fini.

(iii) Pour toute courbe projective et lisse connexe C sur k algébriquement clos et toute variété projective et lisse connexe S sur k, la restriction de la projection

$X = C \times S \to C$ au point générique de C induit la suite exacte de localisation bien connue

$$\oplus_{x \in C^{(1)}} \operatorname{Pic}(S_x) \to CH^2(X) \to CH^2(S_L) \to 0,$$

soit encore

$$\operatorname{Div}(C) \otimes \operatorname{Pic}(S) \to CH^2(X) \to CH^2(S_L) \to 0.$$

Elle induit une suite exacte

$$\operatorname{Pic}(C) \otimes \operatorname{Pic}(S) \to CH^2(X) \to CH^2(S_L) \to 0.$$

Dans le cas ici considéré, on a établi que la flèche $\operatorname{Pic}(C) \otimes \operatorname{Pic}(S) \to CH^2(X)$ a son noyau fini p-primaire.

L'énoncé (iv) résulte de la suite exacte (3.1) et du fait que l'application composée $\operatorname{Pic}(C) \otimes \operatorname{Pic}(S) \to CH^2(X) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Pic}(S), \operatorname{Pic}(C))$ se factorise par le groupe $\operatorname{Hom}(\operatorname{Num}(S), \operatorname{Pic}(C))$. □

3.2. **Sur un corps fini.** Soit $\mathfrak{g}$ un groupe profini, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un sous-groupe normal ouvert. Soit $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Soient M et N deux $\mathfrak{g}$-modules continus discrets.

On a un homomorphisme de groupes abéliens

$$\theta_{\mathfrak{h}} : M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}} \to M \otimes N$$

défini par

$$(m \otimes n) \mapsto \sum_{g \in G} g(m \otimes n) = \sum_{g \in G} g(m) \otimes g(n).$$

On vérifie immédiatement que l'image de $\theta_{\mathfrak{h}}$ est dans $(M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$. On considère l'application

$$\Theta_{M,N} := \oplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} \theta_{\mathfrak{h}} : \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) \to (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}.$$

Lemme 3.3. *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini et $\mathfrak{g} = \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Soient M un $\mathfrak{g}$-module de type fini, et N un $\mathfrak{g}$-module. Supposons que N satisfait $H^1(\mathfrak{h}, N) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Alors $\Theta_{M,N}$ est surjective.*

Démonstration. On commence par l'établir pour un $\mathfrak{g}$-module de la forme $M = \mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$. C'est un énoncé général. Notons que l'on a $M = M^{\mathfrak{h}}$. Dans ce cas, pour tout $\mathfrak{g}$-module N, on a $N^{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \otimes N)^{\mathfrak{g}}$, la flèche étant donnée par $n \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma \otimes (\sigma \cdot n)$. Ceci implique que la flèche $M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}} \to (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$ donnée par

$$m \otimes n \mapsto \sum_{g \in G} g(m) \otimes g(n)$$

est surjective. On en déduit que pour tout $\mathfrak{g}$-module P de permutation et tout $\mathfrak{g}$-module N l'application $\Theta_{P,N}$ est surjective.

Soit maintenant M un $\mathfrak{g}$-module de type fini. Comme rappelé au lemme 2.3, on a une suite exacte courte de $\mathfrak{g}$-modules

$$0 \to Q \to P \to M \to 0,$$

où P est un $\mathfrak{g}$-réseau de permutation and Q est un facteur direct d'un $\mathfrak{g}$-réseau de permutation.

Tensorisons la suite exacte ci-dessus par N. On obtient une suite exacte

$$0 \to R \to Q \otimes N \to P \otimes N \to M \otimes N \to 0,$$

où R est un $\mathfrak{g}$-module de torsion. Cette suite se coupe en deux suites exactes

$$0 \to R \to Q \otimes N \to S \to 0$$

et

$$0 \to S \to P \otimes N \to M \otimes N \to 0.$$

La première donne la suite exacte

$$H^1(\mathfrak{g}, Q \otimes N) \to H^1(\mathfrak{g}, S) \to H^2(\mathfrak{g}, R).$$

L'hypothèse faite sur N dans le lemme, le fait que Q est un facteur direct d'un module de permutation, et le lemme de Shapiro, donnent $H^1(\mathfrak{g}, Q \otimes N) = 0$. Par ailleurs, comme $\mathbb{F}$ est un corps fini et R est de torsion, on a $H^2(\mathfrak{g}, R) = 0$. On a donc $H^1(\mathfrak{g}, S) = 0$. La deuxième suite exacte donne alors que l'application $(P \otimes N)^{\mathfrak{g}} \to (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}$ est surjective.

L'homomorphisme $P \to M$ induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (P^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) \arrow[r, "\Theta_{P,N}"] \arrow[d] & (P \otimes N)^{\mathfrak{g}} \arrow[d, two heads] \\ \bigoplus_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} (M^{\mathfrak{h}} \otimes N^{\mathfrak{h}}) \arrow[r, "\Theta_{M,N}"] & (M \otimes N)^{\mathfrak{g}}. \end{tikzcd}$$

Le fait que $\Theta_{P,N}$ est surjectif implique donc que $\Theta_{M,N}$ est surjectif. □

Proposition 3.4. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soit $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Soit $C/\mathbb{F}$ une courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Soit $K = \mathbb{F}(C)$ et $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$. Soit $S/\mathbb{F}$ une surface projective, lisse et géométriquement connexe. Supposons que $\mathrm{Pic}(\overline{S})$ est de type fini et que le discriminant de la forme d'intersection sur le réseau $\mathrm{Num}(\overline{S}) = \mathrm{NS}(\overline{S})/\mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}}$ est de la forme $\pm p^r$ pour un entier $r \geq 0$, ce qui est le cas si l'on a $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$. Soit $X = C \times_{\mathbb{F}} S$. Alors :*

(i) La suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Pic}(\overline{S}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{C}))_p \to CH^2(\overline{X})_p \to CH^2(S_L)_p \to 0$$

obtenue à partir de celle de la proposition 3.2 par tensorisation par $\mathbb{Z}[1/p]$ induit une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Pic}(\overline{S}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{C}))_p^G \to CH^2(\overline{X})_p^G \to CH^2(S_L)_p^G \to 0.$$

(ii) L'image de $(\mathrm{Pic}(\overline{S}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{C}))^G \to CH^2(\overline{X})^G$ est incluse dans l'image de $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$.

(iii) La restriction $CH^2(\overline{X}) \to CH^2(S_L)$ induit un isomorphisme de groupes de torsion

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}[CH^2(S_K) \to CH^2(S_L)^G]_p$$

et ce dernier groupe est isomorphe à $\mathrm{Coker}[A_0(S_K) \to A_0(S_L)^G]_p$.

Démonstration. Sur $\overline{X} = \overline{C} \times \overline{S}$, les correspondances considérées dans la sous-section 3.1 induisent des homomorphismes G-équivariants.

On considère la suite de cohomologie galoisienne associée à la suite tensorisée par $\mathbb{Z}[1/p]$. Notons M le noyau de $CH^2(\overline{X}) \to CH^2(S_L)$. Par la suite de la proposition 3.2(iii), on a $(\mathrm{Pic}(\overline{C}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}))_p \xrightarrow{\sim} M_p$. Ceci donne la première suite exacte de (i). Par passage à la cohomologie galoisienne, on déduit formellement une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Pic}(\overline{S}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{C}))_p^G \to CH^2(\overline{X})_p^G \to CH^2(S_L)_p^G$$

et le fait que la dernière flèche est surjective si et seulement si la flèche

$$H^1(G, \operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C}))_p \to H^1(G, CH^2(\overline{X}))_p$$

est injective. Ici on utilise le fait que, comme $\mathbb{Z}[1/p]$ est $\mathbb{Z}$-plat, la cohomologie et les G-invariants en particulier commutent avec tensorisation par $\mathbb{Z}[1/p]$. On a :

$$\operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C}) = \operatorname{Pic}(\overline{S}) \oplus [\operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}^0(\overline{C})].$$

On va maintenant utiliser le fait que le corps de base $\mathbb{F}$ est fini. Pour la courbe C projective et lisse sur le corps fini $\mathbb{F}$, on a $H^1(\mathbb{F}, R \otimes \operatorname{Pic}^0(\overline{C})) = 0$ pour tout module galoisien de type fini R (conséquence du théorème de Lang). La flèche $H^1(\mathbb{F}, \operatorname{Pic}(\overline{S})) \to H^1(\mathbb{F}, \operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C}))$ définie par le choix d'un zéro-cycle de degré 1 sur C est donc un isomorphisme. L'application composée

$$\operatorname{Pic}(\overline{S}) \to \operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C}) \to CH^2(\overline{X}) \to \operatorname{Pic}(\overline{S}),$$

où la troisième flèche est induite par la projection $X \to S$, est l'identité. On conclut que

$$H^1(\mathbb{F}, \operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C})) \to H^1(\mathbb{F}, CH^2(\overline{X}))$$

est injectif, ce qui établit (i).

Appliquons maintenant le lemme 3.3 à $M = \operatorname{Pic}(\overline{S})$ et $N = \operatorname{Pic}(\overline{C})$. Comme $\mathbb{F}$ est un corps fini, l'hypothèse $H^1(\mathbb{F}', \operatorname{Pic}(\overline{C})) = 0$ pour toute extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ est satisfaite. Par ailleurs, pour $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ extension finie, le sous-groupe $M_{\mathbb{F}'}$ de M formé des invariants sous $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}')$ est égal à $\operatorname{Pic}(S_{\mathbb{F}'})$. De même pour $N = \operatorname{Pic}(\overline{C})$. D'après le lemme, l'image de $(\operatorname{Pic}(\overline{S}) \otimes \operatorname{Pic}(\overline{C}))^G$ dans $CH^2(\overline{X})^G$ coïncide avec la réunion des images des $M_{\mathbb{F}'} \otimes N_{\mathbb{F}'}$ par l'application composée de $M_{\mathbb{F}'} \otimes N_{\mathbb{F}'} \to CH^2(X_{\mathbb{F}'})$ et la norme, c'est-à-dire la somme $\sum_{\sigma \in \operatorname{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})} \sigma$. L'application

$$\sum_{\sigma \in \operatorname{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})} \sigma : CH^2(X_{\mathbb{F}'}) \to CH^2(X_{\mathbb{F}'})$$

se factorise comme la composée de la norme $CH^2(X_{\mathbb{F}'}) \to CH^2(X)$ et de la flèche de restriction $CH^2(X) \to CH^2(X_{\mathbb{F}'})$. Ceci établit (ii).

Comme $\mathbb{F}$ est un corps fini, la surface géométriquement intègre $S/\mathbb{F}$ possède un zéro-cycle de degré 1 (Lang–Weil). Comme la restriction $CH^2(X) \to CH^2(S_K)$ est surjective, l'énoncé (iii) résulte des deux autres énoncés. □

Lemme 3.5. *Soient k un corps et X/k une variété projective, lisse et géométriquement connexe. Supposons que $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour toute extension algébriquement close Ω/k. Alors $A_0(X_\Omega) = 0$ pour toute extension algébriquement close Ω/k.*

Démonstration. Soit A la variété d'Albanese de X. Pour tout corps algébriquement clos Ω on a un homomorphisme surjectif $A_0(X_\Omega) \to A(\Omega)$. Par hypothèse, pour tout corps algébriquement clos Ω, on a $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$, et donc $A(\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$. Comme A est une variété abélienne, si $A \neq 0$ il existe Ω tel que $A(\Omega)$ n'est pas de torsion. Par exemple, si on prend Ω contenant $k(A)$, le point de $A(\Omega)$ correspondant à l'identité de A n'est pas de torsion. On en déduit que $A = 0$. Par le théorème de Roitman [Roj80, Blo79, Mil82], l'homomorphisme $A_0(X_\Omega) \to A(\Omega)$ induit un isomorphisme sur la torsion. Comme $A(\Omega) = 0$, on obtient que $A_0(X_\Omega)$ est sans torsion. D'après [Blo76, Lemma 1.3], le groupe $A_0(X_\Omega)$ est divisible, et donc uniquement divisible. L'hypothèse $A_0(X_\Omega) \otimes \mathbb{Q} = 0$ entraîne alors $A_0(X_\Omega) = 0$. □

Théorème 3.6. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soit $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Soit $C/\mathbb{F}$ une courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Soit $K = \mathbb{F}(C)$ et $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$. Soit $S/\mathbb{F}$ une surface projective, lisse et géométriquement connexe satisfaisant $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$, et soit $X := S \times C$. Avec les notations de la proposition 3.4, les énoncés (a), (b) (c) suivants sont équivalents :*

(a) On a $\mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] = 0$.

(b) Le conoyau, de torsion, de l'application naturelle de groupes $A_0(S_K) \to A_0(S_L)^G$ n'a pas de torsion ℓ-primaire.

Supposons de plus que la surface S est géométriquement CH_0-triviale. Alors les conditions ci-dessus sont équivalentes à :

(c) La flèche $A_0(S_{\mathbb{F}(C)})\{\ell\} \to A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G$ est surjective.

Démonstration. Par le corollaire 2.8, on a un isomorphisme de groupes finis

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]\{\ell\} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}).$$

Sans même avoir à identifier les flèches, un argument de comptage et la suite exacte (1.6) donnent un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\,\{\ell\}\,,$$

et par la proposition 3.4 ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Coker}[A_0(S_K) \to A_0(S_L)^G]\{\ell\}$. Ceci donne l'équivalence de (a) et (b). Si la surface S est géométriquement CH_0-triviale, alors les groupes $A_0(S_{\mathbb{F}(C)})$ et $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})$ sont de torsion, ce qui donne l'équivalence de (b) et (c). □

Théorème 3.7. *Supposons que la conjecture de Tate vaut pour toutes les surfaces sur les corps finis. Avec les notations et hypothèses du théorème 3.6, sous l'hypothèse que la surface S est géométriquement CH_0-triviale, les énoncés (a), (b) ou (c) impliquent :*

Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul, et l'application cycle $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective.

Démonstration. Soit $\iota : \overline{C} \hookrightarrow \overline{C} \times \overline{S}$ une immersion fermée associée à un $\overline{\mathbb{F}}$-point de $\overline{S}$. Soit Ω un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}$. Par le lemme 3.5, on a $A_0(S_\Omega) = 0$. On déduit aisément que l'homomorphisme $CH_0(C_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ induit par ι est surjectif.

Par le corollaire 5.11 ci-dessous, qui utilise un théorème de C. Schoen (c'est ici qu'on utilise la conjecture de Tate pour les surfaces), on a alors

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Sous l'hypothèse (a) on a donc

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Par ailleurs, la surjectivité de $CH_0(C_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ et [CTK13, Prop. 3.23] donnent que l'application cycle $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ pour le solide X a son conoyau fini. D'après le théorème 5.10 rappelé ci-dessous, ce conoyau est alors égal à un quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$, et donc est nul. On a donc montré que l'application cycle

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective. □

Théorème 3.8. *Soient k un corps de caractéristique $p \geq 0$, $\overline{k}$ une clôture séparable de k, S une k-surface projective et lisse géométriquement intègre, et $\overline{S} := S \times_k \overline{k}$. Supposons que S est géométriquement CH_0-triviale et que $S(k) \neq \emptyset$. Soit $m \geq 1$ un entier tel que $m \cdot \mathrm{NS}(\overline{S})_{\mathrm{tors}} = 0$. Soit $n \geq 1$ le degré d'une extension finie galoisenne K/k telle qu'après extension à K le module galoisien $\mathrm{NS}(\overline{S})/\mathrm{tors}$ soit de permutation. Soit $N = mn$.*

Pour tout corps F contenant k, on a $N \cdot A_0(S_F) = 0$.

Le théorème 3.8 et son corollaire 3.9 seront utilisés seulement dans le cas où k est algébriquement clos.

Démonstration. Pour k algébriquement clos de caractéristique quelconque, le résultat est [Kah17, Cor. 6.4 (a)]. Pour k quelconque, il convient de suivre les démonstrations du paragraphe 3 de [CTR85]. C'est fait dans [Kah17, Théorème A.1(b), Remarque A.2(3)] sur un corps de caractéristique zéro. Cette restriction sur la caractéristique est inutile car les résultats de [CTR85] sont établis en toute caractéristique $p > 0$ pour tout $\ell \neq p$. □

Corollaire 3.9. *Sous les hypothèses du théorème 3.8 pour la surface S, soient V une k-variété projective et lisse géométriquement intègre, $X := V \times_k S$, $P \in S(k)$, et $f : V \hookrightarrow X$ donné par $f(x) = (x, P)$.*

(i) Pour tout corps F contenant k, on a

$$N \cdot f_*(CH_0(V_F)) = N \cdot CH_0(X_F).$$

(ii) Si $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)) \to H^i_{\mathrm{nr}}(k(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ est un isomorphisme, alors, pour tout ℓ qui ne divise pas N, l'homomorphisme

$$H^i(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j)) \to H^i_{\mathrm{nr}}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j))$$

est surjectif.

Démonstration. (i) Il suffit de démontrer que $N \cdot CH_0(X_F) \subset N \cdot f_*(CH_0(V_F))$. Soit D un zéro-cycle de X_F, et soit d le degré de D. Par le théorème 3.8, $N(D - dP) = 0$ dans $A_0(S_F)$, donc $ND = NdP$ est dans $Nf_*(CH_0(V_F))$.

(ii) Ceci suit de (i) en utilisant un argument comme dans [ACP17, Thm. 1.4]. □

Preuve du théorème 1.1. Comme $\mathrm{NS}(\overline{S})[\ell] = 0$ et S est géométriquement CH_0-triviale, on peut appliquer le théorème 3.8 et le corollaire 3.9(ii) avec $V = C$, $k = \overline{\mathbb{F}}$, $i = 3$ et $j = 2$ et $F = \overline{\mathbb{F}}(C)$. On obtient que $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\} = 0$ et, comme la ℓ-dimension cohomologique de $\overline{\mathbb{F}}(C)$ est 1, $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. Par le théorème 3.6, on déduit que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

Par ailleurs, la flèche $CH_0(C_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ est surjective pour tout corps algébriquement clos Ω contenant $\mathbb{F}$. Donc, par [CTK13, Prop. 3.23] le conoyau $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est fini. D'après le théorème 5.10 rappelé ci-dessous, ce conoyau est isomorphe à un quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$, et donc il est nul. □

4. Zéro-cycles sur $S_{\overline{\mathbb{F}}(C)}$ et preuve des Théorèmes 1.2 et 1.3

Théorème 4.1. *(Raskind) Soient k un corps d'exposant caractéristique p et Z une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. On a les propriétés suivantes :*

(a) L'application de restriction $CH^2(Z_{k[\![t]\!]}) \to CH^2(Z_{k((t))})$ est un isomorphisme.

(b) Pour chaque premier $\ell \neq p$, on a une injection

$$CH^2(Z_{\overline{k}[[t]]})\,\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\overline{k}})\,\{\ell\}\,,$$

(c) Pour chaque premier $\ell \neq p$, on a une injection

$$CH^2(Z_{\overline{k}((t))})\,\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\overline{k}})\,\{\ell\}\,,$$

Démonstration. Par [Ras89, Proposition 1.2], on a une suite exacte

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Z) \to CH^2(Z_{k[[t]]}) \to CH^2(Z_{k((t))}) \to 0.$$

Si $[\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}(Z)$, la flèche

$$\mathrm{Pic}(Z) \otimes k((t))^* \to H^1_{\mathrm{Zar}}(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Z)$$

envoie $[\mathcal{L}] \otimes t$ sur $\mathcal{L}$; voir le carré commutatif dans la preuve de [Ras89, Proposition 1.3]. La flèche $H^1_{\mathrm{Zar}}(Z_{k((t))}, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(Z)$ est donc surjective. On a donc $CH^2(Z_{k[[t]]}) = CH^2(Z_{k((t))})$. Par [Ras89, Theorem 1.9], pour chaque premier $\ell \neq p$, on a une injection

$$CH^2(Z_{\overline{k}[[t]]})\,\{\ell\} \hookrightarrow CH^2(Z_{\overline{k}})\,\{\ell\}\,.$$

La combinaison de ces résultats donne le théorème. □

On va utiliser le théorème 4.2 ci-dessous, dont la démonstration repose sur les résultats de Merkurjev et Suslin [MS82], sur le théorème 90 de Hilbert pour K_2 [CT83], et sur de nombreux résultats du travail [CTR85] de Raskind et du premier auteur. En caractéristique zéro, on trouvera une démonstration détaillée de ce théorème dans l'article [CTV12] : c'est le théorème 8.7 de [CTV12], où l'hypothèse $b_2 - \rho = 0$ est remplacée par l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, qui lui est équivalente en caractéristique nulle. En caractéristique $p > 0$, si on prend comme hypothèse $b_2 - \rho = 0$ on voit en suivant les divers arguments donnés dans [CTV12, thm. 8.7] et en se référant à [CTR85] (voir en particulier [CTR85, Rem. 2.14] et [CTR85, Remark 3.7.1]) que tout vaut à la p-torsion près. Sur un corps parfait, le théorème est aussi établi dans [CTK13, Thm. 6.3] et [CTK13, Thm. 6.6]. C'est d'ailleurs ainsi que sur un corps fini la suite exacte (1.6) est établie dans [CTK13]. On notera que si l'on prend pour L un corps fini, on a la suite exacte décrite ci-dessous sans supposer $b_2 - \rho = 0$. Sur un corps L parfait de caractéristique $p > 0$, la p-torsion est aussi contrôlée (Gros et Suwa [GS88]).

Théorème 4.2. *Soit L un corps de caractéristique $p \geq 0$, et $\ell \neq p$ un premier. Supposons $\mathrm{cd}_\ell(L) \leq 1$. Soit $\overline{L}$ une clôture séparable de L, et $G = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Soit X une L-variété projective, lisse, géométriquement connexe possédant un zéro-cycle de degré 1. Supposons que le rang ρ du groupe de Néron-Severi de $\overline{X}$ est égal au deuxième nombre de Betti ℓ-adique $b_2 = \dim H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. On a alors une suite exacte naturelle*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \to H^1(G, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \\ \to \mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(L(X)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{L}(X)/\overline{L}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))] \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to 0. \end{aligned}$$

Corollaire 4.3. *Soit L un corps de caractéristique $p \geq 0$, et $\ell \neq p$ un premier. Supposons $\mathrm{cd}_\ell(L) \leq 1$. Soit $\overline{L}$ une clôture séparable de L, et $G = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Soit S une L-surface projective, lisse, géométriquement connexe.*

(a) Si l'on a $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \to A_0(S)\{\ell\} \to H^1(G, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \to H^3_{\mathrm{nr}}(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(b) Si de plus S est géométriquement CH_0-triviale et possède un zéro-cycle de degré 1, alors on a une suite exacte naturelle

$$0 \to A_0(S)\{\ell\} \to H^1(G, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}) \to H^3_{\mathrm{nr}}(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to 0.$$

Démonstration. Comme S est une surface, le corps $\overline{L}(S)$ est de ℓ-dimension cohomologique 2, donc $H^3(\overline{L}(S), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. Si $b_1 = 0$, alors $A_0(\overline{S})\{\ell\} = 0$ par le théorème de Roitman [Roj80, Blo79]. L'énoncé (a) résulte alors du théorème 4.2.

Si la surface S est géométriquement CH_0-triviale, alors, d'après le lemme 3.5, la flèche degré $CH_0(\overline{S}) \to \mathbb{Z}$ est surjective à noyau de torsion p-primaire, et l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur la surface S donne alors

$$\mathrm{Coker}[CH^2(S) \to CH^2(\overline{S})^G]\{\ell\} = 0.$$

L'énoncé (b) résulte alors du théorème 4.2. □

Théorème 4.4. *Soient k un corps parfait d'exposant caractéristique p et $\overline{k}/k$ une clôture séparable. Soient C et S des k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes de dimension 1 et 2, respectivement. Soit $X = S \times_k C$. Notons $K := k(C)$ et $L := \overline{k}(C)$.*

(a) Si la surface S satisfait $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$, alors pour tout premier $\ell \neq p$, on a une suite exacte[3] $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$*-équivariante de groupes finis*

$$0 \to A_0(S_L)\,\{\ell\} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{k})) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{k}(X)/\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(b) Si de plus S est géométriquement CH_0-triviale et possède un zéro-cycle de degré 1, alors, pour tout premier $\ell \neq p$, on a une suite exacte $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$*-équivariante de groupes finis*

$$0 \to A_0(S_L)\,\{\ell\} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{k})) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{k}(X)/\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to 0.$$

Démonstration. Soit $L = \overline{k}(C)$. Pour chaque $x \in \overline{C}^{(1)}$, on note par $L_x \simeq \overline{k}(\!(t)\!)$ le corps des fractions de l'anneau local complété de $\overline{C}$ en x.

Donnons la démonstration de (b). La démonstration de (a) est identique, on enlève simplement le zéro à droite dans les suites exactes ci-dessous. Le théorème de Sato et Saito cité ci-dessous n'intervient que pour la partie (b).

On applique le corollaire 4.3 à S_L et S_{L_x} pour chaque $x \in \overline{C}^{(1)}$. Comme $\mathrm{cd}(L) = \mathrm{cd}(L_x) = 1$, pour tout $\ell \neq p$ on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_0(S_L)\,\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(L, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3_{\mathrm{nr}}(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{x \in \overline{C}^{(1)}} A_0(S_{L_x})\,\{\ell\} \arrow[r] & \prod_{x \in \overline{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}}) \arrow[r] & \prod_{x \in \overline{C}^{(1)}} H^3_{\mathrm{nr}}(L_x(S)/L_x, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse $b_1 = 0$ et le théorème de Roitman [Roj80, Blo79] donnent $A_0(\overline{S})\{\ell\} = 0$. D'après le théorème 4.1, on a donc $A_0(S_{L_x})\,\{\ell\} = 0$ pour tout $x \in \overline{C}^{(1)}$.

Le noyau de

$$H^3_{\mathrm{nr}}(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to \prod_{x \in \overline{C}^{(1)}} H^3_{\mathrm{nr}}(L_x(S)/L_x, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un sous-groupe de $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{k}(X)/\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$, comme on voit en considérant les résidus aux points génériques des diviseurs $S_x \subset X$. Ce noyau coïncide en fait avec

3. Nous ne savons pas si la flèche $A_0(S_L)\,\{\ell\} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{k}))$, qui est définie par la K-théorie algébrique, est induite par la flèche $CH^2(S_L) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\overline{S})_{\mathrm{tors}}, \mathrm{Pic}(\overline{C}))$ obtenue par les correspondances à la proposition 3.2 (iv).

$H^3_{\rm nr}(\overline{k}(X)/\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$: cela résulte d'un théorème de K. Sato et S. Saito ([SS10, Thm. 2.13], [CT15, Thm. 3.16]) appliqué au schéma $S \times_{\overline{k}} \overline{k}[[t]]$.

Du diagramme ci-dessus on déduit donc une suite exacte

$$0 \to A_0(S_L)\{\ell\} \to B \to H^3_{\rm nr}(\overline{k}(X)/\overline{k}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to 0.$$

où

$$B := \mathrm{Ker}[H^1(L, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors}) \to \prod_{x\in \overline{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors})].$$

Il nous reste à identifier ce groupe B. Comme L contient $\overline{k}$, les actions des groupes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{L}_x/L_x)$ sur le module $H^1(L, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors})$ sont triviales. Pour tout $n \geq 1$, il est clair que

$$H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}/\ell^n) \subseteq \mathrm{Ker}[H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \to \prod_{x\in \overline{C}^{(1)}} H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n)].$$

Par ailleurs, on a une suite exacte

$$0 \to H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \to \prod_{x\in \overline{C}^{(1)}} H^0(\overline{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)});$$

voir [CT95, (3.7)]. Pour tout $x \in \overline{C}^{(1)}$, le résidu $H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^0(\overline{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)})$ se factorise comme

$$H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^0(\overline{k}(x), \mu_{\ell^n}^{\otimes(-1)}),$$

et donc

$$\mathrm{Ker}[H^1(L, \mathbb{Z}/\ell^n) \to \prod_{x\in \overline{C}^{(1)}} H^1(L_x, \mathbb{Z}/\ell^n)] = H^1(\overline{C}, \mathbb{Z}/\ell^n).$$

On en déduit que le noyau de

$$H^1(L, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors}) \to \prod_{x\in \overline{C}^{(1)}} H^1(L_x, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors})$$

coïncide avec $H^1(\overline{C}, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\rm tors})$.

On a une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Br}(\overline{X})^\circ\{\ell\} \to \mathrm{Br}(\overline{X})\{\ell\} \to H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\} \to 0,$$

où $\mathrm{Br}(\overline{X})^\circ\{\ell\} \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{b_2-\rho}$ est le sous-groupe divisible maximal de $\mathrm{Br}(\overline{X})\{\ell\}$; voir [Gro68, (8.9)] ou [CTSk21, Prop. 5.2.9]. Comme $b_1 = 0$, on a $\mathrm{Pic}(\overline{S}) = \mathrm{NS}(\overline{S})$. D'après [Gro68, (8.12)] ou [CTSk21, Prop. 5.2.10] on a donc des isomorphismes

$$H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{NS}(\overline{S})\{\ell\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)).$$

Notons $M := H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))\{\ell\}$. L'isomorphisme ci-dessus dit que le dual de Cartier $\hat{M} = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))$ de M est le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}$. L'accouplement $M \times \hat{M} \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)$ et la dualité de Poincaré sur la courbe $\overline{C}$ donnent un accouplement équivariant non dégénéré de groupes abéliens finis

$$H^1(\overline{C}, \hat{M}) \times H^1(\overline{C}, M) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell.$$

Par ailleurs, on a un accouplement équivariant non dégénéré de groupes abéliens finis

$$\hat{M} \times H^1(\overline{C}, M) \to H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) = J(C)(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}.$$

On a donc des isomorphismes de modules galoisiens finis

$$B \simeq H^1(\overline{C}, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{M}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})\{\ell\}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

Ceci complète la démonstration. □

Preuve du théorème 1.2. Comme la surface S est géométriquement CH_0-triviale, elle satisfait $b_1 = 0$ et $b_2 - \rho = 0$. Par le théorème 4.4(a) on a donc $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G = 0$. Comme la surface S est géométriquement CH_0-triviale, le théorème 3.6 nous permet de conclure. □

Preuve du théorème 1.3. Par le théorème 5.10, le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible. Comme S est CH_0-triviale, ce groupe est fini [CTK13, Prop. 3.2]. Il est donc nul. Par le théorème 4.4(a), sous la condition (1.5), on a $A_0(S_{\overline{\mathbb{F}}(C)})\{\ell\}^G = 0$. Le théorème 3.6 donne alors la nullité de $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. Par le théorème 5.10(ii), le conoyau de l'application $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est donc sans torsion. On conclut comme dans la preuve du théorème 1.1 : la surjectivité de $CH_0(C_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ et [CTK13, Prop. 3.23] entraînent que le conoyau de $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est fini, il est donc nul. □

Remarque 4.5. Soient B une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{C}$, S une surface d'Enriques sur $\mathbb{C}$, et $X := B \times S$. On a $\mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le théorème 4.4 donne alors une suite exacte courte de groupes finis

$$0 \to A_0(S_{\mathbb{C}(E)}) \to J(B)(\mathbb{C})[2] \to H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

On note que $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ pour tout $\ell \neq 2$. On a un isomorphisme naturel $J(B)(\mathbb{C})[2] \simeq H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et l'homomorphisme de restriction $\rho : CH^2(X) \to CH^2(S_{\mathbb{C}(B)})$ est surjectif. On a donc une suite exacte

$$CH_1(X)_0 \to H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0,$$

où $CH_1(X)_0 := \rho^{-1}(A_0(S_{\mathbb{C}(B)}))$. D'après [CTV12, Théorème 1.1], on déduit que l'homomorphisme $CH_1(X)_0 \to H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est surjectif si et seulement si la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaut pour X.

Soit $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'élément correspondant au revêtement double par la surface $K3$ associée à S. On peut espérer que la flèche $CH_1(X)_0 \to H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soit donnée par $Z \mapsto Z^*\alpha$, où $Z^* : H^1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est l'homomorphisme associé à la correspondance $Z : S \rightsquigarrow B$. Ceci donnerait une démonstration alternative de l'énoncé [BO18, Proposition 1.1] de Benoist et Ottem.

Sur le corps des complexes, ces auteurs établissent l'existence de paires (S, B) avec B courbe elliptique et S surface d'Enriques telles que la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaille, et d'autres pour lesquelles elle ne vaille pas. Ainsi, via [CTV12], suivant la paire (S, B), le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est nul ou non. Par contraste, si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{F}}$, le corollaire 5.11 ci-dessous, conséquence d'un théorème de Schoen, dit que pour un tel solide $X = B \times S$ avec S surface d'Enriques, on devrait toujours avoir $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X)/\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ et l'application cycle $CH^2(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ devrait être surjective.

Remarque 4.6. (i) Montrons que si X satisfait les hypothèses du théorème 1.2 l'application cycle (1.1') est surjective.

Comme $H^*(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion et $H^2(\overline{C}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell(-1)$, la formule de Künneth en cohomologie ℓ-adique [Mil80, Chap. VI, Cor. 8.13] nous donne un isomorphisme

G-équivariant

$$H^4(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2)) \simeq H^4(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)) \oplus (H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)) \otimes H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell)) \oplus H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1)).$$

Pour tout G-module M de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$, la flèche naturelle de cup-produit

$$\cup_M : M \otimes H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell) \to H^1(\overline{C},M)$$

est un isomorphisme, comme l'on voit aisément par réduction aux cas $M=\mathbb{Z}_\ell$ et $M=\mathbb{Z}/\ell^n$, $n\geq 1$. Si on pose $M=H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))$, on obtient un isomorphisme G-équivariant

$$H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)) \otimes H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_\ell) \simeq H^1(\overline{C},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))).$$

Comme S est géométriquement CH_0-triviale, on sait que $b_3(\overline{S})=b_1(\overline{S})=0$, donc $H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))$ est fini et, comme discuté à la fin de la preuve du théorème 4.4, on a un isomorphisme G-équivariant

$$H^1(\overline{C},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

L'hypothèse (1.5) implique alors que $H^1(\overline{C},H^3(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2)))^G$ est trivial, donc

$$H^4(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))^G \simeq H^4(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))^G \oplus H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))^G.$$

La fonctorialité de l'application de cycle ℓ-adique nous donne le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} CH^2(S)\oplus CH^1(S) \arrow[r] \arrow[d] & CH^2(X) \arrow[d] \\ H^4(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))^G \oplus H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))^G \arrow[r, "\sim"] & H^4(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))^G. \end{tikzcd}$$

Comme $\mathbb{F}$ est fini, S admet un zéro-cycle de degree 1 (Lang–Weil), c'est à dire, la flèche de degré $CH^2(S)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(2))^G=\mathbb{Z}_\ell$ est surjective. Comme S est géométriquement CH_0-triviale, la flèche $CH^1(S)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^2(\overline{S},\mathbb{Z}_\ell(1))^G$ est aussi surjective. On conclut alors que (1.1') est surjective, comme voulu.

(ii) Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & & CH^2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell \arrow[d, "(1.3')"] \arrow[dr, "(1.1')"] & & \\ 0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))) \arrow[r] & H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) \arrow[r] & H^4(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2))^G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où la suite exacte courte vient de la suite de Hochschild-Serre en cohomologie étale. Le groupe fini $H^1(\mathbb{F},H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2)))$ est en général non nul ; voir la remarque 2.2 (i). Donc la surjectivité de (1.1') n'entraîne pas a priori celle de (1.3'). Nous espérons revenir sur ce point dans une publication ultérieure.

5. Applications "classe de cycle" en cohomologie ℓ-adique

On donne ici des rappels de résultats que l'on peut trouver pour l'essentiel dans un article de B. Kahn et du premier auteur [CTK13]. Comme déjà indiqué, le théorème 5.10 et le corollaire 5.11 sont utilisés dans la démonstration du théorème 1.3 dans la fin de la démonstration du théorème 1.3.

Soit k un corps de caractéristique $p\geq 0$. Soit ℓ un nombre premier différent de p. Si k est un corps fini, ou un corps algébriquement clos, situations auxquelles on va se restreindre dans ce paragraphe, pour toute k-variété X les groupes de cohomomogie étale $H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ sont finis et les groupes de cohomologie ℓ-adiques $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell(j)) = \varprojlim_n H^i(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini.

On a des applications cycles

$$CH^i(X)/\ell^n \to H^{2i}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes i})$$

et des applications induites de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$\varprojlim_n CH^i(X)/\ell^n \to H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

On a les applications composées de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \varprojlim_n CH^i(X)/\ell^n \to H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

En utilisant le fait que les $H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini, on voit que l'application $\varprojlim CH^i(X)/\ell^n \to H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$ est surjective si et seulement si l'application composée ci-dessus est surjective.

Pour toute variété projective et lisse géométriquement intègre X sur un corps fini $\mathbb{F}$ et tous entiers $i \geq 0$, J. Tate [Tate94] a conjecturé que les applications cycle rationnelles

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

sont surjectives. Pour $i = 1$, cet énoncé est équivalent à la surjectivité de la flèche déduite de la flèche de Kummer

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)),$$

et ceci est équivalent à la finitude de $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$.

On s'intéresse ici à la validité de la conjecture suivante pour certaines classes de variétés projectives et lisses sur un corps fini.

Conjecture 5.1. *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini et X une variété projective et lisse géométriquement intègre sur $\mathbb{F}$ de dimension d. Alors, pour tout ℓ premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$, l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est surjective.

Proposition 5.2. *Soit $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géométriquement connexe de dimension d. Soit ℓ premier, $\ell \neq p$. Supposons que le groupe $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ est fini. Alors le conoyau de l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est fini.

Démonstration. On peut supposer $d \geq 3$. Comme aucune propre valeur de Frobenius sur les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ pour $i \neq 2j$ n'est une racine de l'unité (Deligne), la suite spectrale de Hochschild-Serre donne que les applications de $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini

$$H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))^G$$

et

$$H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)) \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^G$$

sont surjectives à noyau fini (cf. [CTSS83, Théorème 2, p.780]).

Si $\mathrm{cl}(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est la classe d'une section hyperplane L de X, le théorème de Lefschetz difficile dit que le cup-produit par $\mathrm{cl}(L)^{d-2}$ définit un homomorphisme G-équivariant $H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$ à noyau et conoyau fini.

La combinaison de ces résultats donne que la flèche

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

a son conoyau fini. □

Lemme 5.3. *Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, $X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{F}}$ une variété projective et lisse intègre de dimension d, $Y \subset X$ une section hyperplane, et $U \subset X$ l'ouvert complémentaire.*

(i) Soit M le faisceau étale sur U associé à un module galoisien fini sur $\mathbb{F}$. Alors pour tout $i \geq d+2$, on a $H^i(U, M) = 0$.

(ii) Si $d \geq 4$ et n est premier à la caractéristique de $\mathbb{F}$, alors l'application

$$H^{2d-4}(Y, \mu_n^{\otimes(d-1)}) \to H^{2d-2}(X, \mu_n^{\otimes d})$$

induite par l'isomorphisme de pureté

$$H^{2d-4}(Y, \mu_n^{\otimes(d-1)}) \simeq H^{2d-2}_Y(X, \mu_n^{\otimes d})$$

est surjective.

Démonstration. Comme $\mathrm{cd}(\mathbb{F}) = 1$, la suite spectrale

$$H^p(\mathbb{F}, H^q(\overline{U}, M)) \Longrightarrow H^{p+q}(U, M)$$

donne des suites exactes courtes

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^{i-1}(\overline{U}, M)) \to H^i(U, M) \to H^i(\overline{U}, M)^G \to 0,$$

où G est le groupe de Galois absolu de $\mathbb{F}$. Comme $\overline{U}$ est affine et M est fini, par le théorème de Lefschetz affine on a $H^i(\overline{U}, M) = 0$ pour $i \geq d+1$. Ceci démontre (i). La partie (ii) suit de (i) pour $i = d-1$ et $M = \mu_n^{\otimes(d-1)}$, en utilisant la suite de Gysin. □

Proposition 5.4. *Pour établir la conjecture 5.1 pour toute variété de dimension $d \geq 3$, il suffit de le faire pour toute variété de dimension $d = 3$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $d \geq 3$. Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse et géométriquement intègre de dimension $d \geq 4$. Par le théorème de Bertini sur les corps finis [Poo04], il existe une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ et une section hyperplane Y de X qui est lisse et géométriquement intègre de dimension $d-1$. Pour tout $n \geq 1$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^{d-2}(Y)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-4}(Y, \mu_{\ell^n}^{\otimes(d-2)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^{d-1}(X)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-2}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes(d-1)}). \end{array}$$

On passe à la limite projective sur n. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n CH^{d-2}(Y)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-4}(Y, \mathbb{Z}_\ell(d-2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_n CH^{d-1}(X)/\ell^n & \longrightarrow & H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1)). \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence, la flèche horizontale en haut est surjective. D'après le lemme 5.3(ii), la flèche verticale à droite est surjective. On conclut que la flèche horizontale en bas est surjective. □

Remarque 5.5. Pour établir la conjecture 5.1 pour une variété X avec un plongement $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ donné, par un argument de normes, il suffit de l'établir sur des extensions finies $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ de degrés premiers entre eux. On peut donc se contenter d'utiliser le théorème de Bertini sur les corps finis "suffisamment" gros, et dans l'argument ci-dessus de prendre les sections hyperplanes pour le plongement donné. Ainsi, pour établir la conjecture 5.1 pour les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ pour $n \geq 4$, il suffit de l'établir pour les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}'}$ pour tout corps fini $\mathbb{F}'$. En caractéristique différente de 2, ceci est connu (voir [CT19a, Thm. 5.1]).

Remarque 5.6. Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur un corps fini. Pour démontrer la conjecture 5.1, il suffirait de montrer : pour X de dimension 3 et toute classe ξ dans $H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ il existe une section hyperplane lisse $Y \subset X$ telle que ξ soit supportée sur Y, c'est-à-dire telle que la restriction de ξ dans $H^4(U, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{U}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$ soit nulle.

Soit G un groupe profini. Pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-module M équipé d'une action continue de G, on note $M^{(1)} \subset M$ le sous-module formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de G.

Lemme 5.7. [CTK13, Lemme 4.1] *Si G est un groupe profini et M est un $\mathbb{Z}_\ell$-module M de type fini muni d'une action continue de G, alors le quotient $M/M^{(1)}$ est sans torsion.*

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini, $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et $G := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension d. Soit $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$. Pour tout entier $i \geq 0$, l'application cycle

$$CH^i(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

a son image dans le sous-groupe $H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{(1)}$.

Théorème 5.8. *(Schoen) Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis. Alors pour toute variété $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension d, l'image de l'application cycle*

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est le sous-groupe de $H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{(1)}$ formé des éléments dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de G.

Démonstration. Voir [Sch98, Theorem 0.5] et [CTS10]. □

Corollaire 5.9. *Soient k une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique p et X une k-variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension d. Soit ℓ un premier distinct de p. Si la conjecture de Tate vaut pour toutes les surfaces sur les corps finis, alors :*

(i) Le conoyau de l'application cycle

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini sans torsion.

(ii) Si $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ *est fini, l'application cycle*

$$CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est surjective.

Démonstration. Comme expliqué dans la démonstration de [CTK13, Prop. 4.2], la combinaison du théorème 5.8 et du lemme 5.7 donne l'énoncé (i).

Montrons (ii). On procède comme à la proposition 5.2. Sous l'hypothèse de finitude du groupe de Brauer, le module de Tate $T_\ell(\mathrm{Br}(X))$ est nul, et l'application cycle

$$CH^1(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(X,\mathbb{Z}_\ell(1))$$

est surjective ; voir [Gro68, (8.7)]. Soit $L\in CH^1(X)$ la classe d'un diviseur ample. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^1(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\mathrm{cl}} & H^2(X,\mathbb{Z}_\ell(1)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \cap L^{d-2}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \cap\, \mathrm{cl}(L)^{d-2}} \\ CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\mathrm{cl}} & H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_\ell(d-1)). \end{array}$$

D'après le théorème de Lefschetz difficile, l'homomorphisme vertical de droite devient un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}_\ell$. Il s'ensuit que la flèche

$$CH^{d-1}(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X,\mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

a un conoyau fini. L'énoncé (i) assure alors la nullité de ce conoyau. □

Théorème 5.10. [Kah12, Thm. 1.1], [CTK13, Thm. 2.2] *Soit* k *un corps fini ou un corps algébriquement clos. Soit* X *une* k*-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit* $k(X)$ *son corps des fonctions rationnelles. Soit* ℓ *premier distinct de la caractéristique de* k*. Les deux groupes suivants sont finis et sont isomorphes entre eux :*

(i) Le quotient du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X),\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ *par son sous-groupe divisible maximal.*

(ii) Le sous-groupe de torsion du $\mathbb{Z}_\ell$*-module de type fini conoyau de l'application cycle*

$$CH^2(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

En dimension 3, la combinaison de ce résultat et des corollaires du théorème de Schoen donne :

Corollaire 5.11. [CTK13, Prop. 4.2, Prop. 3.2] *Soient* k *une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique* p *et* X *une* k*-variété projective et lisse, géométriquement connexe, de dimension* 3*. Soit* ℓ *un premier distinct de* p*. Supposons vraie la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis. Alors :*

(i) Le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X),\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ *est un groupe divisible.*

(ii) Si de plus il existe une surface projective et lisse S/k*, et un* k*-morphisme* $S\to X$ *tel que pour tout corps algébriquement clos* Ω *contenant* k *l'application induite* $CH_0(S_\Omega)\to CH_0(X_\Omega)$ *est surjective, alors* $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X),\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))=0$.

Démonstration. D'après le théorème 5.10, le quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X),\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal s'identifie au sous-groupe de torsion du conoyau de

$$CH^2(X)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Mais sous l'hypothèse sur la conjecture de Tate, le corollaire 5.9 assure que ce conoyau n'a pas de torsion. Ceci établit (i).

Dans la situation de (ii), l'hypothèse sur les groupes de Chow de dimension zéro et un argument de correspondances bien connu [CTK13, Prop. 3.2] implique que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par un entier $N > 0$. Comme le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est divisible, il est nul. □

Remarque 5.12. Sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, soit $X = E \times S$ le produit d'une courbe elliptique E et d'une surface d'Enriques. Pour $s \in S(\mathbb{C})$ fixé, l'inclusion $E \to X$ donnée par $m \mapsto (m, s)$ satisfait que $CH_0(C_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ est surjectif pour tout corps algébriquement clos Ω contenant $\mathbb{C}$. Ceci implique que le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est d'exposant fini, et donc est fini. Mais il existe de tels couples (E, S) pour lesquels le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(2))$ est non nul et la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 n'est pas satisfaite [BO18, CT19b]. La situation sur le corps des complexes est donc différente de celle des corollaires (conditionnels) 5.9 et 5.11. Voir aussi [CTS10].

6. Remerciements

Federico Scavia bénéficie d'une bourse d'études de University of British Columbia. Il remercie le Département de Mathématiques d'Orsay (Université Paris Saclay) pour son hospitalité pendant l'automne 2019. Cette recherche a été rendue possible grâce au financement qui lui a été fourni par Mitacs.

Références

[ACP17] Asher Auel, Jean-Louis Colliot-Thélène and R. Parimala. Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane. *Brauer groups and obstruction problems*, 29–55, Progr. Math., 320, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. 7, 21

[BO18] Olivier Benoist and John Christian Ottem. Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero. *arXiv preprint arXiv :1802.01845. Accepted by Comm. Math. Helv.*, 2018. 2, 3, 6, 25, 31

[Bla82] Piotr Blass. Unirationality of Enriques surfaces in characteristic two. *Compositio mathematica* 45(3) (1982) 383–398. 7

[Blo76] Spencer Bloch. Some elementary theorems about algebraic cycles on Abelian varieties. *Invent. math.* 37 (1976), no. 3, 215-228. 19

[Blo79] Spencer Bloch. Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman. Compositio mathematica 39 (1979), no. 1, 107–127. 19, 23

[BKL76] S. Bloch, A. Kas and D. Lieberman. Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$. *Compositio mathematica* 33(2) : 135–145, 1976. 7

[CT83] Jean-Louis Colliot-Thélène. Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces. *Inventiones mathematicae*, 71(1) : 1–20, 1983. 22

[CT93] Jean-Louis Colliot-Thélène. Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–49. Springer, Berlin, 1993. 7, 8

[CT95] Jean-Louis Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. 3, 24

[CT15] Jean-Louis Colliot-Thélène. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques, d'après S. Saito, K. Sato et al. Séminaire Bourbaki, 62ème année, 2009-2010, n. 2012, 1–30, *Astérisque* 339, 2011. 24

[CT19a] Jean-Louis Colliot-Thélène. Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano, *Tunisian Journal of Mathematics*, 1(1) : 47–57, 2019. 29

[CT19b] Jean-Louis Colliot-Thélène. Cohomologie non ramifiée dans le produit avec une courbe elliptique. *Manuscripta math.*, 160(3-4) : 561–565, 2019. 2, 31

[CTK13] Jean-Louis Colliot-Thélène et Bruno Kahn. Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis. *J. K-Theory*, 11(1) : 1–53, 2013. 2, 3, 5, 20, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 31

[CTR85] Jean-Louis Colliot-Thélène and Wayne Raskind. K_2-cohomology and the second Chow group. *Mathematische Annalen*, 270(2) : 165–199, 1985. 5, 21, 22

[CTS10] Jean-Louis Colliot-Thélène et Tamás Szamuely. Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis. In *The geometry of algebraic cycles*, volume 9 of *Clay Math. Proc.*, pages 83–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. 29, 31

[CTSS83] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc et Christophe Soulé. Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. *Duke Math. J.*, 50(3) : 763–801, 1983. 3, 5, 7, 8, 9, 10, 27

[CTSk21] Jean-Louis Colliot-Thélène and Alexei N. Skorobogatov. The Brauer–Grothendieck group. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, 2021 13, 24

[CTSz10] Jean-Louis Colliot-Thélène, Tamás Szamuely. Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis. *The geometry of algebraic cycles*, 83–98, Clay Math. Proc., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. 2

[CTV12] Jean-Louis Colliot-Thélène et Claire Voisin. Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière. *Duke Math. J.* 161 (2012), no. 5, 735–801. 2, 22, 25

[EM75] Shizuo Endô and Takehiko Miyata. On a classification of the function fields of algebraic tori. *Nagoya Math. J.*, 56 : 85–104, 1975. 10, 11

[Ful98] William Fulton. *Intersection theory.* Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 2. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+470 pp.. 15

[GS88] M. Gros et N. Suwa, Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques, *Duke Math. J.*, 579–613, 1988. 22

[Gro68] Alexander Grothendieck. Le groupe de Brauer. III. Exemples et compléments. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 88–188. North-Holland, Amsterdam, 1968. 12, 24, 30

[GS17] P. Gille and T. Szamuely. Central Simple Algebras and Galois Cohomology, Second Edition. Cambridge studies in advanced mathematics **165**, 2017. 13

[GO13] Sergey Gorchinskiy and Dmitri Orlov. Geometric phantom categories. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 117 (2013), 329-349. 3

[IM79] H. Inose and M. Mizukami. Rational equivalence of 0-cycles on some surfaces of general type with $p_g = 0$. *Math. Ann.* 244 (1979), no. 3, 205-217. 7

[Kah12] Bruno Kahn. Classes de cycles motiviques étales. *Algebra & Number Theory*, 6(7) : 1369–1407, 2012. 2, 30

[Kah17] Bruno Kahn. Torsion order of smooth projective surfaces. With an appendix by J.-L. Colliot-Thélène. *Comment. Math. Helv.* 92 (2017), no. 4, 839-857. 21

[Kato86] Kazuya Kato. A Hasse principle for two-dimensional global fields. *J. reine angew. Math.*, 366 ; 142–181, 1986. 3, 5

[Lan83] William E. Lang. On Enriques surfaces in characteristic p. I *Math. Ann.* 265 (1983) 45–65. 7

[MS82] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin. K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) : 1011–1046, 1135–1136, 1982. 9, 22

[Mil80] J. S. Milne. *Étale Cohomology.* Princeton University Press, 1980. 12, 25

[Mil82] J. S. Milne. Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojtman's theorem. *Compositio mathematica*, 47(3) : 271–287, 1982. 19

[Pir11] Alena Pirutka. Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis. *Algebra & Number Theory*, 5(6) : 803–817, 2011. 3

[Pir16] Alena Pirutka. Sur la cohomologie non ramifiée en degré trois d'un produit. *Bull. Soc. Math. France*, 144(1) : 53–75, 2016. 3

[PS16] Raman Parimala and Venapally Suresh. Degree 3 cohomology of function fields of surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) : 4341–4374, 2016. 3

[Poo04] Bjorn Poonen. Bertini theorems over finite fields. *Ann. of Math.* (2) 160 (2004), no. 3, 1099–1127. 28

[Ras89] Wayne Raskind. Torsion algebraic cycles on varieties over local fields. In *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, volume 279 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 343–388. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989. 22

[Roj80] A. A. Rojtman. The torsion of the group of $0-$cycles modulo rational equivalence. *Ann. of Math.* (2) 111 (1980), no. 3, 553–569. 19, 23

[SS10] Kanetomo Sato and Shuji Saito. A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields. *Ann. of Math.* (2) 172 : 1593–1639, 2010, no. 3. 24

[Sch98] Chad Schoen. An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields. *Math. Ann.*, 311(3) :493–500, 1998. 29

[SZ14] Alexei N. Skorobogatov and Yuri G. Zarhin. The Brauer group and the Brauer-Manin set of products of varieties. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(4) :749–768, 2014. 13

[Tate94] John Tate. Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology. *Motives* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55.1, pages 71–83, American Mathematical Society, 1994. 27

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: jlct@math.u-psud.fr

Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC V6T 1Z2, Canada

Email address: scavia@math.ubc.ca