Quelques questions d'approximation faible pour les tores algébriques

J.-L. Colliot-Thélène et V. Suresh

Introduction

Il est bien connu que les tores algébriques définis sur un corps global ne satisfont pas nécessairement l'approximation faible : étant donné un ensemble S fini non vide de places du corps global K, et un K-tore T, le groupe des points rationnels $T(K)$ n'est pas nécessairement dense dans le produit $\prod_{v \in S} T(K_v)$.

Pour chaque place v, le groupe $T(K_v)$ est ici muni de la topologie induite par celle du corps local K_v, complété de K en la place v. C'est un groupe topologique commutatif localement compact. Notons $T(O_v) \subset T(K_v)$ son sous-groupe compact maximal. Dans plusieurs contextes, on a été amené à se poser la question d'approximation suivante, où l'on demande moins que l'approximation faible.

Question semi-locale *Le sous-groupe ouvert $T(K).\prod_{v \in S} T(O_v)$ de $\prod_{v \in S} T(K_v)$ coïncide-t-il avec $\prod_{v \in S} T(K_v)$?*

En d'autres termes, l'application naturelle de $T(K)$ vers le groupe discret $\prod_{v \in S} T(K_v)/T(O_v)$ est-elle surjective ? Lorsque l'ensemble S est réduit à une place, la question fut posée par Bruhat et Tits (voir [CTS2], Remark 8.3 p. 192).

Dans cet article, sur un corps global de caractéristique positive, nous répondons négativement à la question semi-locale (mais laissons ouverte la question de Bruhat et Tits). Nous répondons aussi négativement à la question purement locale suivante ([CTS2], Remark 8.3 p. 192).

Question locale *Soient K un corps local, T un K-tore, $T(O_K) \subset T(K)$ le sous-groupe compact maximal, $RT(K) \subset T(K)$ le sous-groupe des éléments R-équivalents à l'élément neutre. A-t-on $T(O_K).RT(K) = T(K)$?*

Enfin, lorsque K est un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, nous répondons négativement à une question soulevée par D. Bourqui. Cette question (**Question globale**, §3 ci-dessous) est apparue naturellement dans le travail [B] sur la fonction zêta des hauteurs sur une variété torique sur un corps K de fonctions d'une variable sur un corps fini. La réponse négative que nous apportons permet à Bourqui de montrer que la constante définie par Peyre [P1] et Batyrev/Tschinkel [BT] (voir le rapport [P2]) pour les variétés toriques sur un corps de nombres K doit, dans le cas fonctionnel, être multipliée par une certaine constante (à valeurs entières) non nécessairement égale à 1.

On trouvera au §1 des rappels de [CTS1]. Un bref §2 discute les questions locale et semi-locale. Au §3, on présente la question globale. Le §4 contient la description algébrique du tore que nous utilisons pour donner des contre-exemples. Le §5 contient la réponse négative à la question locale. Le §6 contient la réponse négative aux questions semi-locale et globale.

§1 Résolutions flasques et coflasques, R-équivalence : rappels

Soit L/K une extension finie de corps, galoisienne de groupe G. Etant donné un K-tore T déployé par L, c'est-à-dire un K-groupe algébrique T tel que le L-groupe $T \times_K L$ est L-isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_{m,L}$, on note $T^* = \mathrm{Hom}_{L-\mathrm{groupe}}(T_L, \mathbf{G}_{m,L})$ son groupe des caractères. C'est un G-réseau. On note $T_* = \mathrm{Hom}_{L-\mathrm{groupe}}(\mathbf{G}_{m,L}, T_L)$ le groupe des cocaractères de $T \times_K L$. C'est le G-réseau dual du G-réseau T^*, c'est-à-dire que l'on a $T^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(T_*, \mathbf{Z})$.

On sait (Endo-Miyata, Voskresenskiĭ, voir [CTS1] §1, Lemme 3) que pour tout G-réseau T_* on peut trouver une suite exacte de G-réseaux

$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0 \qquad (1)$$

avec P_* un G-module de permutation et F_* un G-module coflasque, c'est-à-dire tel que $H^1(H, F_*) = 0$ pour tout sous-groupe $H \subset G$. Une telle suite est dite *résolution coflasque* du G-réseau T_*. Si

$$0 \to F_{1*} \to P_{1*} \to T_* \to 0,$$

et

$$0 \to F_{2*} \to P_{2*} \to T_* \to 0,$$

sont deux telles résolutions, on montre ([CTS1], §1, Lemme 5 ; [CTS2], Lemma 0.6) qu'il existe un isomorphisme de G-réseaux $F_{1*} \oplus P_{2*} \simeq F_{2*} \oplus P_{1*}$. Plus précisément, si l'on note M_* le G-réseau produit fibré de $P_{1*} \to T_*$ et $P_{2*} \to T_*$, les projections $M_* \to P_{1*}$ et $M_* \to P_{2*}$ sont G-scindées ([CTS1], Lemmes 1 et 5).

La suite (1) induit une suite exacte de K-tores déployés par L

$$1 \to F \to P \to T \to 1 \qquad (2)$$

avec P un K-tore quasitrivial et F un K-tore flasque. Une telle suite est appelée une *résolution flasque* du K-tore T.

Rappelons ici que le G-module $T(L)$ des L-points d'un K-tore T déployé par L est le G-module $T_* \otimes L^\times = T_* \otimes_{\mathbf{Z}} L^\times$ équipé de l'action diagonale de G.

Deux points p, q de $T(K)$ sont dits R-équivalents s'il existe un ouvert U de la droite projective $\mathbf{P}^1_k$ et un K-morphisme $\varphi : U \to T$ tels que $p, q \in \varphi(U(K))$ (on démontre que c'est une relation d'équivalence). Comme il est établi au §5 de [CTS1], la suite exacte

$$P(K) \to T(K) \to H^1(K, F) \to 0$$

tirée de (2) par cohomologie galoisienne calcule la R-équivalence sur le groupe $T(K) = (T_* \otimes L^\times)^G$ des points K-rationnels du tore T. L'image de $P(K)$ dans $T(K)$ est exactement le sous-groupe $RT(K) \subset T(K)$ des points R-équivalents à l'élément neutre dans $T(K)$. En d'autres termes, $T(K)/R = H^1(K, F)$.

On sait (Endo-Miyata, cf. [CTS1], Prop. 2 p. 184) que lorsque le groupe G est métacyclique, i.e. a tous ses sous-groupes de Sylow cycliques, tout G-module coflasque F_* est facteur direct d'un G-module de permutation. Ceci implique $H^1(K, F) = 0$. Ainsi, si un K-tore T est déployé par une extension L/K métacyclique, on a $T(K)/R = 1$.

§2 La question locale et la question semi-locale

Soient K un corps local non archimédien et L/K une extension finie galoisienne de groupe de Galois G. Soit O_K, resp. O_L, l'anneau des entiers de K, resp. L. La valuation normalisée $v_L : L^* \to \mathbf{Z}$ donne naissance à la suite exacte de G-modules

$$1 \to O_L^\times \to L^\times \to \mathbf{Z} \to 0,$$

où l'action de G sur $\mathbf{Z}$ est triviale, la flèche $L^\times \to \mathbf{Z}$ étant donnée par la valuation (normalisée) v_L de L.

Soit T un K-tore déployé par L, T_* son groupe des cocaractères. C'est un G-réseau.

De la suite exacte de la valuation normalisée sur L on déduit la suite exacte de G-modules

$$0 \to T_* \otimes O_L^\times \to T_* \otimes L^\times \to T_* \to 0.$$

Le groupe $(T_* \otimes O_L^\times)^G \subset (T_* \otimes L^\times)^G = T(K)$ est *noté* $T(O_K)$. C'est le sous-groupe compact maximal de $T(K)$.

Le K-tore T est dit anisotrope si l'une des conditions suivantes est satisfaite : $T_*^G = 0$, ou $T^{*G} = 0$. Si T est anisotrope, alors $T(O_K) = T(K)$ et $T(K)$ est compact (comme il est bien connu, et comme il est facile à établir à partir des suites ci-dessus, cette condition nécessaire d'anisotropie est une condition suffisante.)

Commençons par commenter la question locale.

Question locale *Soit K un corps local, T un K-tore, $T(O_K) \subset T(K)$ le sous-groupe compact maximal, $RT(K) \subset T(K)$ le sous-groupe des éléments R-équivalents à l'élément neutre. A-t-on $T(O_K).RT(K) = T(K)$?*

En d'autres termes, tout élément de $T(K)$ est-il produit d'un élément de $RT(K)$ et d'un élément de $T(O_K)$? En d'autres termes encore, le sous-groupe compact maximal $T(O_K)$ rencontre-t-il toutes les classes pour la R-équivalence sur $T(K)$?

La réponse est trivialement positive si $T(K)/R = 1$. Elle est positive dans de nombreux cas.

Proposition 2.1 *La question locale a une réponse affirmative dans chacun des cas suivants.*
(i) Le K-tore T a bonne réduction.
(ii) Le K-tore T est déployé par une extension métacyclique.
(iii) Le K-tore T est anisotrope.
(iv) Le K-tore T est déployé par une extension finie galoisienne L/K et admet une résolution flasque du type

$$1 \to F \to (R_{L/K}\mathbf{G}_m)^n \to T \to 1.$$

(v) (Bourqui) Le K-tore T est déployé par une extension L/K totalement ramifiée.

Démonstration

Dans le cas (i), le tore est déployé par une extension cyclique, ce cas est un cas particulier de (ii). Dans le cas (ii), on a $T(K)/R = 1$ comme il a été rappelé au §1. Ces cas sont donc évidents. Le cas (iii) l'est aussi, car, comme il a été rappelé ci-dessus, si T est anisotrope, alors $T(O_K) = T(K)$.

Etablissons le cas (iv). Soit G le groupe de Galois de L/K. Le K-tore $R_{L/K}\mathbf{G}_m$ a le module galoisien $\mathbf{Z}[G]$ pour groupe des cocaractères. Soit

$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0$$

une suite exacte de G-réseaux du type (1), avec $P_* = (\mathbf{Z}[G])^n$ pour $n > 0$ convenable.

En tensorisant la suite de type (1) (qui est $\mathbf{Z}$-scindée) par $O_L^\times$, et en prenant la G-cohomologie de la suite exacte obtenue, on obtient la suite exacte

$$(T_* \otimes O_L^\times)^G \to H^1(G, F_* \otimes O_L^\times) \to H^1(G, P_* \otimes O_L^\times),$$

soit encore

$$T(O_K) \to H^1(G, F_* \otimes O_L^\times) \to 0,$$

tout groupe de la forme $H^r(G, \mathbf{Z}[G] \otimes M)$ avec $r > 0$ étant nul. Si l'on tensorise la suite de la valuation par le groupe abélien libre F_*, et si l'on prend la suite de cohomologie de la suite exacte courte de G-modules ainsi obtenue, on obtient la suite exacte

$$H^1(G, F_* \otimes O_L^\times) \to H^1(G, F_* \otimes L^\times) \to H^1(G, F_*).$$

Le dernier groupe est nul, car F_* est coflasque. Ainsi la flèche composée

$$T(O_K) \to H^1(G, F_* \otimes O_L^\times) \to H^1(G, F_* \otimes L^\times)$$

est surjective. Comme cette flèche coïncide avec la flèche composée $T(O_K) \to T(K) \to T(K)/R$, ceci établit l'assertion dans le cas (iv).

On notera que les K-tores normiques $R^1_{L/K}\mathbf{G}_m = \mathrm{Ker}[N_{L/K} : R_{L/K}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m]$, pour L/K extension finie galoisienne, sont du type (iv) ([CTS1], §6, Prop. 15 p. 206).

Considérons maintenant le cas (v), qui nous a été signalé par D. Bourqui. Le groupe $T(O_K)$ est le noyau de la flèche $T(K) = (T_* \otimes L^\times)^G \to {T_*}^G$ induite par la valuation (normalisée) $v_L : L^\times \to \mathbf{Z}$. L'accouplement naturel non dégénéré $T_* \times T^* \to \mathbf{Z}$ induit un homomorphisme ${T_*}^G \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ dont on vérifie qu'il est injectif (Lemme 3.1 ci-après). Ainsi $T(O_K)$ est le noyau de l'application composée

$$\phi_{K,L} : T(K) = (T_* \otimes L^\times)^G \to {T_*}^G \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z}),$$

où la première flèche est induite par la valuation v_L.

Un élément de ${T^*}^G$ correspond à un K-homomorphisme $T \to \mathbf{G}_{m,K}$. Un tel K-morphisme induit un homomorphisme $T(K) \to K^\times$ que l'on peut composer avec la valuation (normalisée) $v_K : K^\times \to \mathbf{Z}$. Ceci définit un homomorphisme

$$\psi_K : T(K) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z}).$$

Soit e l'indice de ramification de L sur K. On vérifie aisément la formule $\phi_{K,L} = e\psi_K$, qui implique en particulier que le noyau de ψ_K est $T(O_K)$ (le groupe $\mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ est sans torsion). L'application $T(L) \to \mathrm{Hom}(T^*, \mathbf{Z})$ induite par la valuation sur L est clairement surjective. L'application de restriction $\mathrm{Hom}(T^*, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ est surjective, car le groupe abélien ${T^*}^G$ est facteur direct dans T^* (le quotient étant sans torsion). Ainsi l'application composée

$$T(L) \to \mathrm{Hom}(T^*, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$$

est surjective. La composée de cette application avec l'inclusion $T(K) \subset T(L)$ est $\phi_{K,L}$. Cette application est G-équivariante, l'action de G sur le groupe $\mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ étant l'action triviale. Soit $\theta \in \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$. Soit $\beta \in T(L)$ d'image θ par l'application ci-dessus. L'image de $\alpha = \prod_{g \in G} g.\beta$ est $[L : K]\theta$. On a donc

$$e\psi_K(\alpha) = \phi_{K,L}(\alpha) = [L : K]\theta \in \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z}).$$

Supposons l'extension L/K totalement ramifiée, i.e. $e = [L : K]$. Alors $\psi_K(\alpha) = \theta$ dans le groupe abélien libre $\mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$. Comme α est la norme de $\beta \in T(L)$, ceci établit

$$\psi_K(N_{L/K}(T(L))) = \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z}).$$

Soit $1 \to F \to P \to T \to 1$ une résolution flasque du K-tore T par des K-tores déployés par L. L'homomorphisme induit $P(L) \to T(L)$ est surjectif, l'application composée $P(L) \to T(L) \to T(K) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ l'est donc aussi, où $T(L) \to T(K)$ est la norme. Ceci implique que l'application composée $P(K) \to T(K) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ est surjective. La flèche $T(K) \to \mathrm{Hom}({T^*}^G, \mathbf{Z})$ est ici ψ_K, son noyau est $T(O_K)$. On voit donc que $T(K)$ est engendré par $T(O_K)$ et l'image de $P(K) \to T(K)$, qui est le sous-groupe $RT(K)$. $\square$

Discutons maintenant la **question semi-locale**. Soient K un corps global et S un ensemble fini non vide de places de K. Soit T un K-tore déployé par une extension finie galoisienne L/K de groupe de Galois G. Soit

$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0$$

une suite exacte de G-réseaux du type (1), induisant une suite exacte de K-tores

$$1 \to F \to P \to T \to 1.$$

On a les inclusions évidentes suivantes :

$$T(K).\prod_{v\in S} T(O_v) \subset T(K).\prod_{v\in S}(T(O_v).RT(K_v)) \subset \prod_{v\in S} T(K_v).$$

Le premier groupe est un sous-groupe ouvert de $\prod_{v\in S} T(K_v)$ contenant $T(K)$. Le K-tore P est quasi-trivial, donc est un ouvert de Zariski d'un espace affine. Ainsi $P(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} P(K_v)$. Ceci implique que l'image de $P(K)$ dans $T(K)$ est dense dans le produit des images des $P(K_v)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$, c'est-à-dire dans $\prod_{v\in S} RT(K_v)$. Tout point de $\prod_{v\in S} RT(K_v)$ peut donc s'écrire comme le produit d'un élément d'un élément de $T(K)$ (dans l'image de $P(K)$) et d'un élément de l'ouvert $\prod_{v\in S} T(O_v)$. Ainsi *la première inclusion ci-dessus est une égalité.*

Ceci permet de reformuler la **question semi-locale** de la façon suivante :

L'application naturelle $T(K).\prod_{v\in S} T(O_v) \to \prod_{v\in S} H^1(K_v, F)$ *est-elle surjective ?*

Ceci montre aussi :

Proposition 2.2 *Une réponse affirmative à la question locale (pour chaque K_v-tore $T\times_K K_v$) implique une réponse affirmative à la question semi-locale.* $\square$

§3 La question globale (cas fonctionnel)

Soient $\mathbf{F}$ un corps fini et K un corps de fonctions d'une variable sur le corps $\mathbf{F}$, c'est-à-dire une extension de type fini, de degré de transcendance un, du corps $\mathbf{F}$. On ne suppose pas le corps $\mathbf{F}$ algébriquement fermé dans K. Soit L/K une extension finie de corps. Soit Ω_L l'ensemble des places de L, et pour $w \in \Omega_L$, soient L_w le complété de L en w et O_w son anneau des entiers. On note encore $w : L_w^\times \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée (i.e. d'image le groupe $\mathbf{Z}$ tout entier). Le corps résiduel $\mathbf{F}_w$ du corps local L_w est une extension finie de $\mathbf{F}$. Soit $\mathbf{I}_L$ le groupe des idèles de L, c'est-à-dire le produit restreint des $L_w^\times$ pour $w \in \Omega_L$. On note

$$\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$$

l'homomorphisme qui envoie la famille $\{y_w\}_{w\in\Omega_L}$ sur $\sum_{w\in\Omega_L}[\mathbf{F}_w : \mathbf{F}]w(y_w)$. Cet homomorphisme est trivial sur l'image diagonale de $L^\times$ dans $\mathbf{I}_L$ (loi de réciprocité, "le nombre des zéros est égal au nombre des pôles"). Il est aussi trivial sur le sous-groupe compact maximal $\prod_{w\in\Omega_L} O_w^\times$.

Si l'extension L/K est de plus galoisienne de groupe G, le groupe G agit naturellement sur $\mathbf{I}_L$, et trivialement sur $\mathbf{Z}$. On vérifie que l'homomorphisme $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ est G-équivariant.

Soient $\mathbf{F}, K, L$ comme ci-dessus, avec l'extension L/K galoisienne de groupe G. Soit T un K-tore déployé par L. L'homomorphisme $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ induit un G-homomorphisme

$$\deg_{L,\mathbf{F},T} : T_* \otimes \mathbf{I}_L \to T_*,$$

qui est G-équivariant, l'action de G à gauche étant l'action simultanée sur T_* et $\mathbf{I}_L$. L'homomorphisme ainsi obtenu est fonctoriel en les K-tores déployés par L. Il est nul sur $T_* \otimes L^\times$ et sur $T_* \otimes (\prod_{w\in\Omega_L} O_w^\times)$.

Cet homomorphisme induit sur les points fixes sous G un homomorphisme de groupes abéliens

$$\deg_{L,\mathbf{F},T} : T(\mathbf{A}_K) = (T_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to T_*^G,$$

c'est-à-dire des idèles de T (sur K) vers T_*^G. Cet homomorphisme s'annule sur le sous-groupe compact maximal des idèles de T, qui est $\prod_{v\in\Omega_K} T(O_v) = (T_* \otimes (\prod_{w\in\Omega_L} O_w^\times))^G$ et sur $T(K) \subset T(\mathbf{A}_K)$. L'homomorphisme ainsi obtenu est fonctoriel en les K-tores déployés par le corps L.

Soit
$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0$$
une suite exacte de G-réseaux du type (1) (résolution coflasque de T_*).

Question globale *L'application composée de* $\deg_{L,\mathbf{F},P} : P(\mathbf{A}_K) = (P_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to P_*^G$ *et de* $P_*^G \to T_*^G$ *a-t-elle même image que l'application* $\deg_{L,\mathbf{F},T} : T(\mathbf{A}_K) = (T_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to T_*^G$ *?*

(Par fonctorialité, la première image est contenue dans la seconde.)

On voit immédiatement que la réponse à cette question ne dépend pas du choix du corps fini $\mathbf{F} \subset K$. En utilisant les propriétés des résolutions flasques et coflasques, on voit aussi que la réponse à cette question ne dépend que du K-tore T, elle ne dépend ni du choix du corps de déploiement L/K ni du choix de la résolution coflasque (1) de T_*.

Montrons que cette question est équivalente à celle rencontrée par Bourqui dans [B]. Soit G un groupe fini et M un G-réseau. On note M° le G-réseau $\mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z})$.

Lemme 3.1 *Soit M un G-réseau. L'inclusion $M^G \subset M$ induit une application injective $(M^\circ)^G \hookrightarrow (M^G)^\circ$ à conoyau fini.*

Démonstration Considérons la suite exacte
$$0 \to M^G \to M \to R \to 0$$
définissant R comme le conoyau de l'inclusion naturelle. Le groupe abélien R est sans torsion, la suite est donc scindée comme suite de groupes abéliens. On a donc la suite exacte de G-modules duale
$$0 \to R^\circ \to M^\circ \to (M^G)^\circ \to 0.$$
Soit $\varphi \in (R^\circ)^G = \mathrm{Hom}_G(R, \mathbf{Z})$. Pour tout $r \in R$, on a $N_G r = 0$. On a donc $0 = \varphi(N_G r) = N_G(\varphi(r)) = n(\varphi(r))$, où $n > 0$ est l'ordre de G. Ainsi $\varphi(r) = 0$ pour tout $r \in R$, i.e. $\varphi = 0$. Ceci établit $(R^\circ)^G = 0$. Le début de la suite exacte de G-cohomologie associée à la dernière suite exacte s'écrit donc
$$0 \to (M^\circ)^G \to (M^G)^\circ \to H^1(G, R^\circ),$$
ce qui établit le lemme. $\square$

Soit $\chi \in T^{*G}$, c'est-à-dire un caractère, défini sur K, du K-tore T. La donnée d'un tel élément χ équivaut à celle d'un homomorphisme G-équivariant $T_* \to \mathbf{Z}$. Celui-ci induit un homomorphisme G-équivariant $T_* \otimes \mathbf{I}_L \to \mathbf{I}_L$ et donc, en prenant les points fixes sous G, un homomorphisme $T(\mathbf{A}_K) \to \mathbf{I}_K$. On peut composer ceci avec l'application $\deg_{K,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_K \to \mathbf{Z}$. On définit ainsi une application bilinéaire
$$T(\mathbf{A}_K) \times T^{*G} \to \mathbf{Z}$$
soit encore
$$\deg_{T,K,\mathbf{F}} : T(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z}),$$
qui est nulle sur l'image de $T(K)$ dans $T(\mathbf{A}_K)$ et sur tout élément de $\prod_{v\in\Omega} T(O_v)$. L'application ainsi définie est fonctorielle en le K-tore T. Elle ne dépend pas du choix du corps de déploiement L/K de T. Lorsque le corps $\mathbf{F}$ est algébriquement fermé dans K, elle coïncide avec l'application

$\deg_T$ définie au §2.3 de [B]. Un calcul analogue au calcul local fait au §2 (formule $\phi_{K,L} = e\psi_K$) établit le lemme suivant.

Lemme 3.2 *La flèche composée*

$$T(\mathbf{A}_K) \to T_*^G \hookrightarrow \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z}),$$

où la première flèche est $\deg_{L,\mathbf{F},T}$ *et la seconde flèche l'inclusion naturelle du Lemme 3.1, est égale à* $[L : K].\deg_{T,K,\mathbf{F}}$. $\square$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\bullet, \mathbf{Z})$ à la suite (1), on obtient une suite exacte de G-réseaux

$$0 \to T^* \to P^* \to F^* \to 0,$$

une flèche $T^{*G} \to P^{*G}$ et une flèche

$$\mathrm{Hom}(P^{*G}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z}).$$

L'application composée

$$\deg_{P,K,\mathbf{F}} : P(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(P^{*G}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$$

a son image contenue dans celle de l'application

$$\deg_{T,K,\mathbf{F}} : T(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z}).$$

Le problème rencontré dans [B] est le suivant : *Ces deux images coïncident-elles ?* Lorsque $\mathbf{F}$ est algébriquement fermé dans K, le quotient des deux images est le groupe fini noté $\mathcal{K}_T$ dans [B] (§2.7). Le Lemme 3.2 montre que le problème se traduit immédiatement en la question globale.

Comme le note Bourqui ([B], Prop. 2.15), il est des cas où la question globale a une réponse positive.

(a) C'est le cas si le K-tore T est anisotrope, car alors $T_*^G = 0$ et $T^{*G} = 0$.

(b) C'est le cas si le corps des constantes de K coïncide avec celui de L, i.e. est algébriquement fermé dans L. Bourqui montre ([B], §2.9, Lemme 2.18) que sous l'hypothèse que le corps $\mathbf{F}$ est algébriquement fermé dans K et dans L, l'application $\deg_{T,K,\mathbf{F}} : T(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$ envoie $N_G T(\mathbf{A}_L) \subset T(\mathbf{A}_K)$ surjectivement sur $\mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$. Comme par ailleurs $P(\mathbf{A}_L)$ se surjecte sur $T(\mathbf{A}_L)$, ceci établit la surjectivité voulue.

(c) C'est le cas si le K-tore T satisfait l'approximation faible ([B], Lemme 2.13 et Prop. 2.15). A ce sujet, on a l'énoncé plus général suivant.

Proposition 3.3 *Soit T un K-tore déployé par l'extension galoisienne finie L/K de groupe de Galois G. Soit S l'ensemble fini des places de K telles que le groupe de Galois local ne soit pas métacyclique. Si la réponse à la question semi-locale pour T et S est affirmative, i.e. si le sous-groupe ouvert $T(K).\prod_{v \in S} T(O_v)$ de $\prod_{v \in S} T(K_v)$ coïncide avec $\prod_{v \in S} T(K_v)$, alors la question globale pour T a une réponse affirmative.*

Démonstration Soit

$$1 \to F \to P \to T \to 1$$

une résolution flasque de T par des K-tores déployés par L. En toute place v de K non dans S, le théorème d'Endo et Miyata rappelé au §1 assure que le K_v-tore $F \times_K K_v$ est un facteur direct d'un K_v-tore quasitrivial, ce qui implique $H^1(K_v, F) = 0$, et donc $P(K_v) \to T(K_v)$ surjectif.

Soit $\xi = \{t_v\}_{v\in\Omega} \in T(\mathbf{A}_K)$. Si la question semi-locale pour T et S a une réponse affirmative, il existe $t \in T(K)$ tel que toute composante de $t.\xi$ pour $v \in S$ soit dans $T(O_v)$. En toute place v non dans S, la composante de $t.\xi$ est dans l'image de $P(K_v)$. On voit ainsi que $t.\xi$ est le produit d'un idèle appartenant à $\prod_{v\in\Omega} T(O_v)$ et d'un idèle dans l'image de $P(\mathbf{A}_K) \to T(\mathbf{A}_K)$. L'application $\deg_{T,K,\mathbf{F}} : T(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$ est nulle sur le groupe compact $\prod_{v\in\Omega} T(O_v)$, et par réciprocité elle est nulle sur $T(K) \subset T(\mathbf{A}_K)$. On voit donc que l'image de ξ dans $\mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$ est l'image d'un élément de l'application composée $P(\mathbf{A}_K) \to T(\mathbf{A}_K) \to \mathrm{Hom}(T^{*G}, \mathbf{Z})$. $\square$

(d) Le rapporteur note que l'on peut aussi, dans le cas global ici considéré, établir l'analogue du cas (iv) de la Proposition 2.1.

§4. Construction et étude d'un réseau muni d'une action du groupe de Klein.

Etant donné un groupe fini G, on note $\mathbf{Z}$ le réseau $\mathbf{Z}$ avec action triviale de G et on note $\mathbf{Z}[G]$ le G-réseau standard de $\mathbf{Z}$-base les éléments de G. On note I_G le noyau de l'augmentation $\varepsilon_G : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$. On note $N_G = \sum_{g\in G} g \in \mathbf{Z}[G]$. On sait ([CTS1], Prop. 15 p. 206) que si les éléments $\sigma_i, i \in I$, engendrent le groupe G, alors le G-homomorphisme $\oplus_{i\in I}\mathbf{Z}[G] \to I_G$ qui sur la coordonnée i envoie 1 sur $1 - \sigma_i$ est surjectif et a pour noyau un G-module coflasque.

Soit $G =< \sigma, \tau >$ avec $\sigma^2 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma$. Soit T_* le G-réseau noyau de l'homomorphisme

$$\mathbf{Z}[G] \oplus I_G \to \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G]$$

donné par

$$(t, x) \mapsto (\sigma t - t - x - \tau x, \tau t - t - x - \sigma x).$$

Lemme 4.1

(i) L'application composée de l'inclusion $T_* \subset \mathbf{Z}[G] \oplus I_G$ et de la projection $\mathbf{Z}[G] \oplus I_G \to \mathbf{Z}[G]$ est injective.

(ii) On a la suite exacte de G-réseaux

$$0 \to \mathbf{Z} \to T_* \to I_G \to 0,$$

où l'application $\mathbf{Z} \to T_* \hookrightarrow \mathbf{Z}[G] \oplus I_G$ est donnée par $1 \mapsto (N_G, 0)$ et où l'application $T_* \to I_G$ est la composée de $T_* \hookrightarrow \mathbf{Z}[G] \oplus I_G$ et de la projection sur le second facteur.

La preuve est laissée au lecteur. Bien que nous n'en ayons pas besoin, notons qu'on a une suite exacte longue

$$0 \to T_* \to \mathbf{Z}[G] \oplus I_G \to (1-\sigma)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \oplus (1-\tau)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sigma) \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Dans cette suite, chacun des G-modules $(1-\sigma)(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ et $(1-\tau)(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\sigma)$ est un G-sous-module de $\mathbf{Z}[G]$, la flèche composée

$$\mathbf{Z}[G] \oplus I_G \to (1-\sigma)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \oplus (1-\tau)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sigma) \subset \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G]$$

est la flèche $(t, x) \mapsto (\sigma t - t - x - \tau x, \tau t - t - x - \sigma x)$ dont le noyau définit T_*, l'application

$$(1-\sigma)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \oplus (1-\tau)(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sigma) \to \mathbf{Z}$$

envoie $((1-\sigma)(a + b\tau), (1-\tau)(c + d\sigma))$ sur $a + c - b - d$.

L'homomorphisme $\varphi : \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] \to I_G$ donné par $(a, b) \mapsto a(1-\sigma) + b(1-\tau)$ donne une résolution coflasque

$$0 \to F_* \to \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] \to I_G \to 0$$

de I_G. L'image réciproque
$$0 \to \mathbf{Z} \to P_* \to \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] \to 0$$
de la suite du Lemme 4.1 par φ définit une extension de $\mathbf{Z}[G]\oplus\mathbf{Z}[G]$ par $\mathbf{Z}$. Toute telle extension de G-réseaux est scindée ($H^1(G,\mathbf{Z})=0$). Il existe donc un G-relèvement $\mathbf{Z}[G]\oplus\mathbf{Z}[G] \to T_*$ de φ. On peut prendre pour ce relèvement la flèche qui à $(1,0)$ associe $(\sigma+\sigma\tau, 1-\sigma)$ et à $(0,1)$ associe $(\tau+\sigma\tau, 1-\tau)$. (Deux tels relèvements diffèrent par une application $(a,b) \mapsto (an+bm)(N_G, 0)$, où n et m peuvent être pris arbitraires.)

L'image réciproque de la résolution coflasque
$$0 \to F_* \to \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] \to I_G \to 0$$
par la flèche $T_* \to I_G$ est une résolution coflasque de T_* :
$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0,$$
où $P_* = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G]$, la flèche composée
$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] = P_* \to T_* \hookrightarrow \mathbf{Z}[G] \oplus I_G \to \mathbf{Z}[G]$$
(la dernière flèche étant la projection sur le facteur $\mathbf{Z}[G]$ de $\mathbf{Z}[G] \oplus I_G$) étant donnée par
$$(a,b,c) \mapsto N_G a + (\sigma+\sigma\tau)b + (\tau+\sigma\tau)c.$$

§5. La question locale a une réponse négative.

Soit K un corps local de corps résiduel le corps fini $\mathbf{F}$, supposé de caractéristique $p \neq 2$. Soit $v : K^\times \to \mathbf{Z}$ la valuation normalisée. Le groupe $H^1(K, \mathbf{Z}/2)$ est alors isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$. Soit L/K l'unique extension galoisienne de K de groupe $G \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$. Soit w la valuation normalisée sur L. L'extension L/K est ramifiée, l'indice de ramification est 2, pour $\alpha \in K^\times$, on a $w(\alpha) = 2v(\alpha)$. Le corps résiduel $\mathbf{F}_w$ de L est une extension quadratique de $\mathbf{F}$.

Soit π une uniformisante de K, et soit $u \in K^\times$ une unité qui n'est pas un carré. Soient $L_1 = K(\sqrt{\pi}) \subset L$ et $L_2 = K(\sqrt{u}) \subset L$. Les sous-extensions L_1/K et L_2/K de L/K sont quadratiques. Appelons $\sigma \in G$ l'élément non trivial fixant L_1 et $\tau \in G$ l'élément non trivial fixant L_2.

La résolution coflasque de G-modules
$$0 \to F_* \to P_* \to T_* \to 0$$
considérée au §4 induit sur les K-points des K-tores déployés par L associés un homomorphisme $K^\times \times L^\times \times L^\times = P(K) \to T(K) \subset L^\times \times L^{\times,1}$, où $L^{\times,1} \subset L^\times$ est le sous-groupe des éléments de norme 1. L'image de $P(K)$ dans $T(K)$ est le sous-groupe $RT(K)$ des éléments R-équivalents à 1. La composée de l'inclusion $T(K) \subset L^\times \times L^{\times,1}$ et de la projection sur le premier facteur de ce dernier produit définit un plongement $T(K) \subset L^\times$.

L'homomorphisme composé $K^\times \times L^\times \times L^\times = P(K) \to T(K) \subset L^\times$ est alors donné par
$$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \alpha.((1+\tau)\sigma\beta).((1+\sigma)\tau\gamma) \in L^\times$$
La valuation normalisée w d'un tel élément de $L^\times$ est paire. En effet pour tout élément $\alpha \in K^\times \subset L^\times$ on a $w(\alpha) = 2v(\alpha)$ et pour tout élément $\delta \in L^\times$ et tout $g \in G$, on a $w(\delta.g(\delta)) = 2w(\delta)$.

Supposons que -1 est un carré dans $\mathbf{F}$, donc dans K. Soit $i \in K$ tel que $i^2 = -1$.

Considérons l'élément $(\sqrt{u\pi}, i) \in L^\times \times L^\times$. Comme $i \in K$, on a $N_G(i) = 1$, donc $(\sqrt{u\pi}, i) \in L^\times \times L^{\times,1}$. Par ailleurs $\sigma(\sqrt{u\pi})/\sqrt{u\pi} = -1 = i\tau(i)$ et $\tau(\sqrt{u\pi})/\sqrt{u\pi} = -1 = i\sigma(i)$. Donc $(\sqrt{u\pi}, i)$ appartient à $T(K) \subset L^\times \times L^{\times,1}$. L'image de $(\sqrt{u\pi}, i)$ par la projection sur le premier facteur est $\sqrt{u\pi} \in L^\times$, dont la valuation normalisée est 1.

Comme l'image du sous-groupe compact maximal de $T(K)$ dans $L^\times$ est dans $O_L^\times$, on conclut que, via la projection $T(K) \to L^\times$ donnée par le premier facteur, l'image du sous-groupe engendré par le sous-groupe compact maximal de $T(K)$ et le sous-groupe image de $P(K)$ consiste en des éléments de valuation normalisée paire de $L^\times$, alors qu'il existe un élément de $T(K)$ dont l'image dans $L^\times$ est de valuation normalisée 1. Ceci établit $T(K) \neq T(O_K).RT(K)$. $\square$

D'après la Proposition 2.2, la réponse négative à la question semi-locale, que nous allons donner au §6, donne aussi une réponse négative à la question locale. Mais d'une part le calcul du présent paragraphe est utilisé au §6, d'autre part il vaut aussi pour un corps local K de caractéristique nulle.

§6. Les questions semi-locale et globale ont une réponse négative.

Soit $\mathbf{F}$ un corps fini de caractéristique impaire, tel que -1 soit un carré dans $\mathbf{F}$. Soit $\mathbf{F}'$ l'extension quadratique de $\mathbf{F}$. Soient $K = \mathbf{F}(\lambda)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbf{F}$, puis $L_1 = \mathbf{F}(\sqrt{\lambda})$, $L_2 = \mathbf{F}'(\lambda)$ et $L = \mathbf{F}'(\sqrt{\lambda})$.

Le groupe de Galois G de L/K est $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 =< \sigma, \tau >$, où σ est l'élément non trivial qui laisse fixe L_1 et τ l'élément non trivial qui laisse fixe L_2.

Soit T_* comme au §4. On dispose donc du G-homomorphisme

$$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] = P_* \to T_*$$

qui, composé avec la projection de $T_* \subset \mathbf{Z}[G] \oplus I_G$ sur le premier facteur, se lit

$$(a, b, c) \mapsto N_G a + (\sigma + \sigma\tau)b + (\tau + \sigma\tau)c \in \mathbf{Z}[G].$$

Comme au §3, on note $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ le degré relatif au corps de base $\mathbf{F}$.

Proposition 6.1 *L'image de l'application composée de* $\deg_{L,\mathbf{F},P} : P(\mathbf{A}_K) = (P_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to P_*^G$ *et de* $P_*^G \to T_*^G$ *est strictement contenue dans l'image de l'application* $\deg_{L,\mathbf{F},T} : T(\mathbf{A}_K) = (T_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to T_*^G$.

Démonstration Pour établir cette proposition, il suffit de montrer les deux faits suivants :

(a) Considérons l'application composée

$$P(\mathbf{A}_K) = (P_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to P_*^G \to T_*^G \to \mathbf{Z}[G]^G \simeq \mathbf{Z},$$

où le dernier isomorphisme $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}$ est l'inverse de l'application envoyant 1 sur N_G, et où la flèche $T_*^G \to \mathbf{Z}[G]^G$ est induite par la projection de $T_* \subset \mathbf{Z}[G] \oplus I_G$ sur le premier facteur. L'image de cette application composée est contenue dans $4\mathbf{Z}$.

(b) L'image de l'application composée

$$T(\mathbf{A}_K) = (T_* \otimes \mathbf{I}_L)^G \to T_*^G \to \mathbf{Z}[G]^G \simeq \mathbf{Z},$$

contient $2 \in \mathbf{Z}$.

Etablissons le point (a). L'application considérée est obtenue de la façon suivante. On considère le G-homomorphisme $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[G]$ donné par

$$(a, b, c) \mapsto N_G a + (1 + \tau)\sigma b + (1 + \sigma)\tau c$$

et l'homomorphisme $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$. On tensorise

$$(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G]) \otimes \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}[G]$$

et on prend les points fixes sous G. Ceci donne

$$\mathbf{I}_K \oplus (\mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{I}_L)^G \oplus (\mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{I}_L)^G \to (\mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{I}_L)^G \to \mathbf{Z}[G]^G = \mathbf{Z}N_G,$$

qu'on identifie à

$$\mathbf{I}_K \oplus \mathbf{I}_L \oplus \mathbf{I}_L \to \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z},$$

où $\mathbf{I}_K \to \mathbf{I}_L$ est l'inclusion naturelle, la première application $\mathbf{I}_L \to \mathbf{I}_L$ est donnée par $\xi \mapsto (1+\tau)\sigma\xi$, la seconde par $\eta \mapsto (1+\sigma)\tau\eta$, et la flèche $\mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ est $\deg_{L,\mathbf{F}}$. La composée de l'application diagonale $\mathbf{I}_K \to \mathbf{I}_L$ et de $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ est $4.\deg_{K,\mathbf{F}}$. L'application degré $\deg_{L,\mathbf{F}} : \mathbf{I}_L \to \mathbf{Z}$ est G-équivariante. Ainsi l'image de $(1+\tau)\sigma\xi \in \mathbf{I}_L$ dans $\mathbf{Z}$ appartient à $2\deg_{L,\mathbf{F}}(\mathbf{I}_L) \subset \mathbf{Z}$. Mais pour tout complété L_w de L le corps résiduel $\mathbf{F}_w$ contient $\mathbf{F}'$, et donc $[\mathbf{F}_w : \mathbf{F}]$ est pair. On a donc $\deg_{L,\mathbf{F}}(\mathbf{I}_L) \subset 2.\mathbf{Z}$, et l'image de $(1+\tau)\sigma\xi \in \mathbf{I}_L$ dans $\mathbf{Z}$ est dans $4.\mathbf{Z}$. L'argument est le même pour l'image de $(1+\sigma)\tau\eta$.

Pour établir le point b), considérons simplement la place v de K définie par $t = 0$. Il y a une seule place w de L au-dessus de v, et l'extension locale L_w/K_v est $\mathbf{F}'((\sqrt{\lambda}))/\mathbf{F}((\lambda))$, elle est du type considéré au §5. L'application composée

$$T(K_v) \subset T(\mathbf{A}_K) \to T_*^G \to \mathbf{Z}[G]^G \simeq \mathbf{Z}$$

envoie $(t,x) \in T(K_v) \subset L_w^\times \times L_w^{\times,1}$ sur $[\mathbf{F}_w : \mathbf{F}_v]w(t) = [\mathbf{F}' : \mathbf{F}]w(t) = 2w(t)$, où w est la valuation normalisée de L_w. On a vu au §5 qu'il existe un élément $(t,x) \in T(K_v)$ avec $w(t) = 1$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Ainsi la question globale (§3) a une réponse négative. D'après la Proposition 3.3, ceci implique que la question semi-locale (sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini) a une réponse négative.

Remerciements
Ce travail a été entrepris en mai 2004, lors d'un séjour du second auteur (V.S.) au laboratoire de Mathématiques de l'Université Paris-Sud. Ce séjour a été rendu possible grâce au soutien du Centre franco-indien pour la recherche avancée (CEFIPRA, IFCPAR), projet numéro 2501-1.

Bibliographie

[BT] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel, Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori, Internat. Math. Research Notices **12** (1995) 591–635.

[B] D. Bourqui, Constante de Peyre des variétés toriques en caractéristique positive, prépublication 2004, disponible sur le serveur arXiv sous la référence math.NT/0501409.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **10** (1977) 175–229.

[CTS2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : Applications, J. Algebra **106** (1987) 148–205.

[P1] E. Peyre, Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano, Duke Math. J. **79** (1995) 101–218.

[P2] E. Peyre, Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesure de Tamagawa, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **15** (2003) 319–348.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques,
UMR 8628,
Bâtiment 425,
Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay
FRANCE
colliot@math.u-psud.fr

Venapally Suresh,
Department of Mathematics and Statistics,
University of Hyderabad,
P.O. Central University,
Gachibowli,
Hyderabad 500 046,
Andhra Pradesh,
INDE
vssm@uohyd.ernet.in