

# Descente galoisienne sur le groupe de Brauer

Jean-Louis Colliot-Thélène et Alexei N. Skorobogatov

soumis le 21 juillet 2011

## Résumé

Soit  $X$  une variété projective et lisse sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Le groupe de Brauer de  $X$  s'envoie dans les invariants, sous le groupe de Galois absolu de  $k$ , du groupe de Brauer de la même variété considérée sur une clôture algébrique de  $k$ . Nous montrons que le quotient est fini. Sous des hypothèses supplémentaires, par exemple sur un corps de nombres, nous donnons des estimations sur l'ordre de ce quotient. L'accouplement d'intersection entre les groupes de diviseurs et de 1-cycles modulo équivalence numérique joue ici un rôle important.

## Abstract

For a smooth and projective variety  $X$  over a field  $k$  of characteristic zero we prove the finiteness of the cokernel of the natural map from the Brauer group of  $X$  to the Galois-invariant subgroup of the Brauer group of the same variety over an algebraic closure of  $k$ . Under further conditions, e.g. over a number field, we give estimates for the order of this cokernel. We emphasise the rôle played by the exponent of the discriminant groups of the intersection pairing between the groups of divisors and curves modulo numerical equivalence.

MSC-class : 14F22 ; 14G99, 14C25, 16K50

## Introduction

Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Soient  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$  et  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ . On a l'application naturelle de groupes de Brauer :

$$\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\bar{X}).$$

Le noyau de cette application, noté  $\text{Br}_1(X)$ , est appelé groupe de Brauer *algébrique* de  $X$ . L'image de cette application est appelé groupe de Brauer *transcendant* de  $X$ . C'est un sous-groupe du groupe des invariants  $\text{Br}(\overline{X})^\Gamma$ . On a donc l'inclusion

$$\text{Br}(X)/\text{Br}_1(X) \subset \text{Br}(\overline{X})^\Gamma.$$

On voudrait calculer ces groupes, en particulier en vue de l'étude de l'obstruction de Brauer–Manin. La double question suivante a été soulevée dans [20] et [2].

*Si  $k$  est un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , chacun des groupes  $\text{Br}(X)/\text{Br}_1(X)$  et  $\text{Br}(\overline{X})^\Gamma$  est-il un groupe fini ?*

Dans cet article nous montrons que cette double question se réduit à une seule question.

Pour  $X$  une variété projective, lisse, et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique zéro, nous montrons que le conoyau de l'application naturelle

$$\alpha : \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma$$

est un groupe fini. Si  $H^1(X, O_X) = 0$ , ou si  $k$  est un corps de nombres, nous donnons des estimations pour l'exposant et l'ordre de ce groupe fini.

Notre principal outil est un complexe naturel (voir le paragraphe 1.3)

$$\text{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \text{Br}(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\beta} H^2(k, \text{Pic}(\overline{X}))$$

qui pour  $X$  avec un point rationnel ou pour  $k$  un corps de nombres est une suite exacte. Nous étudions l'image (finie) de  $\beta$  par deux méthodes différentes, qui mènent à des estimations similaires mais non identiques.

La première méthode fait l'objet du paragraphe 2. L'idée principale est d'utiliser la functorialité du complexe ci-dessus par rapport aux morphismes de  $k$ -variétés et d'utiliser la trivialité du groupe de Brauer des courbes sur un corps algébriquement clos (théorème de Tsen). Cela montre que la restriction de l'image de  $\beta$  à toute courbe fermée dans  $X$  est nulle. Ceci mène au théorème principal, le théorème 2.1 et, sous des hypothèses supplémentaires, à des bornes explicites (théorème 2.2).

La deuxième méthode utilise une remarque générale sur les différentielles dans la suite spectrale des foncteurs composés. Soit  $\text{Br}^0(\overline{X})$  le sous-groupe

divisible maximal de  $\text{Br}(\overline{X})$ , et soit  $\text{NS}(\overline{X})$  le groupe de Néron–Severi. Nous montrons que l’application composée

$$\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \hookrightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\beta} \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow \text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{X})/\text{tors})$$

peut se lire comme l’homomorphisme de connexion associé à une certaine 2-extension naturelle de  $\Gamma$ -modules obtenue à partir de la suite de Kummer (voir le corollaire 3.5). D’après un théorème de Lieberman rappelé au paragraphe 1.1, équivalence numérique et équivalence homologique coïncident sur les cycles algébriques de dimension 1. (Pour les surfaces, le théorème de Lieberman est un résultat classique de Matsusaka.) Nous utilisons ce fait pour montrer à la proposition 4.1 que l’image de l’application composée ci-dessus est annulée par l’exposant de chacun des deux groupes discriminants définis par l’accouplement d’intersection entre les groupes de diviseurs et les groupes de 1-cycles sur  $\overline{X}$ , modulo équivalence numérique. Les bornes pour le conoyau de  $\alpha$  obtenues par cette méthode, sous des hypothèses supplémentaires, sont données aux théorèmes 4.2 et 4.3.

Au paragraphe 5 nous donnons des applications aux surfaces K3 et aux produits de deux courbes. Pour toute telle surface avec un  $k$ -point, l’énoncé est particulièrement simple : le conoyau de  $\alpha$  est annulé par l’exposant du groupe discriminant défini par la forme d’intersection sur  $\text{NS}(\overline{X})$ , voir les propositions 5.1 et 5.2.

T. Szamuely a demandé si le résultat de finitude du théorème 2.1 vaut encore pour les variétés lisses quasi-projectives. Au paragraphe 6 nous donnons une réponse affirmative lorsque le corps de base  $k$  est un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$ .

Ce travail a été commencé lors de la conférence “Arithmetic of surfaces” qui s’est tenue au Centre Lorentz à Leiden en Octobre 2010. Nous en remercions les organisateurs. Nous remercions L. Illusie, B. Kahn, J. Riou pour leur aide concernant le paragraphe 1.1, et T. Szamuely pour sa question.

## 1 Préliminaires

Soient  $k$  un corps de caractéristique zéro,  $\overline{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{k}/k)$  le groupe de Galois absolu de  $k$ .

Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur  $k$ , de dimension  $d$ . Soit  $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ .

Pour un groupe abélien  $A$  et  $n > 0$  un entier, on note  $A[n] \subset A$  le sous-groupe des éléments annulés par  $n$ . Pour  $\ell$  un nombre premier on note  $A\{\ell\} \subset A$  le sous-groupe de torsion  $\ell$ -primaire.

## 1.1 Cycles algébriques

Pour tout entier  $i$  avec  $0 \leq i \leq d$ , soit  $\mathrm{CH}^i(\overline{X})$  le groupe de Chow des cycles de codimension  $i$  sur  $\overline{X}$ , c'est-à-dire le groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers de sous-variétés fermées irréductibles de codimension  $i$  modulo l'équivalence rationnelle. Comme  $X$  est lisse, on a  $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{CH}^1(\overline{X})$ . Soit  $\mathrm{NS}(\overline{X})$  le groupe de Néron–Severi de  $\overline{X}$ . C'est le quotient de  $\mathrm{Pic}(\overline{X})$  par son sous-groupe divisible maximal  $\mathrm{Pic}^0(\overline{X})$ , groupe des  $\bar{k}$ -points de la variété de Picard de  $X$ .

Puisque  $X$  est projective, l'intersection définit une forme bilinéaire  $\Gamma$ -équivariante

$$\mathrm{CH}^i(\overline{X}) \times \mathrm{CH}^{d-i}(\overline{X}) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Soit  $N^i = \mathrm{Num}^i(\overline{X})$  le groupe des cycles de codimension  $i$  sur  $\overline{X}$  modulo équivalence numérique. C'est le quotient de  $\mathrm{CH}^i(\overline{X})$  par le noyau (à gauche) de l'accouplement (1). Écrivons  $N_i = N^{d-i}$ . Nous obtenons une forme bilinéaire  $\Gamma$ -équivariante

$$N^i \times N_i \rightarrow \mathbb{Z} \quad (2)$$

dont les noyaux à gauche et à droite sont triviaux. Pour tout  $i \geq 0$  le groupe abélien  $N^i$  est libre de type fini. Ceci résulte de l'existence d'une cohomologie de Weil, à coefficients dans un corps de caractéristique zéro et munie d'applications classe de cycle pour lesquelles le cup-produit en cohomologie est compatible avec l'intersection des cycles [9, Thm. 3.5, p. 379].

Pour  $i = 1$ , l'accouplement (2) donne naissance à la suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow \mathrm{Hom}(N_1, \mathbb{Z}) \rightarrow D \rightarrow 0, \quad (3)$$

qui définit le  $\Gamma$ -module fini  $D$ . Ce groupe est l'un des deux groupes discriminants associés à l'accouplement  $N^1 \times N_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Pour tout  $i \geq 0$  on dispose des applications classe de cycle

$$\mathrm{CH}^i(\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i)),$$

voir [12, Section VI.9] et [19, Cycle]. Ces applications transforment cup-produit en cohomologie  $\ell$ -adique en intersection des cycles algébriques, voir

[12, Prop. VI.9.5]. Introduisons les  $\Gamma$ -modules

$$N_\ell^i = N^i \otimes \mathbb{Z}_\ell, \quad N_{i,\ell} = N_i \otimes \mathbb{Z}_\ell, \quad H_\ell^{2i} = H_{\text{ét}}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(i))/\text{tors}.$$

Pour toute théorie cohomologique à coefficients dans un corps de caractéristique zéro, avec applications classe de cycle compatibles avec le cup-produit en cohomologie, l'équivalence homologique implique l'équivalence numérique. Selon les "conjectures standards", pour toute bonne théorie cohomologique, équivalence homologique et équivalence numérique devraient coïncider. Dans le contexte de la cohomologie  $\ell$ -adique, l'application classe de cycle devrait se factoriser de la façon suivante :

$$\text{CH}^i(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow N_\ell^i \hookrightarrow H_\ell^{2i}. \quad (4)$$

C'est le cas pour  $i = 1$  par un théorème classique de Matsusaka [11], qui montra  $N^1 = \text{NS}(\overline{X})/\text{tors}$ .

Pour la cohomologie de Betti, avec applications classe de cycle

$$\text{CH}^i(X) \rightarrow H_{\text{Betti}}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(i)),$$

où  $\mathbb{Z}(i) = \mathbb{Z}(2\pi\sqrt{-1})^{\otimes i}$ , ceci fut établi pour  $i = d-1$  par Lieberman [10, Cor. 1]. Une version plus algébrique de la démonstration fut donnée par Kleiman [9, Remark 3.10]. Ces deux articles établissent des résultats pour d'autres valeurs de  $i$ , et pour cela font appel au théorème de l'indice de Hodge. Le cas  $i = d-1$  est plus simple, comme nous expliquons maintenant.

**Proposition 1.1** *Soit  $X$  une variété connexe, projective et lisse sur  $\mathbb{C}$ . Définissons l'équivalence homologique sur les cycles au moyen de la cohomologie de Betti à coefficients rationnels. L'homomorphisme naturel*

$$\text{CH}_1(X)/\text{hom} \longrightarrow \text{CH}_1(X)/\text{num}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On peut supposer  $d = \dim(X) \geq 3$ . Soit  $L \in \text{CH}^1(X)$  la classe d'une section hyperplane. Pour  $A$  un groupe abélien, on note  $A_{\mathbb{Q}} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . La multiplication par  $L^{d-2} \in \text{CH}^{d-2}(X)$  définit un diagramme commutatif d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{Q}$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{CH}^{d-1}(X)_{\mathbb{Q}}/\text{num} & \leftarrow & \text{CH}^{d-1}(X)_{\mathbb{Q}}/\text{hom} & \hookrightarrow & \text{Hdg}^{2d-2}(X, \mathbb{Q}) & \hookrightarrow & H^{2d-2}(X, \mathbb{Q}(d-1)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}/\text{num} & \leftarrow & \text{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}/\text{hom} & \hookrightarrow & \text{Hdg}^2(X, \mathbb{Q}) & \hookrightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}(1)). \end{array}$$

Les flèches horizontales pointant vers la gauche sont surjectives. Toutes les flèches horizontales pointant vers la droite sont par définition injectives. D'après le théorème de Lefschetz difficile, la quatrième flèche verticale est un isomorphisme. La décomposition de Hodge des groupes  $H^i(X, \mathbb{C})$  et le fait que les classes de type  $(p, q)$  s'envoient sur des classes de type  $(p+d-2, q+d-2)$  pour  $p = 0, 1, 2$  implique alors que la troisième flèche verticale, qui porte sur les classes de Hodge, est un isomorphisme. Par le théorème de Lefschetz sur les classes de type  $(1, 1)$ , l'application  $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}/\mathrm{hom} \rightarrow \mathrm{Hdg}^2(X, \mathbb{Q})$  est un isomorphisme. Tout ceci implique que la deuxième flèche verticale est aussi un isomorphisme. La flèche verticale de gauche est donc surjective. Par définition, les deux espaces vectoriels de dimension finie  $\mathrm{CH}^1(X)_{\mathbb{Q}}/\mathrm{num}$  et  $\mathrm{CH}^{d-1}(X)_{\mathbb{Q}}/\mathrm{num}$  ont la même dimension. La flèche verticale de gauche est donc un isomorphisme. D'après le théorème de Matsusaka, la flèche inférieure gauche est un isomorphisme. On conclut que l'application

$$\mathrm{CH}^{d-1}(X)_{\mathbb{Q}}/\mathrm{hom} \rightarrow \mathrm{CH}^{d-1}(X)_{\mathbb{Q}}/\mathrm{num}$$

est un isomorphisme. Ceci implique que l'application

$$\mathrm{CH}^{d-1}(X)/\mathrm{hom} \rightarrow \mathrm{CH}^{d-1}(X)/\mathrm{num}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens de type fini sans torsion. QED

Rappelons maintenant comment divers théorèmes de comparaison impliquent (4) pour  $i = d - 1$ , où  $X$  est une variété projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Rappelons que pour un corps algébriquement clos  $L$  contenant  $k$  le groupe de Néron–Severi de  $X_L = X \times_k L$  ne dépend pas du corps  $L$ , car c'est le groupe des composantes connexes du schéma de Picard  $\mathrm{Pic}_{X_L/L}$ . Nous pouvons donc utiliser la notation  $N^1$  sans risque d'ambiguïté.

Soit  $C$  un 1-cycle sur  $\bar{X}$  qui est numériquement équivalent à zéro. Il existe un sous-corps  $K \subset \bar{k}$  de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , une variété  $\tilde{X}$  sur  $K$ , et un 1-cycle  $\tilde{C}$  sur  $\tilde{X}$  tel que  $X = \tilde{X} \times_K \bar{k}$  et  $C = \tilde{C} \times_K \bar{k}$ . On peut supposer que le groupe de type fini  $N^1$  est engendré par les classes de diviseurs effectifs, réduits, absolument irréductibles  $D_1, \dots, D_r$  définis sur  $K$ . Choisissons un plongement  $K \subset \mathbb{C}$ . Soit  $\bar{K}$  la clôture algébrique de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ , et soient  $\tilde{X}_{\bar{K}} = \tilde{X} \times_K \bar{K}$ ,  $\tilde{X}_{\mathbb{C}} = \tilde{X} \times_K \mathbb{C}$ . Le cycle  $C$  a une image nulle dans  $N_1 = \mathrm{Num}_1(\bar{X})$  si et seulement si  $C$  a une intersection nulle avec  $D_1, \dots, D_r$ . Mais alors  $\tilde{C}$  a une image nulle dans  $\mathrm{Num}_1(\tilde{X}_{\mathbb{C}})$ . D'après la proposition 1.1, le cycle  $\tilde{C}$  a une image nulle dans le groupe de cohomologie de Betti  $H^{2d-2}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(d-1))$ .

Le théorème de comparaison entre la cohomologie étale et la cohomologie de Betti ([18, XI, XVI], voir aussi [12, Thm. III.3.12]) donne des isomorphismes naturels

$$H_{\text{ét}}^{2i}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_{\ell}(i)) \cong H_{\text{Betti}}^{2i}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(i)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{\ell}.$$

Les applications classe de cycle transforment cup-produit en cohomologie en accouplement d'intersection sur les groupes de Chow.

Partant de cela, on peut montrer que l'application classe de cycle en cohomologie de Betti et l'application classe de cycle en cohomologie  $\ell$ -adique sont compatibles avec ces isomorphismes. Une esquisse de démonstration est donnée dans [3, p. 21]. J. Riou nous a montré comment une preuve formelle se déduit de l'énoncé d'unicité pour les applications classe de cycle que l'on trouve dans [17, Prop. 1.2].

Puisque l'application naturelle

$$H_{\text{ét}}^{2d-2}(\tilde{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell}(d-1)) \longrightarrow H_{\text{ét}}^{2d-2}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_{\ell}(d-1))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{Q}_{\ell}$  (cf. [12, Cor. VI.4.3]), l'application classe de cycle envoie  $\tilde{C}$  sur zéro dans  $H_{\text{ét}}^{2d-2}(\tilde{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell}(d-1))$ . Par changement de corps de base de  $\bar{K}$  à  $\bar{k}$ , on obtient (4) for  $i = d - 1$ .

Comme rappelé ci-dessus, l'accouplement (1) est compatible avec le cup-produit

$$H_{\text{ét}}^{2i}(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(i)) \times H_{\text{ét}}^{2d-2i}(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(d-i)) \rightarrow \mathbb{Z}_{\ell}$$

via l'application classe de cycle. Nous obtenons donc le diagramme commutatif d'accouplements de  $\Gamma$ -modules

$$\begin{array}{ccc} N^1 & \times & N_1 & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\ell}^2 & \times & H_{\ell}^{2d-2} & \rightarrow & \mathbb{Z}_{\ell} \end{array} \quad (5)$$

où les applications verticales sont injectives. Nous utiliserons l'énoncé suivant : l'accouplement inférieur dans (5) est un accouplement parfait, c'est-à-dire qu'il induit des isomorphismes

$$H_{\ell}^2 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_{\ell}}(H_{\ell}^{2d-2}, \mathbb{Z}_{\ell}), \quad H_{\ell}^{2d-2} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_{\ell}}(H_{\ell}^2, \mathbb{Z}_{\ell}).$$

L. Illusie nous informe que cet énoncé peut être établi en utilisant le formalisme  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -adique de Deligne [4, §1.1]. La dualité de Poincaré pour le complexe

$R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$  (voir [18, XVIII]) donne naissance à une dualité parfaite pour les complexes parfaits  $R\Gamma(X, \mathbb{Z}_\ell)$ . On utilise ensuite un argument de type coefficients universels. Pour une démonstration détaillée, on consultera le récent article de Yu. I. Zarhin [23].

La suite (3) donne naissance à la suite exacte

$$0 \rightarrow N_\ell^1 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(N_{1,\ell}, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow D\{\ell\} \rightarrow 0, \quad (6)$$

où la seconde flèche se factorise de la façon suivante :

$$N_\ell^1 \rightarrow H_\ell^2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(H_\ell^{2d-2}, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(N_{1,\ell}, \mathbb{Z}_\ell).$$

## 1.2 Le groupe de Brauer

Rappelons le calcul du groupe de Brauer  $\mathrm{Br}(\overline{X})$  (Grothendieck, [5, III.8, p. 144-147]). Soit  $\rho = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Q})$  le nombre de Picard de  $\overline{X}$ , et soit  $b_2$  le second nombre de Betti de  $\overline{X}$ . Notons  $\mathrm{Br}^0(\overline{X})$  le sous-groupe divisible maximal de  $\mathrm{Br}(\overline{X})$ . On a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{Br}^0(\overline{X}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho}.$$

Le quotient  $\mathrm{Br}(\overline{X})/\mathrm{Br}^0(\overline{X})$  est fini, plus précisément il y a une suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X}) \rightarrow \bigoplus_{\ell} \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\mathrm{tors}} \rightarrow 0, \quad (7)$$

où  $\ell$  parcourt l'ensemble des nombres premiers.

Soit  $B_\ell$  le module de Tate  $\ell$ -adique de  $\mathrm{Br}(\overline{X})$ , que l'on définit comme la limite projective des  $\mathrm{Br}(\overline{X})[\ell^m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . C'est un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de type fini. Le module galoisien  $B_\ell$  ne contrôle que le sous-groupe divisible maximal  $\mathrm{Br}^0(\overline{X}) \subset \mathrm{Br}(\overline{X})$ , en ce sens que  $B_\ell$  est aussi isomorphe au module de Tate de  $\mathrm{Br}^0(\overline{X})$ , et qu'il y a un isomorphisme canonique de  $\Gamma$ -modules (cf. [5, II.8.1, p. 144]) :

$$\mathrm{Br}^0(\overline{X}) \cong \bigoplus_{\ell} (B_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell).$$

La suite de Kummer

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1 \quad (8)$$

donne naissance aux suites exactes de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})/\ell^m \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mu_{\ell^m}) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})[\ell^m] \rightarrow 0.$$

Puisque le groupe divisible  $\text{Pic}^0(\overline{X})$  a une image nulle dans  $H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mu_{\ell^m})$ , on a des suites exactes induites :

$$0 \rightarrow \text{NS}(\overline{X})/\ell^m \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mu_{\ell^m}) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})[\ell^m] \rightarrow 0.$$

En passant à la limite projective sur  $m \in \mathbb{N}$ , on obtient la suite exacte (8.7) de [5, III.8.2] :

$$0 \rightarrow \text{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_{\ell} \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1)) \rightarrow B_{\ell} \rightarrow 0. \quad (9)$$

La deuxième flèche dans (9) induit un isomorphisme sur les groupes de torsion :

$$(\text{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_{\ell})_{\text{tors}} = H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1))_{\text{tors}}.$$

On a donc la suite exacte de  $\mathbb{Z}_{\ell}[\Gamma]$ -modules, libres et de type fini comme  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -modules :

$$0 \rightarrow N_{\ell}^1 \rightarrow H_{\ell}^2 \rightarrow B_{\ell} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Comme suite de  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -modules, cette suite est scindée. En particulier, pour tout premier  $\ell$  le  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -sous-module  $N_{\ell}^1 \subset H_{\ell}^2$  est primitif, en ce sens que le quotient  $H_{\ell}^2/N_{\ell}^1$  est sans torsion.

Tensorisant (10) avec  $\mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}$  et prenant la somme directe sur tous les premiers  $\ell$ , nous obtenons une suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow N^1 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{\ell} (H_{\ell}^2 \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow 0,$$

qui donne naissance à une 2-extension de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow N^1 \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \bigoplus_{\ell} (H_{\ell}^2 \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow 0. \quad (11)$$

On utilisera plus loin le lemme facile suivant.

**Lemme 1.2** *Soit  $F$  un groupe abélien fini  $\ell$ -primaire, et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $A$  un sous-quotient fini de  $(\mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell})^n \oplus F$ . Si l'exposant de  $A$  est  $\ell^m$ , alors l'ordre de  $A$  divise le produit de  $\ell^{mn}$  par l'ordre de  $F[\ell^m]$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $A$  est un quotient de  $(\mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell})^r \oplus F' \subset (\mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell})^n \oplus F$ , où  $F'$  est un groupe fini. Donc  $A$  est un quotient de  $F'/\ell^m$ . L'ordre de  $F'/\ell^m$  est égal à l'ordre de  $F'[\ell^m]$ , qui est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/\ell^m)^n \oplus F[\ell^m]$ . QED

### 1.3 Une suite exacte fondamentale

L'énoncé suivant est bien connu. Il joue un rôle-clé dans le présent article.

**Proposition 1.3** *Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps  $k$  de caractéristique zéro.*

(i) *Il y a un complexe naturel, fonctoriel en  $X$  et en  $k$  :*

$$\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

(ii) *Supposons  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = \overline{k}^*$ . Supposons de plus que l'application  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^3(k, \overline{k}^*) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$  est injective, ce qui est le cas si  $X$  possède un  $k$ -point ou si  $k$  est un corps de nombres. Alors le complexe ci-dessus est une suite exacte, et l'on a  $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$  et  $\mathrm{Coker}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$ .*

*Démonstration.* Ceci résulte de la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(k, \mathrm{H}_{\text{ét}}^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m). \quad (12)$$

Un  $k$ -point sur  $X$  définit une section de l'application  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^3(k, \overline{k}^*) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$ . Pour un corps de nombres  $k$ , on a  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^3(k, \overline{k}^*) = 0$ . QED

### 1.4 Restriction et corestriction

Le lemme suivant est certainement bien connu.

**Lemme 1.4** *Soit  $X$  un schéma sur un corps  $k$  de caractéristique nulle, et soit  $L \subset \overline{k}$  une extension finie de  $k$  de degré  $n$ . Il existe des homomorphismes naturels de restriction et de corestriction*

$$\mathrm{res}_{L/k} : \mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(X_L), \quad \mathrm{cores}_{L/k} : \mathrm{Br}(X_L) \rightarrow \mathrm{Br}(X),$$

et l'on a  $\mathrm{cores}_{L/k}(\mathrm{res}_{L/k}(x)) = nx$ . Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Br}(X) & \xrightarrow{\mathrm{res}_{L/k}} & \mathrm{Br}(X_L) & \xrightarrow{\mathrm{cores}_{L/k}} & \mathrm{Br}(X) \\ \alpha \downarrow & & \alpha_L \downarrow & & \alpha \downarrow \\ \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \hookrightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})^{\Gamma_L} & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Br}(\overline{X}) \end{array}$$

Ici  $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(\overline{k}/L)$ , et  $\sigma(x) = \sum \sigma_i(x)$ , où les  $\sigma_i \in \Gamma$  sont des représentants des classes  $\Gamma/\Gamma_L$ .

*Démonstration.* Rappelons la définition de  $\text{res}_{L/k}$  et  $\text{cores}_{L/k}$ . Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme fini et plat de  $k$ -schémas lisses connexes. Soit  $n$  le degré de  $f$ . On dispose alors de morphismes de faisceaux étales

$$\mathbb{G}_{m,X} \rightarrow f_* \mathbb{G}_{m,Y} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X}$$

définis sur les fibres par l'injection naturelle pour le premier, par la norme pour le second. Le morphisme composé est l'élévation à la puissance  $n$ . Le foncteur  $f_*$  de la catégorie des faisceaux étales sur  $Y$  dans la catégorie des faisceaux étales sur  $X$  est exact [12, Cor. II.3.6]. La suite spectrale de Leray donne donc un isomorphisme  $H_{\text{ét}}^p(X, f_* \mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^p(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$ . On obtient ainsi les applications

$$H_{\text{ét}}^p(X, \mathbb{G}_{m,X}) \xrightarrow{\text{res}} H_{\text{ét}}^p(Y, \mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\text{cores}} H_{\text{ét}}^p(X, \mathbb{G}_{m,X})$$

dont la composée est la multiplication par  $n$ .

Soit  $X$  un schéma sur un corps  $k$ . Soit  $L \subset \bar{k}$  un corps tel que  $[L : k] = n$ . Soit  $Y = X_L = X \times_k L$ . On a l'isomorphisme  $L \otimes_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} \bar{k}^n$ , dont les diverses composantes correspondent aux  $n$   $k$ -plongements de  $L$  dans  $\bar{k}$ .

Par changement de base de  $X$  à  $\bar{X}$ , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{ét}}^p(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\text{res}_{L/k}} & H_{\text{ét}}^p(X_L, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\text{cores}_{L/k}} & H_{\text{ét}}^p(X, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{ét}}^p(\bar{X}, \mathbb{G}_m) & \hookrightarrow & H_{\text{ét}}^p(\bar{X}, \mathbb{G}_m)^n & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^p(\bar{X}, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

où les applications dans la ligne inférieure sont le plongement diagonal et le produit. L'action du groupe de Galois  $\Gamma$  sur  $H_{\text{ét}}^p(\bar{X}, \mathbb{G}_m)^n$  est induite par l'action naturelle de  $\Gamma_L$  sur  $H_{\text{ét}}^p(\bar{X}, \mathbb{G}_m)$ . En passant aux sous-groupes  $\Gamma$ -invariants, et en prenant  $p = 2$ , on obtient l'énoncé du lemme. QED

## 2 Démonstration du théorème principal

### 2.1 Finitude

**Théorème 2.1** *Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Le conoyau de l'application naturelle  $\alpha : \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\bar{X})^\Gamma$  est fini.*

*Démonstration.* D'après le calcul de Grothendieck du groupe  $\text{Br}(\overline{X})$  que nous avons rappelé au paragraphe 1.2, pour toute puissance  $\ell^n$  d'un nombre premier  $\ell$  et tout sous-quotient  $B$  de  $\text{Br}(\overline{X})$  le sous-groupe  $B[\ell^n]$  est fini. Il suffit donc de montrer que le groupe  $\text{Coker}(\alpha)$  est d'exposant fini.

Pour cela on peut remplacer  $k$  par une extension finie. De fait, si  $L$  avec  $k \subset L \subset \overline{k}$ ,  $[L : k] = n$ , est une telle extension, il résulte du lemme 1.4 que l'on a des applications naturelles

$$\text{Coker}(\alpha) \rightarrow \text{Coker}(\alpha_L) \rightarrow \text{Coker}(\alpha),$$

dont la composée est la multiplication par  $n$ . Il suffit donc de montrer que  $\text{Coker}(\alpha_L)$  est d'exposant fini.

On peut en particulier supposer que  $X$  possède un  $k$ -point. D'après la proposition 1.3(ii) on a  $\text{Coker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$ . Montrons que  $\text{Im}(\beta)$  est d'exposant fini.

Si  $C$  est une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur  $k$  et si  $f : C \rightarrow X$  est un  $k$ -morphisme, les applications  $f^* : \text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{C})$  et  $f^* : \text{Br}(\overline{X}) \rightarrow \text{Br}(\overline{C})$  s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Br}(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\beta_X} & \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Br}(\overline{C})^\Gamma & \xrightarrow{\beta_C} & \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{C})). \end{array}$$

Le théorème de Tsen implique  $\text{Br}(\overline{C}) = 0$  ([5], Cor. 1.3, p. 90). Ainsi

(\*) *Pour tout  $k$ -morphisme  $f : C \rightarrow X$ , le groupe  $\text{Im}(\beta_X)$  est dans le noyau de l'application verticale droite du diagramme ci-dessus.*

L'application degré  $\text{Pic}(\overline{C}) \rightarrow \text{NS}(\overline{C}) = \mathbb{Z}$  donne naissance à la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(\overline{C}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{C}) \rightarrow \text{NS}(\overline{C}) \rightarrow 0.$$

On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \text{H}^2(k, \text{Pic}^0(\overline{X})) & \rightarrow & \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) & \rightarrow & \text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{X})) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{H}^2(k, \text{Pic}^0(\overline{C})) & \rightarrow & \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{C})) & \rightarrow & \text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{C})). \end{array} \quad (13)$$

La nullité de  $\text{H}^1(k, \mathbb{Z})$  donne le zéro à gauche dans la ligne inférieure.

Comme le corps  $k$  est infini, le théorème de Bertini [7] pour les sections hyperplanes des variétés projectives et lisses implique l'existence d'une courbe  $C \subset X$ , définie sur  $k$ , section linéaire de  $X$ , et qui est lisse et géométriquement connexe. Une combinaison du théorème de Bertini et du théorème de connexion de Zariski (voir [6, Lemme 2.10, p. 210]) montre alors que sur une clôture algébrique de  $k$ , l'image inverse via  $f : C \rightarrow X$  de tout revêtement fini étale connexe de  $X$  est connexe. Ceci implique en particulier que l'homomorphisme de variétés abéliennes  $\text{Pic}_{X/k}^0 \rightarrow \text{Pic}_{C/k}^0$  a un noyau trivial.

Par le théorème de complète réductibilité de Poincaré [15, §19, Thm. 1] il existe donc une sous-variété abélienne  $A \subset \text{Pic}_{C/k}^0$  telle que l'application naturelle

$$\text{Pic}_{X/k}^0 \times A \rightarrow \text{Pic}_{C/k}^0$$

soit une isogénie de variétés abéliennes sur  $k$ .

Puisque l'application  $H^2(k, \text{Pic}^0(\overline{C})) \rightarrow H^2(k, \text{Pic}(\overline{C}))$  est injective, ceci implique :

(\*\*) *Le noyau de l'application composée*

$$H^2(k, \text{Pic}^0(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, \text{Pic}(\overline{C}))$$

*a un exposant fini.*

Puisque  $N^1 = \text{NS}(\overline{X})/\text{tors}$  est un groupe abélien libre de type fini, on peut choisir un nombre fini, disons  $m$ , de courbes intègres sur  $\overline{X}$  telles que l'intersection avec ces courbes définit un homomorphisme injectif  $\iota : N^1 \hookrightarrow \mathbb{Z}^m$ . Par passage aux normalisations on obtient des morphismes de courbes projectives, lisses, connexes définies sur  $\overline{k}$ , vers  $\overline{X}$ . Pour la présente démonstration on peut remplacer  $k$  par une extension finie sur laquelle chacune des courbes est définie.

Nous avons donc des  $k$ -courbes  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , projectives, lisses, géométriquement intègres et des  $k$ -morphisms  $f_i : C_i \rightarrow X$ . Les applications induisent un homomorphisme de  $\Gamma$ -modules

$$\text{NS}(\overline{X}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \text{NS}(\overline{C}_i) = \mathbb{Z}^m.$$

D'après (13), (\*) et (\*\*), pour établir le résultat annoncé, il suffit de montrer que le noyau de l'application induite  $H^2(k, \text{NS}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Z}^m)$  est d'exposant fini. Cette application est la composée de deux applications :

$$H^2(k, \text{NS}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, N^1) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Z}^m).$$

Il suffit de montrer que le noyau de chacune de ces deux applications est d'exposant fini.

De la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})_{\mathrm{tors}} \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow N^1 \rightarrow 0$$

on déduit que l'application

$$\mathrm{H}^2(k, \mathrm{NS}(\overline{X})) \rightarrow \mathrm{H}^2(k, N^1)$$

a son noyau annulé par la multiplication par l'exposant du groupe fini  $\mathrm{NS}(\overline{X})_{\mathrm{tors}}$ . Il existe un homomorphisme  $\mathbb{Z}^m \rightarrow N^1$  tel que la composition d'homomorphismes de groupes abéliens, avec action triviale du groupe de Galois,

$$N^1 \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}^m \rightarrow N^1$$

est la multiplication par un entier strictement positif. Le noyau de l'application

$$\mathrm{H}^2(k, N^1) \rightarrow \mathrm{H}^2(k, \mathbb{Z}^m)$$

est annulé par la multiplication par cet entier. QED

## 2.2 Majorations, I

Soit  $\delta_0$  l'exposant du groupe fini  $D$  défini dans (3), et soit  $\nu_0$  l'exposant du groupe fini  $\mathrm{NS}(\overline{X})_{\mathrm{tors}}$ . Soit  $\alpha$  l'application naturelle  $\mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma$ .

**Théorème 2.2** *Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique zéro. Soit  $L/k$  une extension finie telle que le groupe abélien libre de type fini  $N_1 = \mathrm{Num}_1(\overline{X})$  est engendré par les classes de courbes intègres sur  $\overline{X}$  définies sur  $L$ . Soit  $\lambda = [L : k]$ .*

(i) *Si l'on a  $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  et si l'application  $\mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^3(k, \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$  est injective, alors l'exposant de  $\mathrm{Coker}(\alpha)$  divise  $\lambda \delta_0 \nu_0$ .*

(ii) *Si  $k$  est un corps de nombres, l'exposant de  $\mathrm{Coker}(\alpha)$  divise  $2\lambda \delta_0 \nu_0$ , et il divise  $\lambda \delta_0 \nu_0$  si  $k$  est totalement imaginaire.*

*Démonstration.* Elle consiste à détailler les étapes de la démonstration du théorème 2.1. On applique d'abord la proposition 1.3. Pour tout corps de nombres  $k$ , on a  $\mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^3(k, \overline{k}^*) = 0$ . Dans ce cas, on a donc  $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ , et

donc  $\text{Coker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$ . Ceci vaut aussi sous l'hypothèse que l'application  $H_{\text{ét}}^3(k, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$  est injective.

On choisit un nombre fini, soit  $m$ , de courbes intègres  $C_1, \dots, C_m$  sur  $\overline{X}$  dont les classes engendrent  $N_1$ , et on remplace  $k$  par une extension finie  $L$  sur laquelle chacune de ces courbes est définie. L'argument de restriction-corestriction au début de la démonstration du théorème 2.1 montre que si l'on remplace  $k$  par l'extension finie  $L$ , de degré  $\lambda$ , l'exposant  $\text{Coker}(\alpha)$  divise le produit de l'exposant de  $\text{Coker}(\alpha_L)$  par l'entier  $\lambda$ . Pour établir le théorème, il suffit donc de se limiter au cas  $k = L$ , c'est-à-dire à  $\lambda = 1$ .

Soit  $\text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathbb{Z}^m$  l'application donnée par restriction aux courbes  $C_i$ , suivie de l'application degré sur chaque courbe. La démonstration du théorème 2.1 établit que l'image de  $\beta$  est contenue dans le noyau de l'application induite

$$H^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Z}^m).$$

L'application  $\text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathbb{Z}^m$  se factorise comme suit :

$$\text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \text{NS}(\overline{X}) \rightarrow N^1 \rightarrow \text{Hom}(N_1, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^m.$$

Nous allons borner l'exposant du noyau de chaque application induite sur  $H^2(k, \bullet)$ .

En envoyant chaque courbe  $C_i$  sur sa classe dans  $N_1$  on obtient une suite exacte de  $\Gamma$ -modules triviaux

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow N_1 \rightarrow 0.$$

En dualisant cette suite on obtient une suite exacte scindée de  $\Gamma$ -modules triviaux :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N_1, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow 0.$$

L'application

$$H^2(k, \text{Hom}(N_1, \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Z}^m)$$

est donc injective. De la suite exacte (3) on tire que le noyau de

$$H^2(k, N^1) \rightarrow H^2(k, \text{Hom}(N_1, \mathbb{Z}))$$

est annulé par l'exposant de  $H^1(k, D)$ , donc par  $\delta_0$ , l'exposant du groupe  $D$ .

Comme on a vu dans la démonstration du théorème précédent, le noyau de l'application

$$H^2(k, \text{NS}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, N^1)$$

est annulé par l'exposant  $\nu_0$  de  $\text{NS}(\overline{X})_{\text{tors}}$ . Nous avons par ailleurs la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}_{X/k}^0(\overline{k}) \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \text{NS}(\overline{X}) \rightarrow 0.$$

Si  $H^1(X, O_X) = 0$ , alors  $\text{Pic}_{X/k}^0 = 0$ . Si  $k$  est un corps de nombres et  $A$  une variété abélienne, on a  $H^2(k, A) = \bigoplus_v H^2(k_v, A)$ , où  $v$  parcourt les places réelles de  $k$  [13, Thm. 6.26 (c), p. 92]. Ainsi l'exposant de  $H^2(k, A)$  est au plus 2. Ceci achève la démonstration du théorème. QED

**Remarque.** Du théorème 2.2 on déduit immédiatement, au moyen du lemme 1.2, une majoration de l'ordre du groupe  $\text{Coker}(\alpha)$ .

### 3 Différentielles

#### 3.1 Une remarque générale sur les différentielles dans les suites spectrales

Rappelons le cadre général pour la suite spectrale des foncteurs composés. Soient  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  des catégories abéliennes. Supposons que  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  ont suffisamment d'injectifs. Soient  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  and  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  des foncteurs additifs exacts à gauche. Supposons que  $G$  envoie les objets injectifs sur des objets  $F$ -acycliques. Alors pour tout objet  $B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  on a la suite spectrale

$$E_2^{pq} = (R^p F)(R^q G)B \Rightarrow R^{p+q}(FG)B. \quad (14)$$

Pour  $p \geq 0$  et  $q \geq 1$ , soient

$$\partial_{p,q} : (R^p F)(R^q G)B \longrightarrow (R^{p+2} F)(R^{q-1} G)B$$

les applications canoniques dans cette suite spectrale.

Soit

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (15)$$

une suite exacte dans  $\mathcal{A}$ . Par application des foncteurs dérivés droits de  $G$  on obtient une longue suite exacte dans  $\mathcal{B}$ . En la tronquant on obtient pour tout  $q \geq 1$  une suite exacte

$$0 \rightarrow B_1 \rightarrow (R^{q-1} G)C \rightarrow (R^q G)A \rightarrow B_2 \rightarrow 0, \quad (16)$$

une application surjective  $s : (R^{q-1}G)B \rightarrow B_1$ , et une application injective  $i : B_2 \rightarrow (R^qG)B$ . Soit  $\partial : (R^pF)B_2 \rightarrow (R^{p+2}F)B_1$  l'homomorphisme de connexion défini par (16). Soit

$$s_* = (R^{p+2}F)(s) : (R^{p+2}F)(R^{q-1}G)B \rightarrow (R^{p+2}F)B_1$$

l'application induite par  $s$ , et, de façon analogue, soit

$$i_* = (R^pF)(i) : (R^pF)B_2 \rightarrow (R^pF)(R^qG)B$$

l'application induite par  $i$ .

**Lemme 3.1** *On a  $\partial = s_*\partial_{p,q}i_*$ .*

*Démonstration.* Soit

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte de résolutions injectives de  $A$ , resp.  $B$ , resp.  $C$ . Soient  $a_n : A^n \rightarrow A^{n+1}$  les différentielles dans  $A$ , et de même dans  $B$  et  $C$ . On a le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} G(A^{q-1})/\text{Im}(G(a_{q-2})) & \rightarrow & G(B^{q-1})/\text{Im}(G(b_{q-2})) & \rightarrow & G(C^{q-1})/\text{Im}(G(c_{q-2})) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker}(G(a_q)) & \rightarrow & \text{Ker}(G(b_q)) & \rightarrow & \text{Ker}(G(c_q)) \end{array}$$

En appliquant le lemme du serpent on obtient la suite exacte

$$(R^{q-1}G)A \rightarrow (R^{q-1}G)B \rightarrow (R^{q-1}G)C \rightarrow (R^qG)A \rightarrow (R^qG)B \rightarrow (R^qG)C.$$

En la tronquant on obtient (16). En utilisant le lemme 3.2 ci-dessous, on vérifie que la suite (16) est équivalente à la 2-extension

$$0 \rightarrow (R^{q-1}G)B \rightarrow G(B^{q-1})/\text{Im}G(b_{q-2}) \rightarrow \text{Ker}(G(b_q)) \rightarrow (R^qG)B \rightarrow 0 \quad (17)$$

tirée en arrière via  $i : B_2 \rightarrow (R^qG)B$  et poussée en avant via  $s : (R^{q-1}G)B \rightarrow B_1$ . Par définition, l'application canonique  $\partial_{p,q}$  est l'homomorphisme de connexion

$$(R^pF)(R^qG)B \longrightarrow (R^{p+2}F)(R^{q-1}G)B$$

défini par (17), donc  $s_*\partial_{p,q}i_* = \partial$ . QED

**Lemme 3.2** *Soit*

$$\begin{array}{ccccccc} L & \rightarrow & M & \rightarrow & N & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & L' & \rightarrow & M' & \rightarrow & N' \end{array} \quad (18)$$

*un diagramme commutatif à lignes exactes dans une catégorie abélienne, et soit*

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_3 \rightarrow K_4 \rightarrow K_5 \rightarrow K_6 \quad (19)$$

*la suite exacte obtenue à partir de (18) en appliquant le lemme du serpent. Soit*

$$0 \rightarrow B_1 \rightarrow K_3 \rightarrow K_4 \rightarrow B_2 \rightarrow 0 \quad (20)$$

*la suite exacte obtenue en tronquant (19). Soit  $s : K_2 \rightarrow B_1$  l'application surjective naturelle, et soit  $i : B_2 \rightarrow K_5$  l'application injective naturelle. Alors la 2-extension (20) est obtenue à partir de la 2-extension*

$$0 \rightarrow K_2 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow K_5 \rightarrow 0$$

*en tirant par  $i$  et en poussant par  $s$ .*

*Démonstration.* Soit  $E$  le sous-objet de  $M$  qui est l'image inverse de l'image injective de  $K_3$  dans  $N$ . On laisse au lecteur la vérification facile que le diagramme évident suivant est commutatif et a ses lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & K_3 & \rightarrow & K_4 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & K_2 & \rightarrow & E & \rightarrow & L' & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K_2 & \rightarrow & M & \rightarrow & M' & \rightarrow & K_5 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Le lemme résulte alors de ce diagramme. QED

## 3.2 Applications au groupe de Brauer

De la suite de Kummer (8) on tire la 2-extension de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}) / \text{Pic}(\overline{X})[n] \rightarrow \text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mu_n) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})[n] \rightarrow 0, \quad (21)$$

où la seconde flèche est définie par la multiplication par  $n$  sur  $\text{Pic}(\overline{X})$ .

**Proposition 3.3** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(\overline{X})[n]^\Gamma & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})/\mathrm{Pic}(\overline{X})[n]) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \end{array}$$

Ici  $\partial$  est l'homomorphisme de connexion défini par (21), et les flèches verticales sont les applications naturelles évidentes.

*Démonstration.* Dans le cadre de (14) et du lemme 3.1, soit  $\mathcal{A}$  la catégorie des faisceaux étales sur  $X$ , soit  $\mathcal{B}$  la catégorie des  $\Gamma$ -modules continus discrets, et soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des groupes abéliens. Soit  $G = \pi_*$ , où  $\pi : X \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$  est le morphisme structural. Soit  $F(M) = M^\Gamma$ . Soit  $A = \mu_{n,X}$ ,  $B = C = \mathbb{G}_{m,X}$ . Pour (15), prenons la suite de Kummer (8). Prenons  $p = 0$  et  $q = 2$ . La suite exacte (16) associée est précisément la suite (21). Il reste à appliquer le lemme 3.1 : la flèche verticale de gauche dans le diagramme est  $i_*$ , la flèche horizontale inférieure est  $\beta = \partial_{0,2}$ , et la flèche verticale de droite est  $s_*$ . QED

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow 0$$

on tire facilement la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}^0(\overline{X})/\mathrm{Pic}^0(\overline{X})[n] \rightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})/\mathrm{Pic}(\overline{X})[n] \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})/\mathrm{NS}(\overline{X})[n] \rightarrow 0.$$

Le sous-groupe divisible  $\mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \subset \mathrm{Pic}(\overline{X})$  est contenu dans le noyau de  $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mu_n)$ , donc de (21) on tire la 2-extension de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})/\mathrm{NS}(\overline{X})[n] \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mu_n) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})[n] \rightarrow 0, \quad (22)$$

où la seconde flèche est induite par la multiplication par  $n$  sur  $\mathrm{NS}(\overline{X})$ .

**Corollaire 3.4** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(\overline{X})[n]^\Gamma & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^2(k, \mathrm{NS}(\overline{X})/\mathrm{NS}(\overline{X})[n]) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \end{array}$$

Dans ce diagramme,  $\partial$  est l'homomorphisme de connexion défini par (22), et les flèches verticales sont les applications naturelles évidentes.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.3. QED

**Corollaire 3.5** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^2(k, N^1) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \end{array}$$

Dans ce diagramme,  $\partial$  est l'homomorphisme de connexion défini par (11), et les flèches verticales sont les applications naturelles évidentes.

*Démonstration.* Soit  $n$  un entier positif non nul divisible par l'exposant  $\nu_0$  de  $\mathrm{NS}(\overline{X})_{\mathrm{tors}}$ . Pour un tel  $n$  la suite exacte (22) se lit

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mu_n) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})[n] \rightarrow 0,$$

l'application  $N^1 \rightarrow \mathrm{NS}(\overline{X})$  étant induite par la multiplication par  $n$  sur  $\mathrm{NS}(\overline{X})$ . Écrivons  $n = \prod_{\ell} n_{\ell}$ , où  $n_{\ell}$  est une puissance du nombre premier  $\ell$ .

Soit  $P_{\ell} = \mathrm{NS}(\overline{X})\{\ell\}$ , et soit  $\mathrm{Im}(P_{\ell})$  l'image de  $P_{\ell}$  par l'application composée

$$\mathrm{NS}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1)) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mu_{n_{\ell}}).$$

On a le diagramme commutatif suivant de  $\Gamma$ -modules, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & N^1 & \longrightarrow & N^1 \otimes \mathbb{Q} & \rightarrow & \oplus_{\ell} (\mathrm{H}_{\ell}^2 \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) & \rightarrow & \mathrm{Br}^0(\overline{X}) & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & N^1 & \xrightarrow{\times n} & N^1 & \rightarrow & \oplus_{\ell} \mathrm{H}_{\ell}^2/n_{\ell} & \rightarrow & \mathrm{Br}^0(\overline{X})[n] & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & N^1 & \xrightarrow{\times n} & N^1 & \rightarrow & \oplus_{\ell} \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mu_{n_{\ell}})/\mathrm{Im}(P_{\ell}) & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})[n] & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & N^1 & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{NS}(\overline{X}) & \rightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{ét}}^2(\overline{X}, \mu_n) & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})[n] & \rightarrow & 0. \end{array}$$

La suite exacte de la première ligne est obtenue en tensorisant (10) avec  $\mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}$  puis en prenant la somme directe sur tous les premiers  $\ell$ . Pour construire la suite exacte de la seconde ligne, on tensorise (10) avec  $\mathbb{Z}/n_{\ell}$ , puis on prend la somme directe sur tous les premiers  $\ell$ . La flèche *verticale*  $N^1 \rightarrow N^1 \otimes \mathbb{Q}$  envoie  $x$  sur  $x \otimes \frac{1}{n}$ . Toutes les autres flèches verticales sont les flèches naturelles évidentes.

En utilisant ce diagramme, on déduit du corollaire 3.4 que la restriction de l'application composée

$$\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(k, N^1)$$

à  $\mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \subset \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma$  est l'homomorphisme de connexion défini par (11), la 2-extension supérieure dans le grand diagramme ci-dessus. QED

## 4 Utilisation des cycles transcendants

Dans tout ce paragraphe,  $X$  est une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique nulle.

### 4.1 Réseaux de cycles algébriques et de cycles transcendants

Soit  $\ell$  un nombre premier. Pour  $M$  un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module, on note  $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(M, \mathbb{Z}_\ell)$ . Dans le diagramme commutatif d'accouplements  $\Gamma$ -équivalents

$$\begin{array}{ccc} N_\ell^1 & \times & N_{1,\ell} & \rightarrow & \mathbb{Z}_\ell \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ H_\ell^2 & \times & H_\ell^{2d-2} & \rightarrow & \mathbb{Z}_\ell \end{array}$$

vu au paragraphe 1.1, les flèches verticales sont *injectives* (théorèmes de Matsusaka et de Lieberman), En outre, l'accouplement inférieur induit des isomorphismes  $H_\ell^2 = (H_\ell^{2d-2})^*$  et  $H_\ell^{2d-2} = (H_\ell^2)^*$ . En utilisant la suite exacte (6) et la remarque subséquente, on voit que la flèche composée

$$N_\ell^1 \rightarrow H_\ell^2 \xrightarrow{\sim} (H_\ell^{2d-2})^* \rightarrow N_{1,\ell}^*$$

est une application injective de conoyau  $D\{\ell\}$ , où  $D$  est le groupe abélien fini défini en (3). En particulier, cette application est un isomorphisme si  $\ell$  ne divise pas l'ordre  $\delta$  de  $D$ .

Comme on a vu au paragraphe 1.2, le sous-groupe  $N_\ell^1 \subset H_\ell^2$  est primitif. Par contre Kollár (voir [22], Thm. 14) a montré que  $N_{1,\ell}$  n'est pas forcément un sous-groupe primitif de  $H_\ell^{2d-2}$ . Voici comment remédier à cet état de choses. Tout d'abord, si  $\ell$  ne divise pas  $\delta$ , l'application naturelle  $(H_\ell^{2d-2})^* \rightarrow N_{1,\ell}^*$  est surjective, donc  $N_{1,\ell}$  est primitif dans  $H_\ell^{2d-2}$ . Pour tout  $\ell$ ,

on définit le  $\Gamma$ -module  $M_\ell$  comme le saturé de  $N_{1,\ell}$  dans  $H_\ell^{2d-2}$ . En d'autres termes,

$$M_\ell = H_\ell^{2d-2} \cap (N_{1,\ell} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell) \subset H_\ell^{2d-2} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

Si  $\ell$  ne divise pas  $\delta$ , alors  $M_\ell = N_{1,\ell}$ . Nous définissons ensuite le  $\Gamma$ -module  $M$  comme le sous-groupe de  $N_1 \otimes \mathbb{Q}$  formé des éléments qui, pour tout premier  $\ell$ , s'envoient dans  $M_\ell$  par l'application naturelle

$$N_1 \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow N_1 \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong M_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

On a donc  $N_1 \subset M \subset N_1 \otimes \mathbb{Q}$ . On obtient aussi une forme bilinéaire  $\Gamma$ -équivariante  $N^1 \times M \rightarrow \mathbb{Q}$ . Par tensorisation avec  $\mathbb{Z}_\ell$  pour chaque premier  $\ell$  on voit que c'est en fait une forme bilinéaire entière

$$N^1 \times M \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui prolonge l'accouplement d'intersection sur  $N^1 \times N_1$ . Cela donne la suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow N^1 \rightarrow \text{Hom}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow E \rightarrow 0, \quad (23)$$

qui définit le  $\Gamma$ -module fini  $E$ , et pour chaque  $\ell$  cela donne la suite exacte

$$0 \rightarrow N_\ell^1 \rightarrow M_\ell^* \rightarrow E\{\ell\} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Le  $\Gamma$ -module  $E$  est un sous- $\Gamma$ -submodule of  $D$ , et  $D/E = \text{Hom}(M/N_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Donc  $|D/E| = |M/N_1|$ . Notons que si  $d = 2$ , c'est-à-dire si  $X$  est une surface, alors  $N_{1,\ell} = N_\ell^1 \subset H_\ell^2$  est primitif, donc  $M = N_1$  et  $D = E$ .

Soit  $S_\ell \subset H_\ell^2$  l'orthogonal de  $N_{1,\ell}$  (ou de  $M_\ell$ ) par rapport au cup-produit. Soit  $T_\ell \subset H_\ell^{2d-2}$  l'orthogonal de  $N_\ell^1$  par rapport au cup-produit. En dualisant la suite exacte de  $\Gamma$ -modules, libres et de type fini comme  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules,

$$0 \rightarrow T_\ell \rightarrow H_\ell^{2d-2} \rightarrow (N_\ell^1)^* \rightarrow 0$$

on obtient la suite exacte de  $\Gamma$ -modules, libres et de type fini comme  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules,

$$0 \rightarrow N_\ell^1 \rightarrow H_\ell^2 \rightarrow T_\ell^* \rightarrow 0. \quad (25)$$

Ceci définit une identification canonique  $T_\ell^* = B_\ell$ , où  $B_\ell$  est le module de Tate du groupe de Brauer défini au paragraphe 1.2.

Puisque  $M_\ell \subset H_\ell^{2d-2}$  est un sous-groupe primitif, le cup-produit donne la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow S_\ell \rightarrow H_\ell^2 \rightarrow M_\ell^* \rightarrow 0. \quad (26)$$

L'application composée  $N_\ell^1 \subset H_\ell^2 \xrightarrow{\sim} (H_\ell^{2d-2})^* \rightarrow M_\ell^* \rightarrow (N_{1,\ell})^*$  est injective. Ainsi  $S_\ell \cap N_\ell^1 = 0$ . En utilisant (25) et (26) on voit que pour tout premier  $\ell$  on a des isomorphismes canoniques de  $\Gamma$ -modules

$$E\{\ell\} = M_\ell^*/N_\ell^1 = H_\ell^2/(N_\ell^1 \oplus S_\ell) = T_\ell^*/S_\ell.$$

On a donc une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow M_\ell^*/N_\ell^1 \rightarrow (S_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \oplus (N_\ell^1 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H_\ell^2 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0. \quad (27)$$

Nous ferons usage du diagramme commutatif suivante de  $\Gamma$ -modules, dont les colonnes et les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M_\ell^*/N_\ell^1 & \rightarrow & S_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \rightarrow & \text{Br}^0(\overline{X})\{\ell\} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & N_\ell^1 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \rightarrow & H_\ell^2 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & \rightarrow & \text{Br}^0(\overline{X})\{\ell\} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M_\ell^* \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & = & M_\ell^* \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (28)$$

La ligne médiane, respectivement la colonne médiane, est la suite exacte (25), respectivement la suite exacte (26), tensorisée avec  $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ . Le reste du diagramme se déduit de (27).

En prenant la somme directe sur tous les premiers  $\ell$ , on déduit de (28) l'équivalence des 2-extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N^1 & \rightarrow & \text{Hom}(M, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \oplus (S_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & N^1 & \rightarrow & N^1 \otimes \mathbb{Q} & \rightarrow & \oplus (H_\ell^2 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow 0 \end{array}$$

L'extension supérieure est le produit de Yoneda des 1-extensions de  $\Gamma$ -modules (23) et

$$0 \rightarrow E \rightarrow \oplus (S_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X}) \rightarrow 0. \quad (29)$$

Notons  $\partial_1 : \text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \rightarrow H^1(k, E)$  et  $\partial_2 : H^1(k, E) \rightarrow H^2(k, N^1)$  les différentielles définies par ces 1-extensions.

**Proposition 4.1** *L'application composée*

$$\mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \hookrightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \rightarrow \mathrm{H}^2(k, N^1)$$

*coïncide, au signe près, avec l'application composée*

$$\mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{H}^1(k, E) \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{H}^2(k, N^1).$$

*En particulier l'image de  $\beta(\mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$  dans  $\mathrm{H}^2(k, N^1)$  est annulée par l'exposant de  $E$ .*

*Démonstration.* Nous avons vu que (11) est équivalent au produit de Yoneda de (23) et (29), la proposition résulte donc du corollaire 3.5. QED

## 4.2 Majorations, II

Soit  $\gamma$  l'ordre du groupe fini  $\oplus_\ell \mathrm{H}_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\text{tors}}$ , et soit  $\gamma_0$  son exposant. Soit  $\varepsilon_0$  l'exposant du groupe fini  $E$  défini en (23). L'entier  $\varepsilon_0$  divise  $\delta_0$ , qui est l'exposant du groupe fini  $D$  défini en (3). Rappelons que  $\nu$  est l'ordre du groupe fini  $\mathrm{NS}(\overline{X})_{\text{tors}}$ , et que  $\nu_0$  est son exposant.

Si  $d = 2$ , c'est-à-dire si  $X$  est une surface, alors  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\text{tors}}$  est dual de  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\text{tors}}$ , donc  $\gamma = \nu$  et  $\gamma_0 = \nu_0$ . Dans ce cas  $N^1 = N_1$ , et on a l'accouplement bilinéaire symétrique

$$N^1 \times N^1 \rightarrow \mathbb{Z},$$

dont le noyau est trivial. L'entier  $\delta = |D|$  est alors la valeur absolue du déterminant de cet accouplement. Toujours dans ce cas, les groupes  $D$  et  $E$  coïncident, donc  $\delta = \varepsilon$  et  $\delta_0 = \varepsilon_0$ .

Sur un corps quelconque (de caractéristique zéro), nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.2** *Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  de caractéristique nulle, telle que  $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Supposons que l'application canonique  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^3(k, \overline{k}^*) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$  est injective (ce qui est le cas si  $X$  possède un  $k$ -point). Alors :*

(i) *L'exposant du conoyau de*

$$\alpha : \mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma$$

*divise  $\gamma_0 \varepsilon_0 \nu_0$ , et l'ordre de  $\mathrm{Coker}(\alpha)$  divise  $\gamma(\varepsilon_0 \nu_0)^{b_2 - \rho}$ .*

(ii) *Si  $X$  est une surface, l'exposant de  $\mathrm{Coker}(\alpha)$  divise  $\delta_0 \nu_0^2$ , et l'ordre de  $\mathrm{Coker}(\alpha)$  divise  $\nu(\delta_0 \nu_0)^{b_2 - \rho}$ .*

*Démonstration.* Sous nos hypothèses,  $\text{Coker}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$  d'après la proposition 1.3, il suffit donc d'estimer la taille de  $\beta(\text{Br}(\overline{X})^\Gamma)$ . De (7) on déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma \rightarrow \bigoplus_\ell \text{H}_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\text{tors}}^\Gamma.$$

Ceci implique que  $|\beta(\text{Br}(\overline{X})^\Gamma)|$  divise  $\gamma|\beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)|$ , et l'exposant de  $\beta(\text{Br}(\overline{X})^\Gamma)$  divise le produit de  $\gamma_0$  par l'exposant de  $\beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$ .

D'après la proposition 4.1, le groupe  $\varepsilon_0 \cdot \beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$  est un sous-groupe de

$$\text{Ker}[\text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow \text{H}^2(k, N^1)].$$

On a la suite exacte courte

$$\text{H}^2(k, \text{Pic}^0(\overline{X})) \rightarrow \text{H}^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow \text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{X}))$$

et la suite exacte courte

$$\text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{X})_{\text{tors}}) \rightarrow \text{H}^2(k, \text{NS}(\overline{X})) \rightarrow \text{H}^2(k, N^1).$$

L'hypothèse  $\text{H}^1(X, O_X) = 0$  implique  $\text{Pic}^0(\overline{X}) = 0$ , donc l'exposant de  $\varepsilon_0 \cdot \beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$  divise  $\nu_0$ . Ainsi l'exposant de  $\beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$  divise  $\varepsilon_0 \cdot \nu_0$ . Le groupe  $\beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$  est un sous-quotient de  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2 - \rho}$ . Le lemme 1.2 donne alors une borne pour l'ordre de  $\beta(\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma)$ , qui donne la borne annoncée pour l'ordre de  $\beta(\text{Br}(\overline{X})^\Gamma) = \text{Coker}(\alpha)$ . L'énoncé pour une surface résulte des faits généraux rappelés au début de ce paragraphe. QED

Lorsque le corps de base  $k$  est un corps de nombres, nous pouvons énoncer un résultat sans la restriction  $\text{H}^1(X, O_X) = 0$ .

**Théorème 4.3** *Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres  $k$ . Alors :*

(i) *L'exposant du conoyau de*

$$\alpha : \text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma$$

*divise  $2\gamma_0\varepsilon_0\nu_0$ , et il divise  $\gamma_0\varepsilon_0\nu_0$  si  $k$  est totalement imaginaire. L'ordre de  $\text{Coker}(\alpha)$  divise  $\gamma(2\varepsilon_0\nu_0)^{b_2 - \rho}$ , et il divise  $\gamma(\varepsilon_0\nu_0)^{b_2 - \rho}$  si  $k$  est totalement imaginaire.*

(ii) *Si  $X$  est une surface, l'exposant de  $\text{Coker}(\alpha)$  divise  $2\delta_0\nu_0^2$ , et il divise  $\delta_0\nu_0^2$  si  $k$  est totalement imaginaire ; l'ordre de  $\text{Coker}(\alpha)$  divise  $\nu(2\delta_0\nu_0)^{b_2 - \rho}$ , et il divise  $\nu(\delta_0\nu_0)^{b_2 - \rho}$  si  $k$  est totalement imaginaire.*

*Démonstration.* Pour un corps de nombres  $k$ , on a  $H_{\text{ét}}^3(k, \bar{k}^*) = 0$ . Si l'on suit la démonstration du théorème 4.2, le résultat provient du fait que le groupe  $H^2(k, \text{Pic}^0(\bar{X}))$  est un groupe fini d'exposant 2, et que ce groupe est nul si  $k$  est totalement imaginaire. C'est un fait général pour les variétés abéliennes sur un corps de nombres [13, Thm. 6.26 (c), p. 92]. L'énoncé pour les surfaces se déduit de l'énoncé général comme dans la précédente démonstration. QED

**Remarque** On a l'isomorphisme

$$\text{NS}(\bar{X})_{\text{tors}} = \bigoplus_{\ell} H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1))_{\text{tors}}.$$

La dualité de Poincaré implique que les groupes finis  $H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1))_{\text{tors}}$  et  $H_{\text{ét}}^{2d-1}(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(d-1))_{\text{tors}}$  sont duaux l'un de l'autre.

La proposition suivante apporte un complément utile au théorème 4.3. Pour un corps de nombres  $k$  on note  $k_v$  la complétion de  $k$  en une place non archimédienne  $v$  et  $k_v^{\text{nr}}$  l'extension maximale non ramifiée de  $k_v$ . Pour  $S$  un ensemble fini de places finies de  $k$  et  $E$  un module galoisien fini, on note  $H_S^1(k, E)$  le sous-groupe de  $H^1(k, E)$  formé des éléments non ramifiés en dehors de  $S$ , c'est-à-dire l'intersection, pour tous les  $v \notin S$ , des noyaux des applications de restriction naturelles  $H^1(k, E) \rightarrow H^1(k_v^{\text{nr}}, E)$ .

**Proposition 4.4** *Soit  $X$  une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres  $k$ , avec bonne réduction en dehors d'un ensemble fini  $S$  de places finies de  $k$ . Soit  $E$  le  $\Gamma$ -module fini défini en (23). Soit  $T_E$  l'ensemble des places finies de  $k$  divisant l'ordre de  $E$ . Alors*

$$\partial_1(\text{Br}^0(\bar{X})^{\Gamma}) \subset H_{S \cup T_E}^1(k, E).$$

*Démonstration.* Soit  $I_v = \text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$  le groupe d'inertie. Il est bien connu que si  $v$  est une place de bonne réduction, et si la caractéristique résiduelle est différente de  $\ell$ , alors l'action naturelle de  $I_v$  sur  $H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, \mu_{\ell^m})$ ,  $m \geq 1$ , et donc sur  $H_{\text{ét}}^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_{\ell}(1))$ , est triviale (théorème de changement de base lisse, voir [12, Cor. VI.4.2]). Via la suite de Kummer, ceci implique que  $I_v$  agit trivialement sur  $\text{Br}(\bar{X})\{\ell\}$ . Mais  $I_v$  agit aussi trivialement sur  $S_{\ell} \subset H_{\ell}^2$ , donc la différentielle

$$\partial : \text{Br}^0(\bar{X})\{\ell\}^{I_v} \longrightarrow H^1(k_v^{\text{nr}}, E\{\ell\})$$

définie par la suite exacte de  $I_v$ -modules

$$0 \rightarrow E\{\ell\} \rightarrow S_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell} \rightarrow \text{Br}^0(\bar{X})\{\ell\} \rightarrow 0,$$

(ligne supérieure de (28)) est nulle. Donc, pour  $v \notin S \cup T_E$ , l'image de  $\text{Br}^0(\overline{X})^\Gamma$  dans  $H^1(k, E)$  est dans le noyau de l'application de restriction à  $H^1(k_v^{\text{nr}}, E)$ . QED

## 5 Applications aux surfaces

**Proposition 5.1** *Soit  $X$  une surface  $K3$  sur un corps  $k$  de caractéristique nulle. Supposons que l'application  $H_{\text{ét}}^3(k, \overline{k}^*) \rightarrow H_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{G}_m)$  est injective (c'est le cas si  $k$  est un corps de nombres ou si  $X$  possède un  $k$ -point). Soit  $\alpha$  l'application naturelle  $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma$ . L'exposant de  $\text{Coker}(\alpha)$  divise  $\delta_0$ , et l'ordre de ce groupe divise  $\delta_0^{b_2 - \rho}$ .*

*Démonstration.* Pour  $X$  une surface  $K3$ , on a  $H^1(X, O_X) = 0$ , et le groupe de Néron–Severi  $\text{NS}(\overline{X})$  est sans torsion, donc  $\nu = 1$ . L'énoncé est un cas particulier du théorème 4.2 (ii). QED

### Exemples

1. Soit  $X \subset \mathbb{P}_k^3$  une surface quartique diagonale sur un corps de caractéristique zéro. Il est bien connu que l'on a  $\delta = 64$  et  $\delta_0 = 8$ , voir [16]. Ceci implique déjà que tout élément d'ordre impair de  $\text{Br}(\overline{X})^\Gamma$  vient de  $\text{Br}(X)$ . En outre,  $b_2 = 22$  et  $\rho = 20$ . En suivant la démonstration du théorème 4.2, on voit que  $\text{Coker}(\alpha)$  est un sous-quotient de  $(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2)^2$ . Puisque son exposant divise 8,  $\text{Coker}(\alpha)$  est isomorphe à un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/8)^2$ .

2. Soit  $k$  un corps de caractéristique zéro. Supposons que  $X \subset \mathbb{P}_k^g$  est une surface  $K3$  “très générale”, c'est-à-dire que  $\text{NS}(\overline{X}) \cong \mathbb{Z}$  et est engendré par la classe d'une section hyperplane  $H$ . On a  $\delta = (H.H) = 2g - 2$ . La suite exacte (3) se lit alors

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow D \rightarrow 0,$$

où  $E = D = \mathbb{Z}/(2g - 2)$  avec  $\Gamma$ -action triviale. La démonstration du théorème 4.2 donne une injection

$$\text{Coker}(\alpha) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/(2g - 2))^{21}.$$

Comme on a  $H^1(k, \mathbb{Z}) = 0$ , l'application

$$\partial_1 : H^1(k, D) \rightarrow H^2(k, \mathbb{Z}) = H^2(k, \text{NS}(\overline{X})) = H^2(k, \text{Pic}(\overline{X}))$$

est injective. Si  $k$  est un corps de nombres,  $S$  est l'ensemble des places finies de mauvaise réduction de  $X$ , et  $T$  l'ensemble des places divisant  $2g - 2$ , alors

la proposition 4.4 donne un homomorphisme injectif

$$\text{Coker}(\alpha) \hookrightarrow H_{S \cup T}^1(k, \mathbb{Z}/(2g-2)).$$

Pour  $X$  le produit de deux courbes on a un résultat similaire au théorème 4.2 (ii), bien qu'ici  $H^1(X, O_X) \neq 0$ .

**Proposition 5.2** *Soit  $X = C_1 \times C_2$  le produit de deux courbes projectives, lisses et géométriquement intègres sur un corps  $k$  de caractéristique nulle. Soit  $J_1$ , resp.  $J_2$ , la jacobienne de  $C_1$ , resp.  $C_2$ . Supposons que  $X$  possède un  $k$ -point. Alors :*

- (i) *L'exposant du conoyau de  $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma$  divise  $\delta_0$ .*
- (ii) *Si  $\text{Hom}_{\overline{k}}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) = 0$ , alors l'application  $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(\overline{X})^\Gamma$  est surjective.*

*Démonstration.* Rappelons des faits connus ([14, §1 ; Cor. 6.2]). L'application naturelle de  $\Gamma$ -modules

$$(p_1^*, p_2^*) : \text{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \text{Pic}(\overline{C}_2) \longrightarrow \text{Pic}(\overline{X})$$

est une injection scindée, dont une rétraction est donnée par le choix d'un  $k$ -point  $M = (M_1, M_2) \in X(k) = C_1(k) \times C_2(k)$ . Ceci induit un isomorphisme de  $\Gamma$ -modules

$$\text{Pic}^0(\overline{C}_1) \oplus \text{Pic}^0(\overline{C}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(\overline{X}).$$

Le conoyau de  $(p_1^*, p_2^*)$  est le  $\Gamma$ -module  $\text{Hom}_{\overline{k}\text{-grp}}(\overline{J}_1, \overline{J}_2)$ , qui est libre et de type fini comme groupe abélien. Il y a une suite exacte induite de  $\Gamma$ -modules libres et de type fini comme groupes abéliens

$$0 \rightarrow \text{NS}(\overline{C}_1) \oplus \text{NS}(\overline{C}_2) \rightarrow \text{NS}(\overline{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\overline{k}\text{-grp}}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{NS}(\overline{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\overline{k}\text{-grp}}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) \rightarrow 0,$$

un scindage étant donné par le point  $M$ . En utilisant le  $k$ -point  $M \in X(k)$  on obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(k, \text{Pic}^0(\overline{X})) & \rightarrow & H^2(k, \text{Pic}(\overline{X})) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ H^2(k, \text{Pic}^0(\overline{C}_1) \oplus \text{Pic}^0(\overline{C}_2)) & \hookrightarrow & H^2(k, \text{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \text{Pic}(\overline{C}_2)). \end{array} \quad (30)$$

L'injection dans la ligne inférieure vient de la nullité de  $H^1(k, \mathbb{Z})$ .

Nous suivons la démonstration du théorème 2.1. D'après la proposition 1.3, for  $i = 1, 2$ , nous avons des diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Br}(X) & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \xrightarrow{\beta_X} & H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Br}(C_i) & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{C}_i)^\Gamma & \xrightarrow{\beta_{C_i}} & H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{C}_i)). \end{array}$$

Par le théorème de Tsen, on a  $\mathrm{Br}(\overline{C}_i) = 0$ . Ainsi

$$\beta(\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma) \subset \mathrm{Ker}[H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \rightarrow H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \mathrm{Pic}(\overline{C}_2))].$$

Puisque  $\mathrm{NS}(\overline{X})$  est sans torsion, on voit (remarque après le théorème 4.3) que  $H_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$  est sans torsion pour tout  $\ell$ , ce qui implique  $\mathrm{Br}^0(\overline{X}) = \mathrm{Br}(\overline{X})$ . D'après la proposition 4.1, l'image de  $\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma = \mathrm{Br}^0(\overline{X})^\Gamma$  dans le groupe  $H^2(k, N^1) = H^2(k, \mathrm{NS}(\overline{X}))$  est annulée par  $\delta_0$ . Ainsi tout élément dans  $\delta_0 \cdot \beta(\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma) \subset H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$  vient de  $H^2(k, \mathrm{Pic}^0(\overline{X}))$  et a une image nulle dans  $H^2(k, \mathrm{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \mathrm{Pic}(\overline{C}_2))$ . De (30) on déduit  $\delta_0 \cdot \beta(\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma) = 0$ . Ceci établit (i).

Si  $\mathrm{Hom}_{\overline{k}\text{-grp}}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) = 0$ , alors  $\mathrm{NS}(\overline{C}_1) \oplus \mathrm{NS}(\overline{C}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}(\overline{X})$  et  $\delta = 1$ . QED

### Exemples

1. Lorsque  $C_1 = E$  et  $C_2 = E'$  sont des courbes elliptiques non isogènes, sur  $\overline{k}$ , on comparera l'énoncé ci-dessus avec [21, Prop. 3.3].

2. Si  $C_1 = C_2$  est une courbe elliptique  $E$  sans multiplication complexe sur  $\overline{k}$ , alors  $\mathrm{NS}(\overline{X})$  est un groupe abélien libre de rang 3 engendré par les classes de  $E \times \{0\}$ , de  $\{0\} \times E$  et de la diagonale  $\Delta$ . On a  $\delta = 2$ ,  $b_2 = 6$ ,  $\rho = 3$ , donc le conoyau de  $\alpha : \mathrm{Br}(X) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma$  est isomorphe à un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/2)^3$ . Dans [21, Prop. 4.3] on trouvera un exemple avec  $\mathrm{Coker}(\alpha) \neq 0$ .

## 6 Variétés ouvertes

Nous offrons ici une réponse partielle à une question soulevée par T. Szamuely.

**Proposition 6.1** *Soit  $k$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$ . Soit  $U$  une  $k$ -variété quasi-projective et lisse. Le groupe  $H_{\text{ét}}^1(\overline{U}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\Gamma$  est fini.*

*Démonstration.* Ceci est une reformulation d'un cas particulier d'un résultat de Katz et Lang [8, Thm. 1, p. 295]. On peut aussi l'établir par la méthode plus générale suivante. On peut supposer  $U/k$  géométriquement connexe. Par le théorème d'Hironaka, il existe une  $k$ -variété projective, lisse et géométriquement intègre  $X$  qui contient  $U$  comme ouvert dense. Soit  $Z = X \setminus U$ , et soit  $F \subset Z$  le lieu singulier de  $Z$ . Soit  $X^0 = X \setminus F$  et soit  $Z^0 = Z \setminus F$ . Puisque  $X^0$  et  $F^0$  sont lisses, les suites de localisation pour la cohomologie étale à coefficients finis et le théorème de pureté donnent des suites exactes de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\overline{X}^0, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^0(\overline{Z}^0, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1)).$$

Puisque  $F$  est de codimension au moins 2 dans  $X$ , l'inclusion  $X^0 \rightarrow X$  induit un isomorphisme

$$H_{\text{ét}}^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = H_{\text{ét}}^1(\overline{X}^0, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell).$$

On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^\Gamma \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^\Gamma \rightarrow H^0(\overline{Z}^0, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1))^\Gamma.$$

La  $k$ -variété lisse  $Z^0$  se décompose comme union disjointe  $Z^0 = \cup_i Z_i$  de  $k$ -variétés lisses connexes. Soit  $k_i$  la fermeture intégrale de  $k$  dans le corps de fonctions  $k(Z_i)$ . Choisissons un  $k$ -plongement  $k_i \subset \overline{k}$ . Soit  $\Gamma_i = \text{Gal}(\overline{k}/k_i)$ . Le groupe  $H^0(\overline{Z}^0, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1))^\Gamma$  est la somme directe des groupes  $\oplus_i (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1))^{\Gamma_i}$ . Chaque groupe  $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1))^{\Gamma_i}$  est fini ; de plus, il est nul pour presque tout  $\ell$ . De fait, cet énoncé se ramène immédiatement à l'énoncé suivant : si  $k$  est un corps de nombres et  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{k}/k)$ , alors  $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1))^\Gamma$  est fini, et nul pour presque tout  $\ell$ . On est donc ramené à vérifier que  $H_{\text{ét}}^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^\Gamma$  est fini et nul pour presque tout  $\ell$ . Ceci résulte du théorème de changement de base propre et des conjectures de Weil (cf. [1, Thm. 1.5]). QED

**Théorème 6.2** *Soit  $k$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$  et soit  $U$  une  $k$ -variété quasi-projective, lisse et géométriquement intègre sur  $k$ . Alors :*

- (i) *Le quotient  $\text{Br}(\overline{U})^\Gamma / \text{Im}(\text{Br}(U))$  est un groupe fini.*
- (ii) *Si  $U$  est une surface, et si la conjecture de Tate  $\ell$ -adique pour les diviseurs vaut pour une compactification lisse de  $U$ ,  $\text{Br}(\overline{U})\{\ell\}^\Gamma$  is finite.*
- (iii) *Si la conjecture de Tate  $\ell$ -adique pour les diviseurs vaut pour une compactification lisse de  $U$ , et si de plus le module galoisien  $H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(1))$  est semi-simple, alors  $\text{Br}(\overline{U})\{\ell\}^\Gamma$  est fini.*

*Démonstration.* Nous suivons la démonstration de la proposition 6.1 et nous utilisons les mêmes notations. Les suites exactes de localisation pour la cohomologie étale à coefficients finis et le théorème de pureté donnent naissance à la suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X}^0) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{U}) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Comme la codimension de  $F$  dans  $X$  est au moins 2, le théorème de pureté pour le groupe de Brauer montre que l'application de restriction

$$\mathrm{Br}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X}^0)$$

est un isomorphisme. On a donc la suite exacte de  $\Gamma$ -modules

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{U}) \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

En prenant les invariants sous  $\Gamma$ , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma \rightarrow \mathrm{Br}(\overline{U})^\Gamma \rightarrow \mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\Gamma.$$

D'après la proposition 6.1, le groupe  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\Gamma$  est fini. Les énoncés (ii) and (iii) sont alors une conséquence de la finitude de  $\mathrm{Br}(\overline{X})\{\ell\}^\Gamma$ , laquelle vaut sous les hypothèses de (ii) ou (iii), cf. [2, Prop. 4.1].

Par fonctorialité on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma & \rightarrow & \mathrm{Br}(\overline{U})^\Gamma & \rightarrow & \mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\Gamma \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathrm{Br}(X) & \rightarrow & \mathrm{Br}(U) & & . \end{array}$$

D'après le théorème 2.1, le quotient  $\mathrm{Br}(\overline{X})^\Gamma/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(X))$  est fini. D'après la proposition 6.1, le groupe  $\mathrm{H}_{\text{ét}}^1(\overline{F}^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\Gamma$  est fini. Ceci implique que le quotient  $\mathrm{Br}(\overline{U})^\Gamma/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(U))$  est aussi fini, ce qui est l'énoncé (i). QED

**Remarque** Nous ne savons pas si (i) vaut sur tout corps  $k$  de caractéristique nulle.

## Références

- [1] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind.  $K_2$ -cohomology and the second Chow group. *Math. Annalen* **270** (1985) 165–199.

- [2] J.-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov. Good reduction of the Brauer–Manin obstruction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître. arXiv :1009.0247
- [3] P. Deligne. Hodge cycles on abelian varieties (notes by J.S. Milne). In : *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Math. **900**, Springer–Verlag, 1982.
- [4] P. Deligne. La conjecture de Weil, II. *Publ. math. I.H.É.S.* **52** (1980) 137–252.
- [5] A. Grothendieck. Le groupe de Brauer, I, II, III. In : *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, A. Grothendieck, N.H. Kuiper, éditeurs. North-Holland, 1968, pp. 46–188.
- [6] A. Grothendieck et al. *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1). Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61, réédition, *Documents mathématiques* **3**, Soc. math. France, 2003.
- [7] J.-P. Jouanolou. *Théorèmes de Bertini et applications*. Progress in math. **42**, Birkhäuser (1984).
- [8] N.M. Katz et S. Lang. Finiteness theorems in geometric classfield theory. With an appendix by Kenneth A. Ribet. *Enseign. Math. (2)* **27** (1981) 285–319.
- [9] S. Kleiman. Algebraic cycles and the Weil conjectures. In : *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, A. Grothendieck, N.H. Kuiper, éditeurs. North-Holland, 1968, pp. 359–386.
- [10] D. Lieberman. Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. *Amer. J. Math.* **90** (1968) 366–374.
- [11] T. Matsusaka. The criteria for algebraic equivalence and the torsion group. *Amer. J. Math.* **79** (1957) 53–66.
- [12] J.S. Milne. *Étale cohomology*. Princeton University Press, 1980.
- [13] J.S. Milne. *Arithmetic Duality Theorems*. 2nd edition. Kea Books, Book-Surge, 2004.
- [14] J.S. Milne. Jacobian varieties. In : *Arithmetic Geometry*, G. Cornell, J. H. Silverman eds., Springer-Verlag, 1986.
- [15] D. Mumford. *Abelian varieties*. 2nd edition. Oxford University Press, 1974.

- [16] I.I. Piatetskiĭ-Shapiro et I.R. Shafarevich. Théorème de Torelli pour les surfaces algébriques de type K3. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971) 530–572. Traduction anglaise : *Math. USSR Izvestia* **5** (1971) 547–588.
- [17] J. Riou. Realizations functors. Notes d’un exposé lors de l’école d’été franco-asiatique “Autour des motifs” à l’I.H.É.S., à paraître, disponibles sur la page <http://www.math.u-psud.fr/~riou/>
- [18] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4). Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-1964. Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**. Springer-Verlag, 1972, 1973.
- [19] *Cohomologie étale* (SGA 4 $\frac{1}{2}$ ). Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. Avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier. Lecture Notes in Math. **569**. Springer-Verlag, 1977.
- [20] A.N. Skorobogatov et Yu.G. Zarhin. A finiteness theorem for the Brauer group of abelian varieties and K3 surfaces. *J. Alg. Geom.* **17** (2008) 481–502.
- [21] A.N. Skorobogatov et Yu.G. Zarhin. The Brauer group of Kummer surfaces and torsion of elliptic curves. *J. reine angew. Math.* **666** (2012) 115–140.
- [22] C. Voisin. Some aspects of the Hodge conjecture. *Japanese J. Math.* **2** (2007) 261–296.
- [23] Yu. G. Zarhin, Poincaré duality and unimodularity, [arXiv:1112.1429v2](https://arxiv.org/abs/1112.1429v2) [math.AG] .

CNRS, UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

[jlet@math.u-psud.fr](mailto:jlet@math.u-psud.fr)

Department of Mathematics, South Kensington Campus, Imperial College London, SW7 2BZ England, U.K.

Institute for the Information Transmission Problems, Russian Academy of  
Sciences, 19 Bolshoi Karetnyi, Moscow, 127994 Russia  
a.skorobogatov@imperial.ac.uk