Clay Mathematics Proceedings
Volume 9, 2010

Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis

Jean-Louis Colliot-Thélène et Tamás Szamuely

1. Introduction

Soient k un corps fini, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k)$ et ℓ un nombre premier inversible dans k. Considérons une variété projective, lisse, géométriquement intègre X, de dimension d. D'après la conjecture de Tate, l'application cycle à valeurs dans la cohomologie étale ℓ-adique induit une *surjection*

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \twoheadrightarrow H^{2i}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell(i))^G. \tag{1}$$

Une forme équivalente de la conjecture est la surjectivité du morphisme

$$CH^i(\overline{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \to \bigcup_U H^{2i}(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell(i))^U \tag{2}$$

où $\overline{X} := X \times_k \bar{k}$ et U parcourt le système des sous-groupes ouverts de G. La forme plus forte ci-dessus en résulte par un argument de restriction-corestriction.

On peut également considérer des formes entières de ces énoncés, et se demander si les morphismes

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^{2i}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(i))^G \tag{3}$$

ou

$$CH^i(\overline{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to \bigcup_U H^{2i}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(i))^U \tag{4}$$

induits par l'application cycle sont surjectifs. Ici le deuxième énoncé de surjectivité est a priori plus faible.

Comme nous allons le rappeler dans la section 2, on ne s'attend pas à ce que les formes entières de la conjecture ci-dessus soient vraies. Néanmoins, il est raisonnable d'espérer la surjectivité de (3) et (4) pour $i = d - 1$, i.e. pour les 1-cycles.

Dans ce cas, la surjectivité de (4) a été conditionnellement démontrée par Chad Schoen :

Théorème 1.1. (Schoen [**15**]) *Soient k, G et X comme ci-dessus. Supposons la conjecture de Tate connue pour les diviseurs sur une surface projective et lisse sur un corps fini. Alors le morphisme*

$$CH_1(\overline{X}) \otimes \mathbf{Z}_\ell \to \bigcup_U H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d-1))^U$$

est surjectif, où U parcourt le système des sous-groupes ouverts de G.

Notons que la conjecture de Tate pour les diviseurs sur une surface au-dessus d'un corps fini peut être perçue comme un analogue de la finitude hypothétique du groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne d'une courbe sur un corps de nombres.

Nous expliquons la démonstration de Schoen (avec quelques modifications) dans les sections 3, 4 et 5.

Au paragraphe 6, on voit que le théorème de Schoen a des conséquences sur l'existence de zéro-cycles sur certaines variétés définies sur un corps de fonctions d'une variable sur la clôture algébrique d'un corps fini. Voici un cas particulier concret :

Corollaire 1.2. *Soient $\bar{k}$ et X comme ci-dessus. Supposons qu'il existe un $\bar{k}$-morphisme propre surjectif $f : \overline{X} \to \overline{C}$, avec $\overline{C}$ une $\bar{k}$-courbe propre lisse. Supposons en outre que la fibre générique de f est une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 et de degré premier à $\mathrm{car}(k)$ dans un espace projectif, et que chacune des fibres de f possède une composante de multiplicité 1. Si la conjecture de Tate pour les diviseurs sur les surfaces projectives lisses sur un corps fini est vraie, alors le pgcd des degrés des multisections de $\overline{X} \to \overline{C}$ est égal à 1.*

2. Généralités sur la conjecture de Tate à coefficients entiers

On entend souvent dire : la conjecture de Hodge à coefficients entiers est fausse, il n'est pas raisonnable d'énoncer la conjecture de Tate avec des coefficients entiers. Quelle est la situation ?

Chacune de ces conjectures porte sur l'image d'une application cycle émanant du groupe de Chow $CH^r(X)$ des cycles de codimension r sur une variété projective et lisse X de dimension d, à valeurs dans un groupe de cohomologie. Il s'agit de $H^{2r}(X, \mathbf{Z})$ pour Hodge et de $H^{2r}_{\text{ét}}(X \times_k \overline{k}, \mathbf{Z}_\ell(r))$ pour Tate (dans cette section on va distinguer les groupes de cohomologie étale des groupes de cohomologie singulière par des indices pour ne pas induire une confusion). On trouvera dans le survol [**23**] de Voisin un état des lieux pour la conjecture de Hodge.

Si l'on croit à ces conjectures à coefficients rationnels, la variante entière peut être mise en défaut de deux façons :

(a) on trouve une classe de cohomologie de torsion qui n'est pas la classe d'un cycle ;

(b) on trouve une classe de cohomologie d'ordre infini qui n'est pas dans l'image de l'application cycle, mais qui donne un élément de torsion dans son conoyau.

Pour la conjecture de Hodge entière, il y a des contre-exemples de type (a) dus à Atiyah et Hirzebruch [**1**], reconsidérés plus récemment par Totaro ([**20**], [**21**]), pour les groupes $H^{2r}(X, \mathbf{Z})$ avec $r \geq 2$. L'exemple de dimension minimale chez eux est une variété de dimension 7, avec une classe de torsion dans $H^4(X, \mathbf{Z})$. Dans la littérature (par exemple dans Milne [**10**], Aside 1.4) il est affirmé que l'on peut adapter ces exemples pour donner des contre-exemples à la conjecture de Tate entière sous la forme (4), mais à notre connaissance aucune démonstration n'a été écrite. Voici donc une esquisse de démonstration qui met en relief les modifications à faire par rapport au cas analytique discuté dans [**1**]. Il s'agit de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.1.

(1) *Soit V une variété projective et lisse sur un corps algébriquement clos. Pour tout $\ell \geq i$ inversible sur V les opérations de Steenrod de degré impair s'annulent sur la classe de tout cycle algébrique dans le groupe $H^{2i}_{ét}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(i))$.*

(2) *Au-dessus de tout corps algébriquement clos, pour tout premier ℓ différent de la caractéristique, il existe une intersection complète lisse $Y \subset \mathbf{P}^N$, un groupe fini G agissant librement sur Y, une classe c de ℓ-torsion dans $H^4_{ét}(Y/G, \mathbf{Z}_\ell(2))$ et une opération de Steenrod de degré impair qui n'annule pas l'image de c dans $H^4_{ét}(Y/G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(2))$.*

Ici pour $\ell > 2$ premier « opération de Steenrod de degré impair » veut dire un composé d'opérations de Steenrod $\mathcal{P}^j$ et d'une opération de Bockstein. Les opérations $\mathcal{P}^j : H^i_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{i+2j(\ell-1)}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ en cohomologie étale ont été définies par Mme Raynaud dans [**14**]. Pour $\ell = 2$ on utilise des opérations $Sq^j : H^i_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^{i+j}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, également définies dans [**14**].

Si le corps de base est une clôture algébrique $\overline{F}$ d'un sous-corps F, toute classe de torsion dans $H^{2i}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}_\ell(i))$ est invariante par un sous-groupe ouvert de Gal $(\overline{F}|F)$, donc pour F fini le théorème nous fournit un contre-exemple du type (a) à la surjectivité des applications (3) et (4).

Esquissons une démonstration du théorème qui nous a été généreusement communiquée par Burt Totaro. Pour démontrer (1), la première observation est que par le théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs de Jouanolou ([**5**], Example 15.3.6) pour ℓ premier à $(i-1)!$ toute classe de cycle dans $H^{2i}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(i))$ est combinaison linéaire de classes de Chern $c_i(E)$ de fibrés vectoriels E sur X. Il suffit donc de démontrer l'énoncé d'annulation pour les $c_i(E)$. Un calcul d'opérations de Steenrod montre que l'annulation vaut pour E si et seulement si elle vaut pour $E \otimes L$ avec L très ample de rang un. Ainsi, on peut supposer que E est engendré par ses sections globales, et a fortiori qu'il est la tirette du fibré tautologique d'une grassmannienne. L'énoncé résulte alors de la fonctorialité contravariante des $\mathcal{P}^j$ et de la trivialité de la cohomologie d'une grassmannienne en degrés impairs ([**8**], exposé VII, proposition 5.2).

Un point clef de l'argument d'Atiyah–Hirzebruch [**1**] était l'identification de la cohomologie en bas degrés d'une variété de Godeaux–Serre Y/G comme dans (2) à celle du produit d'espaces classifiants $BG \times B\mathbf{G}_m$. On peut algébriser leur méthode en utilisant l'approximation algébrique de BG introduite par Totaro. En effet, d'après ([**21**], Remark 1.4) pour tout $s \geq 0$ il existe une représentation k-linéaire W de G telle que l'action de G soit libre en dehors d'un fermé S de codimension s dans W. La cohomologie de $BG := (W \setminus S)/G$ est égale à celle de G jusqu'en degré s ; en particulier, elle ne dépend ni du choix de W ni du choix de S. Le quotient $\mathbf{P}(W)//G := (\mathbf{P}(W) \times (W \setminus S))/G$ est un fibré projectif sur BG, donc son anneau de cohomologie est un anneau de polynômes sur celui de BG. En particulier, la cohomologie de BG est facteur direct dans celle de $\mathbf{P}(W)//G$.

Si maintenant $Y \subset \mathbf{P}(W)$ est une intersection complète lisse sur laquelle l'action de G est libre, la cohomologie de Y/G est isomorphe à celle de $\mathbf{P}(W)//G$ en bas degrés. En effet, la cohomologie de Y est isomorphe à celle de $\mathbf{P}(W)$ jusqu'en degré $\dim(Y) - 1$ par le théorème de Lefschetz faible. On en déduit un isomorphisme entre les cohomologies de $(Y \times (W \setminus S))/G$ et de $\mathbf{P}(W)//G$ jusqu'en degré $\dim(Y)$ en appliquant la suite spectrale de Hochschild–Serre aux G-revêtements $Y \times (W \setminus S) \to (Y \times (W \setminus S))/G$ et $(\mathbf{P}(W) \times (W \setminus S)) \to \mathbf{P}(W)//G$. Or la cohomologie de $(Y \times (W \setminus S))/G$ s'identifie à celle de $(Y \times W)/G$ jusqu'en degré s, et finalement à celle de Y/G dans le même intervalle, puisque W est un espace affine.

En somme, en bas degrés la cohomologie de BG (donc celle de G) s'identifie à un facteur direct de celle de Y/G ci-dessus. La fin de la démonstration de (2) est alors similaire à celle de ([**1**], Proposition 6.7). Prenons $G = (\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^3$. Comme G est d'exposant ℓ, la suite exacte longue associée à $0 \to \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to 0$ montre que $H^i(G, \mathbf{Z}_\ell)$ s'identifie au noyau du morphisme de Bockstein $\beta : H^i(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{i+1}(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Le cup-produit des éléments d'une base du $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$-espace vectoriel $H^1(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \cong (\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^3$ donne une classe dans $H^3(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Essentiellement le même calcul que dans [**1**] montre que pour $\ell > 2$ l'image de cette classe dans $H^4(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ par le Bockstein β n'est pas annulée par l'opération $\beta\mathcal{P}^1$, dont le degré est $2\ell - 1$. Pour $\ell = 2$ la même conclusion vaut pour Sq^3.

Terminons cette section par une brève discussion des contre-exemples de type (b). Un célèbre contre-exemple de ce type à la conjecture de Hodge a été fabriqué par J. Kollár [**9**] ; voir aussi [**17**]. Il s'agit d'une hypersurface « très générale » dans $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ de degré m un multiple de ℓ^3 avec ℓ entier premier à 6, et de l'application cycle $CH^2(X) \to H^4(X, \mathbf{Z})$. Comme il s'agit d'une hypersurface de degré m, ici on a $H^4(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, et l'image de l'application cycle contient $m\mathbf{Z}$. Mais Kollár montre par un argument de déformation astucieux que toute courbe sur X a un degré divisible par ℓ. En d'autres mots, l'image de $CH^2(X) \to H^4(X, \mathbf{Z})$ est contenue dans $\ell H^4(X, \mathbf{Z})$ et ne peut être surjective. Comme le note C. Voisin ([**17**], [**23**]), on peut à partir de cet exemple fabriquer des contre-exemples à la conjecture de Hodge entière en d'autres degrés aussi, par éclatement ou par produit direct avec une autre variété.

L'énoncé de Kollár en induit un au niveau de la cohomologie ℓ-adique étale. En effet, si on travaille sur un corps algébriquement clos non dénombrable et on choisit ℓ premier à la caractéristique et à 6, sa méthode fournit toujours une hypersurface $X \subset \mathbf{P}^4$ sur laquelle toute courbe a un degré divisible par ℓ. (Le corps non dénombrable sert ici pour pouvoir choisir le point correspondant à X d'un schéma de Hilbert convenable en dehors de la réunion d'une famille dénombrable de fermés propres.) Ensuite, comme pour toute variété digne de ce nom, on trouve un corps K de type fini sur le corps premier sur lequel X est définie. Notant $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, l'image de l'application cycle

$$CH^2(X \times_K \overline{K}) \to H^4_{\text{ét}}(X \times_K \overline{K}, \mathbf{Z}_\ell(2)) \cong \mathbf{Z}_\ell$$

est alors contenue dans $\ell\mathbf{Z}_\ell$; noter qu'ici l'action de Galois sur la cohomologie induit l'action triviale sur $\mathbf{Z}_\ell$.

Remarques 2.2.

1. La méthode ci-dessus ne permet pas de trouver un tel exemple avec K un corps de nombres.

2. Par le théorème 1.1, si on croit à la conjecture de Tate rationnelle pour les diviseurs sur les surfaces, en caractéristique positive le corps K ci-dessus ne peut être un corps fini.

3. Nous ne savons pas s'il existe des contre-exemples du type (b) à la surjectivité de (3) sur un corps fini. En d'autres mots, nous ne savons pas si pour X projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini k, l'application

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^{2i}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(i))^G/\text{torsion}$$

induite par l'application cycle est toujours surjective.

Cette question est équivalente à la question suivante, fort intéressante du point de vue de [**2**] : pour tout $i \geq 0$, l'application

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell(i))/\text{torsion}$$

induite par l'application cycle

$$CH^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell(i)) \tag{5}$$

est-elle surjective ? Le lien entre les deux questions est fourni par les suites exactes

$$0 \to H^1(k, H^{2i-1}_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(i)))) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell(i)) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(i))^G \to 0,$$

où les groupes $H^1(k, H^{2i-1}_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(i))))$ sont des groupes finis (ceci est une conséquence du théorème de Deligne établissant les conjectures de Weil).

Notons ici pour usage ultérieur que par un argument bien connu utilisant la suite de Kummer et le groupe de Brauer, pour $i = 1$ la surjectivité de (5) est équivalente à la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$, et même à la bijectivité du morphisme (1) (voir [**19**], Proposition 4.3). En vertu de la suite exacte ci-dessus, dans le cas des diviseurs la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$ implique donc la version entière sous toutes ses formes possibles.

3. Le théorème de Schoen, I : un argument de type Lefschetz

Nous commençons maintenant l'exposition de la démonstration du théorème 1.1, suivant [**15**].

Au cours de la preuve nous ferons à plusieurs reprises des extensions du corps de base de degré premier à ℓ. Un argument de restriction-corestriction fournit alors le résultat au-dessus du corps de base initial.

Lemme 3.1. *Il suffit d'établir le théorème 1.1 pour $d = 3$.*

Démonstration. D'après le théorème de Bertini sur un corps fini [**6, 13**], on peut trouver un plongement projectif de X et une hypersurface H tels que le k-schéma $Y = X \cap H$ soit de codimension 1 dans X, lisse et géométriquement connexe. Comme $X \setminus Y$ est affine, pour $d > 3$, les théorèmes sur la dimension cohomologique des schémas affines ([**12**], §VI.7) donnent

$$H^{2d-3}(\overline{X} \setminus Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(d-1)) = 0, \quad H^{2d-2}(\overline{X} \setminus Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(d-1)) = 0.$$

Donc le morphisme composé

$$H^{2d-4}(Y_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_\ell(d-2)) \xrightarrow{\sim} H^{2d-2}_{Y_{\bar{k}}}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d-1)) \to H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d-1))$$

de l'isomorphisme de pureté et de la flèche provenant de la suite de localisation est un isomorphisme (théorème de Lefschetz faible, *ibidem*). Comme l'application cycle est compatible aux morphismes de Gysin ([**12**], Proposition VI.9.3), par récurrence sur d on se ramène donc au cas $d = 3$. □

Jusqu'à la fin du paragraphe 4, on suppose donc $d = \dim(X) = 3$.

Remarquons ensuite qu'il suffit d'établir le théorème après avoir éclaté un point de X, puisque la cohomologie de X s'identifie à un facteur direct de celle de l'éclaté ([**4**], exposé XVIII, 2.2.2) et l'application cycle est compatible aux morphismes propres de variétés propres et lisses ([**11**], théorème 6.1 et remarque 6.4). Ainsi, après avoir fait un éclatement convenable, on peut tranquillement supposer que le deuxième nombre de Betti ℓ-adique $b_2(\overline{X})$ de $\overline{X}$ est *impair.* En effet, si par malheur ce nombre est pair, on éclate un point fermé de degré f impair (d'après un argument de type Lang–Weil, un tel point existe puisque la variété X est géométriquement intègre), ce qui donne pour l'éclaté X^* la formule $b_2(X^*) = b_2(X) + f$ d'après [**4**], exposé XVIII, (2.3.1). La raison pour cette hypothèse supplémentaire se dévoilera lors de la preuve de la proposition 3.3 ci-dessous.

Un calcul simple de classes de Chern (voir [**16**], 9.2.1) montre que, quitte à composer le plongement projectif donné de X avec un plongement de Veronese de degré *pair*, on peut supposer que le deuxième nombre de Betti ℓ-adique de toute section hyperplane lisse de X est *pair.* Cette information de parité sera également importante pour la suite.

Ayant fait une extension de degré premier à ℓ si nécessaire, on trouve un éclaté $V \to X$ muni d'un pinceau de Lefschetz $V \to D \cong \mathbf{P}^1$ de sections hyperplanes ([**4**], exposé XVII, théorème 2.5). Notons $\dot{D} \subset D$ le lieu au-dessus duquel le morphisme $V \to D$ est lisse, et choisissons un point générique géométrique ε de D. D'après ce qui précède, le deuxième nombre de Betti de V_ε est pair.

Introduisons les notations π (resp. $\bar{\pi}$) pour le groupe fondamental arithmétique (resp. géométrique) de $\dot{D}$ ayant ε pour point base.

Proposition 3.2. *Quitte à faire une extension de k de degré premier à ℓ, on peut choisir le pinceau V de sorte que l'image de $\bar{\pi}$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(H^2(V_\epsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)))$ via la représentation de monodromie soit infinie.*

Démonstration. C'est la Proposition 1.1 de [**15**]. On ne donne que l'idée de l'argument. Soit $\mathbf{P}$ l'espace projectif paramétrisant les intersections de X avec les hypersurfaces de degré fixe suffisamment grand dans un plongement projectif fixé. Soient $\mathbf{V} \subset \mathbf{P} \times X$ l'hypersurface universelle, et $\dot{\mathbf{P}} \subset \mathbf{P}$ l'ouvert de lissité de la fibration $\mathbf{V} \to \mathbf{P}$. Le choix d'un pinceau de Lefschetz correspond au choix d'une droite $D \subset \mathbf{P}$, et on a $V = \mathbf{V} \times_{\mathbf{P}} D$. Par un argument de type Bertini (voir par exemple [**18**], Lemma 5.7.2) après une extension finie de k de degré premier à ℓ on trouve D assez générale pour laquelle l'homomorphisme $\pi_1(\dot{D}_{\bar{k}}, \epsilon) \to \pi_1(\dot{\mathbf{P}}_{\bar{k}}, \epsilon)$ est surjectif. Il suffit donc de montrer que l'image du deuxième groupe dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}_\ell}(H^2(V_\epsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)))$ est infinie. Schoen montre par une construction de géométrie algébrique classique qu'il existe un autre espace projectif P et un morphisme $P \to \mathbf{P}$ tels que le morphisme $\mathbf{V} \times_{\mathbf{P}} P \to P$ se factorise en $\mathbf{V} \times_{\mathbf{P}} P \to W \to P$, où W est une hypersurface projective lisse, et la dimension relative de $W \to P$ est 2. Comme W est une hypersurface, elle se relève en caractéristique 0, et un théorème de Deligne ([**22**], Théorème B) montre que la monodromie de tout pinceau de Lefschetz balayant W est infinie (sous l'hypothèse $\mathrm{car}\,(k) \neq 0$; en caractéristique 2 un petit argument supplémentaire est donné dans [**15**]). Ceci implique que la monodromie doit être infinie pour la fibration $\mathbf{V} \times_{\mathbf{P}} P \to P$, et finalement pour $\mathbf{V} \to \mathbf{P}$. □

Expliquons maintenant l'idée de la preuve du théorème 1.1. Tout d'abord, il suffit de montrer que toute classe dans $H^4(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(2))^G$ est la classe d'un cycle algébrique sur $\overline{X}$ (ensuite, pour un sous-groupe ouvert $U \subset G$ on peut appliquer ce résultat après changement de base de X au sous-corps fixé par U). Etant donc donné $w \in H^4(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(2))$ fixé par G, on montre qu'il est la poussette d'un élément de $H^2(V_{\bar{x}}, \mathbf{Z}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k(x))}$, où $\bar{x}$ est un point géométrique au-dessus d'un point fermé $x \in \dot{D}$. La conjecture de Tate pour les diviseurs sur la surface V_x (qui est valable à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ si elle est valable à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$ d'après ce qu'on a dit dans la remarque 2.2 (3) ci-dessus) montre alors que cet élément est la classe d'un cycle algébrique.

Notons qu'à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$ l'énoncé voulu est une conséquence directe du théorème de Lefschetz difficile (*cf.* la preuve du lemme 5.1 *infra*) ; toute la finesse de l'argument consiste à en tirer un énoncé à coefficients entiers.

Voici une reformulation. Écrivons X_ε pour le changement de base $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \varepsilon$. Par définition, il est muni de l'action triviale de $\bar{\pi}$ (celui-ci agissant sur les fibres de la fibration triviale $X \times D \to D$), et par conséquent

$$H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k)} \cong H^i(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$$

pour tout $i > 0$. Notant $D_{\bar{x}}$ le groupe de décomposition d'un point $\bar{x}$ du revêtement universel profini de $\dot{D}$ au-dessus de x, on obtient

$$H^i(V_{\bar{x}}, \mathbf{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k(x))} \cong H^i(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^{D_{\bar{x}}}$$

pour tout $i > 0$ par le théorème de changement de base propre et l'isomorphisme $D_{\bar{x}} \cong \mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k(x))$.

Notons i l'inclusion de la surface V_ε dans la variété X_ε (qui est de dimension 3). Elle induit un morphisme de restriction

$$i^* : H^2(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$$

ainsi qu'une poussette

$$i_* : H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2)).$$

D'après la discussion ci-dessus, il suffit donc de montrer :

Proposition 3.3. *Chaque élément de $H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$ est de la forme $i_*(\beta)$, avec un $\beta \in H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ invariant sous l'action d'un sous-groupe de décomposition $D_{\bar{x}}$ dans π, pour un point $\bar{x}$ convenable.*

Interrompons-nous pour quelques considérations d'algèbre $\mathbf{Z}_\ell$-linéaire.

4. Le théorème de Schoen, II : Lemmes d'algèbre linéaire

Etant donnés un $\mathbf{Z}_\ell$-module B et un sous-ensemble $A \subset B$, on définit *le saturé* A_s de A dans B comme l'ensemble des $b \in B$ avec $\ell^n b \in A$ pour un $n \geq 0$ convenable. On dit que A est saturé dans B si $A_s = A$.

Lemme 4.1. *Pour un module B de type fini sur $\mathbf{Z}_\ell$ il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma \subset Aut_{\mathbf{Z}_l}(B)$ tel que B^g soit saturé dans B pour tout $g \in \Gamma$.*

Démonstration. Ecrire $B = F \oplus T$ avec F libre et T de torsion, et prendre $\Gamma = Aut_{\mathbf{Z}_\ell}(F) \times \{\mathrm{id}_T\}$. □

PROPOSITION 4.2. *Soient F un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de rang fini impair, $S \subset F$ un sous-ensemble ouvert pour la topologie ℓ-adique, et $\Phi : F \times F \to \mathbf{Z}_\ell$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbf{Q}_\ell$. Il existe alors un sous-ensemble ouvert $\mathcal{S} \subset O(F, \Phi)$ tel que :*

(a) chaque élément de $\mathcal{S}$ admet un vecteur fixe non nul dans S ;

(b) l'ouvert $\mathcal{S}$ contient des éléments arbitrairement proches de 1 pour la topologie ℓ-adique.

Ici $O(F, \Phi)$ désigne le groupe des automorphismes $\mathbf{Z}_\ell$-linéaires de F préservant Φ. Pour la preuve nous avons besoin d'un résultat ancillaire.

LEMME 4.3. *Soient K un corps de caractéristique différente de 2, V un K-espace vectoriel de dimension finie impaire, et Φ une forme quadratique non dégénérée sur V. Tout élément de $SO(\Phi)$ admet 1 comme valeur propre.*

Démonstration. Notons A la matrice de Φ dans une base fixée de V. Pour un élément de $O(\Phi)$ dont la matrice est M et la matrice transposée M^t, on a $M^t.A.M = A$. D'où

$$M^t.A.(M - I) = A - M^t.A = (I - M^t).A.$$

En prenant le déterminant on obtient :

$$\det(M).\det(A).\det(M - I) = \det(I - M).\det(A).$$

Ici $\det(A) \neq 0$ et $\det(M) = 1$ (comme $M \in SO(\Phi)$), donc $\det(M - I) = \det(I - M)$. Comme V est de dimension impaire, ceci n'est possible que si $\det(M - I) = 0$. □

Démonstration de la proposition 4.2. Soit $U \subset SO(F_{\mathbf{Q}_\ell}, \Phi)$ l'ouvert de Zariski formé des éléments ayant des valeurs propres distinctes. C'est aussi un ouvert de Zariski de $O(F_{\mathbf{Q}_\ell}, \Phi)$. Comme F est de rang impair, tout élément de $SO(F_{\mathbf{Q}_\ell}, \Phi)$ admet 1 comme valeur propre par le lemme 4.3. Donc tout $u \in U$ stabilise un sous-espace L_u de dimension 1 correspondant à la valeur propre 1. Envoyant u sur L_u on obtient une application continue $\lambda : U \to \mathbf{P}(F_{\mathbf{Q}_\ell})$. L'image de $S \setminus 0$ dans $\mathbf{P}(F_{\mathbf{Q}_\ell})$ par la projection naturelle $F_{\mathbf{Q}_\ell} \setminus 0 \to \mathbf{P}(F_{\mathbf{Q}_\ell})$ est ouverte, tout comme son image inverse $\mathcal{S}$ dans $U \subset SO(F_{\mathbf{Q}_\ell}, \Phi)$.

Reste à voir que l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide, et qu'il contient des éléments arbitrairement proches de 1. Soit $v \in S$ un vecteur non isotrope. Ecrivant $F_{\mathbf{Q}_\ell} = \langle v \rangle \perp M$ avec un $\mathbf{Q}_\ell$-vectoriel M, on commence par montrer qu'il existe un élément de $SO(M, \Phi|_M)$ à valeurs propres distinctes, et toutes différentes de 1. Pour cela, on décompose l'espace quadratique M en une somme orthogonale d'espaces quadratiques V_i de dimension 2. Chaque $SO(V_i)$ est un tore $T_i = R^1_{k_i/k}\mathbf{G}_m$ de dimension 1, où k_i/k est une algèbre étale de degré 2 sur $\mathbf{Q}_\ell$. Si $k_i \simeq \mathbf{Q}_\ell \times \mathbf{Q}_\ell$, alors $T_i \simeq \mathbf{G}_{m,k}$, et $\mathbf{G}_{m,k}$ agit sur $V_i = \mathbf{Q}_\ell \oplus \mathbf{Q}_\ell$ par $\lambda.(u, v) = (\lambda.u, \lambda^{-1}.v)$. Si k_i est une extension quadratique de $\mathbf{Q}_\ell$, alors $SO(V_i)(\mathbf{Q}_\ell)$ est le groupe des éléments de norme 1 dans k_i, et l'action de ce groupe sur $V_i \simeq k_i$ est donnée par la multiplication dans k_i. Les deux valeurs propres d'un élément $\alpha \in SO(V_i)(\mathbf{Q}_\ell) \subset SO(\Phi) \subset GL(V)$ sont les conjugués de α (qui sont inverses l'un à l'autre). On trouve donc une famille d'éléments $\alpha_i \in SO(V_i)$ dont la somme définit un élément de $SO(M, \Phi|_M)$ qui a des valeurs propres distinctes et différentes de 1. De plus, on peut choisir les matrices des α_i de sorte qu'elles aient des coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$ et qu'elles soient arbitrairement proches de la matrice 1 pour la topologie ℓ-adique. Si elles sont suffisamment proches de 1, leur somme directe doit préserver la trace du réseau F sur M. □

5. Le théorème de Schoen, III : fin de la démonstration

Il nous reste à démontrer la proposition 3.3.

LEMME 5.1. *Il existe une inclusion*

$$H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi \subset i_*((\ker i_* + H^\pi)_s),$$

où

$$H := \mathrm{Im}\,(i^*) \subset H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)).$$

Démonstration. Le morphisme composé

$$H^2(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)) \xrightarrow{i^*} H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)) \xrightarrow{i_*} H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}_\ell$ selon le théorème de Lefschetz difficile, car c'est le cup-produit par la classe de la section hyperplane V_ε. Il est équivariant pour l'action de π, car V_ε provient par changement de corps de base d'une $k(\mathbf{P}^1)$-variété.

Donc par définition de H

$$i_*(H^\pi) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi \otimes \mathbf{Q}_\ell,$$

d'où

$$H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi \subset (i_*(H^\pi))_s. \tag{6}$$

Remarquons maintenant que le morphisme

$$i_* : H^2(V_\epsilon, \mathbf{Z}_\ell(1)) \to H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))$$

est surjectif. Ceci résulte du théorème de Lefschetz faible : dans la suite de localisation

$$H^4_{V_\varepsilon}(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2)) \to H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2)) \to H^4(X_\varepsilon \setminus V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))$$

le dernier terme est 0, car la variété $X_\varepsilon \setminus V_\varepsilon$ est affine de dimension 3, et le premier terme est isomorphe à $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ par pureté.

En particulier, étant donné $w \in H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$, on trouve $\beta \in H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ avec

$$w = i_*(\beta).$$

D'autre part, (6) implique

$$\ell^n w = i_*(\gamma)$$

pour un $\gamma \in H^\pi$ convenable et $n \geq 0$. Mais comme $\ell^n w = i_* \ell^n \beta$, on obtient $i_*(\gamma - \ell^n \beta) = 0$, i.e. $\ell^n \beta \in \ker i_* + H^\pi$, d'où le lemme. □

COROLLAIRE 5.2. *Pour $w \in H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$ fixé, le sous-ensemble*

$$H_w := \{v \in \ker i_* : w \in i_*((v + H^\pi)_s)\}$$

de $\ker i_* \subset H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ est un ouvert non vide de $\ker i_*$, stable par multiplication par ℓ.

Démonstration. Le lemme donne $H_w \neq \emptyset$; plus précisément, la preuve du lemme montre que $v_0 := \ell^n\beta - \gamma \in H_w$. Ce choix de n donne $(v_0 + \ell^n \ker i_*) \subset H_w$, car pour $\delta \in \ker i_*$ et $v = v_0 + \ell^n\delta$ on a $i_*(\beta + \delta) = w$ et $\ell^n(\beta + \delta) = v_0 + \ell^n\delta + \gamma = v + \gamma \in (v + H^\pi)$. Enfin, la stabilité de H_w par multiplication par ℓ résulte de la définition. □

Considérons maintenant la forme $\mathbf{Z}_\ell$-bilinéaire sur $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ induite par le cup-produit (i.e. la forme d'intersection) sur la cohomologie de la surface V_ε, et notons $H^\perp$ l'orthogonal de H. On a alors $\ker i_* \subset H^\perp \subset H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$, et l'inclusion $\ker i_* \subset H^\perp$ devient égalité après tensorisation par $\mathbf{Q}_\ell$. En effet, les accouplements de cup-produit satisfont à la compatibilité

$$\alpha \cup i_*(\beta) = i^*(\alpha) \cup \beta$$

pour $\alpha \in H^2(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))$ et $\beta \in H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$, et ils sont non dégénérés à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$.

Soit $F \subset H^\perp$ un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre, complément direct au sous-module de torsion T. Alors $F \cap \ker i_*$ est un sous-module ouvert dans F, et d'indice fini dans $\ker i_*$. Ainsi le corollaire précédent implique :

Corollaire 5.3. *Pour $w \in H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$ fixé le sous-ensemble*

$$S_w := \{v \in \ker i_* \cap F : \; w \in i_*((v + H^\pi)_s)\}$$

est un ouvert non vide de F. □

Remarque 5.4. Quand X est une hypersurface dans $\mathbf{P}^4$, tous les $\mathbf{Z}_\ell$-modules considérés sont sans torsion, et l'on a $\ker i_* = H^\perp = F$, d'où $H_w = S_w$.

Le lemme suivant distille la stratégie de la démonstration de la proposition 3.3.

Lemme 5.5. *Fixons $w \in H^4(X_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(2))^\pi$. Supposons qu'il existe $g \in \pi$ satisfaisant aux trois hypothèses suivantes :*

(1) *$H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^g$ est saturé dans $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$;*

(2) *g engendre topologiquement le sous-groupe de décomposition $D_{\bar{x}}$ dans π ;*

(3) *g fixe un élément $v \in S_w$.*

Alors il existe $\beta \in H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^{D_{\bar{x}}}$ avec $w = i_*(\beta)$.

Démonstration. Pour un v comme dans (3) on a $(v + H^\pi) \subset H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^g$. Comme $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^g$ est saturé dans $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$, on a de plus $(v + H^\pi)_s \subset H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^g = H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^{D_{\bar{x}}}$. Mais par le corollaire précédent on a $w = i_*(\beta)$ pour un $\beta \in (v + H^\pi)_s$. □

Démonstration de la proposition 3.3. On cherche un $g \in \pi$ satisfaisant aux conditions du lemme.

Par le théorème de Lefschetz difficile, la restriction de la forme d'intersection sur $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ à $H \otimes \mathbf{Q}_\ell$ est non dégénérée (voir [**3**], Lemme 4.1.2). Sa restriction à $H^\perp \otimes \mathbf{Q}_\ell$ est donc non dégénérée. Ecrivant $H^\perp = F \oplus T$ comme ci-dessus, on peut identifier $O(F)$ avec le stabilisateur (point par point) de T, qui est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $O(H^\perp)$. Comme l'image de $\bar{\pi}$ par la représentation de monodromie ρ est infinie par construction (Proposition 3.2), un théorème de Deligne ([**3**], Théorème 4.4.1) assure que c'est un sous-groupe ouvert de $O(H^\perp \otimes \mathbf{Q}_\ell)$. A fortiori $\rho(\pi)\cap O(F)$ est ouvert dans $O(F)$. Par le lemme 4.1 il existe un sous-groupe ouvert $G_0 \subset \rho(\pi)\cap O(F)$ tel que $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))^g$ est saturé dans $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Z}_\ell(1))$ pour tout $g \in G_0$.

On applique maintenant la proposition 4.2 à F. Pour ce faire, on doit d'abord vérifier que le rang de F est impair, i.e. que la dimension de $H^\perp \otimes \mathbf{Q}_\ell$ est impair. Ceci résulte de nos hypothèses initiales que la dimension de $H^2(V_\varepsilon, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est paire et celle de $H^2(X_\varepsilon, \mathbf{Q}_\ell(1))$ impaire ; on conclut par l'injectivité de $i^* \otimes \mathbf{Q}_\ell$ (voir le début de la preuve du lemme 5.1). La proposition 4.2 (a) fournit donc un ouvert $\mathcal{S}$ de $O(F)$ dont tout élément a un vecteur fixe dans l'ouvert non vide S_w donné par le corollaire 5.3. De plus, la proposition 4.2 (b) assure que $\mathcal{S}$ contient des éléments arbitrairement proches de 1, donc son intersection avec le sous-groupe ouvert G_0 est un ouvert non vide.

L'image inverse de $\mathcal{S}\cap G_0$ dans π est un ouvert dont les éléments satisfont aux propriétés (1) et (3) du lemme ci-dessus. En outre, par définition de la topologie de π elle contient une cosette hV d'un sous-groupe normal ouvert $V \subset \pi$. Appliquant le théorème de densité de Tchebotarev au revêtement galoisien $Z \to \dot{D}$ correspondant à V on obtient un point fermé $z \in Z$ dont le Frobenius associé dans π/V est $\bar{h}$, la classe de hV. Prenons alors un point $\bar{x}$ du revêtement universel profini de $\dot{D}$ au-dessus de z. Le sous-groupe de décomposition $D_{\bar{x}}$ est engendré par un élément g d'image $\bar{h}$ dans π/V. Ceci veut dire que g est un élément de hV, et en tant que tel satisfait aux hypothèses (1) et (3) du lemme. Par construction, il satisfait également à (2). □

Remarque 5.6. Si l'on pouvait choisir V de telle sorte que le conoyau du morphisme $\bar{\pi}/(V\cap\bar{\pi}) \to \pi/V$ soit d'ordre premier à ℓ, alors une variante plus précise de l'argument de Tchebotarev ci-dessus donnerait un point fermé x de degré premier à ℓ. L'existence d'un tel V impliquerait donc la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ pour les 1-cycles sur X (en supposant la conjecture connue pour les surfaces).

6. Conséquences du théorème de Schoen

Nous donnons ici des applications du théorème 1.1 à l'existence de zéro-cycles de degré premier à la caractéristique sur certaines variétés définies sur le corps des fonctions d'une courbe au-dessus de la clôture algébrique d'un corps fini. Il s'agit de deux énoncés apparentés mais non équivalents dont chacun implique le corollaire 1.2.

Théorème 6.1. *Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique d'un corps fini k de caractéristique p, et soit $\overline{C}$ une $\bar{k}$-courbe propre lisse connexe, de corps des fonctions $F = \bar{k}(\overline{C})$. Fixons une clôture séparable $\overline{F}$ de F.*

Soit $\overline{X}$ une $\bar{k}$-variété projective, lisse, connexe, admettant un $\bar{k}$-morphisme projectif et dominant $f : \overline{X} \to \overline{C}$ dont la fibre générique $\overline{X}_F$ est lisse et géométriquement intègre.

Supposons :

(i) Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\overline{F}}$ *est sans torsion.*

(ii) Pour tout premier ℓ différent de p, la partie ℓ-primaire du groupe de Brauer $\mathrm{Br}\,\overline{X} \subset \mathrm{Br}\,\overline{X}_F$ *est finie.*

(iii) La F-variété $\overline{X}_F$ a des points dans tous les complétés de F aux points de C.

(iv) Pour tout premier ℓ différent de p, la conjecture de Tate ℓ-adique vaut pour les diviseurs sur les surfaces projectives et lisses sur un corps fini de caractéristique p.

Alors $\overline{X}_F$ possède un zéro-cycle de degré une puissance de p.

Démonstration. Soit $d+1$ la dimension de $\overline{X}$, et donc d la dimension de la F-variété $\overline{X}_F$. Fixons une clôture séparable $\overline{F}$ de F. Considérons la suite d'applications

$$CH^d(\overline{X}) \otimes \mathbf{Z}_\ell \to H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X}_F, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X}_{\overline{F}}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \cong \mathbf{Z}_\ell$$

La flèche $H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X}_F, \mathbf{Z}_\ell(d))$ est obtenue par passage à la limite sur les applications de restriction

$$H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X} \times_{\overline{C}} U, \mathbf{Z}_\ell(d))$$

pour U parcourant les ouverts non vides de la courbe $\overline{C}$. La compatibilité de l'application cycle à la restriction à un ouvert ([**12**], §VI, Prop. 9.2) montre que l'application composée ci-dessus se factorise à travers le groupe $CH^d(\overline{X}_F) \otimes \mathbf{Z}_\ell$. Il suffit donc d'établir la surjectivité de l'application composée en question, pour tout ℓ premier à p. On le fait en plusieurs étapes.

Surjectivité de $CH^d(\overline{X}) \otimes \mathbf{Z}_\ell \to H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d))$. Il existe un corps fini $k \subset \bar{k}$ et une k-variété X telle que $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. La surjectivité requise résulte du théorème 1.1, pourvu qu'on démontre que tout élément de $H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d))$ est fixé par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k)$.

Or pour tout $n > 0$ la dualité de Poincaré

$$H^{2d}(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})) \times H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}) \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$$

est un accouplement parfait équivariant pour l'action de Galois. D'autre part, on a la suite exacte de Kummer

$$0 \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}/\ell^n\mathrm{Pic}\,\overline{X} \to H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}) \to {}_{\ell^n}\mathrm{Br}\,\overline{X} \to 0.$$

Le groupe $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est extension du groupe de Néron-Severi $NS(\overline{X})$ par le groupe ℓ-divisible $\mathrm{Pic}^0\,\overline{X}$. Le groupe $NS(\overline{X})$ est de type fini, donc $NS(\overline{X})/\ell^n \cong \mathrm{Pic}\,\overline{X}/\ell^n$ est fixé par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}|k)$ indépendant de n. Par l'hypothèse (ii) le groupe ${}_{\ell^n}\mathrm{Br}\,\overline{X}$ a également cette propriété. Il en est donc de même pour le groupe fini $H^{2d}(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$, et a fortiori pour $H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d))$.

Surjectivité de $H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X}_F, \mathbf{Z}_\ell(d))$. On va démontrer la surjectivité de $H^{2d}(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_F, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$ pour tout $n > 0$. Ceci donnera un morphisme surjectif de systèmes projectifs de groupes abéliens finis, d'où une surjection après passage à la limite projective suivant n.

On a la suite exacte de localisation

$$H^{2d}(\overline{X}, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_F, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \to \bigoplus_{P \in \overline{C}_0} H^{2d+1}_{\overline{X}_P}(\overline{X}, \mu_{l^n}^{\otimes d}),$$

où P parcourt les points fermés de $\overline{C}$. Montrons que chaque flèche $H^{2d}(\overline{X}_F, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \to H^{2d+1}_{\overline{X}_P}(\overline{X}, \mu_{l^n}^{\otimes d})$ est nulle. Pour ce faire, par excision on peut se restreindre au-dessus du hensélisé $R = O^h_{\overline{C},P}$ de $\overline{C}$ en P, dont on note L le corps des fractions. On dispose de la suite exacte de localisation

$$H^{2d}(\overline{X}_R, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_L, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \to H^{2d+1}_{X_P}(\overline{X}_R, \mu_{l^n}^{\otimes d}).$$

Il suffit donc d'établir la surjectivité du morphisme $H^{2d}(\overline{X}_R, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_L, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$.

Le corps L est de dimension cohomologique 1 (c'est un corps C_1). La suite spectrale de Hochschild–Serre donne donc naissance à la suite exacte courte

$$0 \to H^1(L, H^{2d-1}(\overline{X}_{\overline{L}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})) \to H^{2d}(\overline{X}_L, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_{\overline{L}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})^{\mathrm{Gal}\,(\overline{L}|L)} \to 0.$$

D'autre part, le groupe $H^{2d-1}(\overline{X}_{\overline{L}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$ est dual de $H^1(\overline{X}_{\overline{L}}, \mu_{\ell^n}) \cong {}_{\ell^n}\mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\overline{L}}$ par dualité de Poincaré. La torsion dans le groupe de Picard ne change pas par extension de corps algébriquement clos, donc ce dernier groupe est nul par l'hypothèse (i). Ceci donne des isomorphismes de modules galoisiens

$$H^{2d}(\overline{X}_L, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})) \cong H^{2d}(\overline{X}_{\overline{L}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \cong \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}.$$

L'hypothèse que $\overline{X}_F$ possède des points dans tous les complétés de F est équivalente à la même hypothèse avec les hensélisés, d'où en particulier une section du morphisme $\overline{X}_R \to \mathrm{Spec}\,R$ par propreté de $\overline{X}$. Elle donne naissance à un 1-cycle sur $\overline{X}_R$ dont la classe de cohomologie dans $H^{2d}(\overline{X}_R, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$ s'envoie sur le générateur de $H^{2d}(\overline{X}_L, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$.

Surjectivité de $H^{2d}(\overline{X}_F, \mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d}(\overline{X}_{\overline{F}}, \mathbf{Z}_\ell(d))$. Ici encore, il suffit d'établir la surjectivité à niveau fini, car il résulte de l'étape précédente que les groupes $H^{2d}(\overline{X}_F, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})$ sont finis. Le corps F est de dimension cohomologique 1, donc le morphisme

$$H^{2d}(\overline{X}_F, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \to H^{2d}(\overline{X}_{\overline{F}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d})^{\mathrm{Gal}\,(\overline{F}|F)}$$

dans la suite spectrale de Hochschild–Serre est une surjection. On a $H^{2d}(\overline{X}_{\overline{F}}, \mu_{\ell^n}^{\otimes d}) \cong \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ avec action triviale de Galois, d'où la surjectivité requise. □

Une conséquence facile du théorème est le corollaire 1.2 de l'introduction.

Démonstration du corollaire 1.2. Comme le degré de la fibre générique du morphisme $\overline{X} \to \overline{C}$ est supposé premier à p, il suffit de montrer que les hypothèses (i) et (ii) du théorème 6.1 sont satisfaites. En d'autre termes, on doit vérifier que pour $\overline{X}_{\overline{F}}$ une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 dans $\mathbf{P}^n_{\overline{F}}$ le groupe de Picard est sans torsion ℓ-primaire et la partie ℓ-primaire du groupe de Brauer est finie.

Le premier énoncé résulte du théorème de Noether–Lefschetz ([**7**], exposé XII, corollaire 3.7) : la flèche de restriction $\mathbf{Z} = \mathrm{Pic}\,\mathbf{P}^n_{\overline{F}} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\overline{F}}$ est un isomorphisme. D'autre part, la suite exacte de Kummer en cohomologie étale donne une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\overline{F}}/\ell\,\mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\overline{F}} \to H^2(\overline{X}_{\overline{F}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to {}_\ell\mathrm{Br}\,\overline{X}_{\overline{F}} \to 0.$$

On vient de voir que le premier terme est isomorphe à $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Mais ceci vaut également pour le deuxième, car il est isomorphe à $H^2(\mathbf{P}^n_{\overline{F}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ par le théorème de Lefschetz faible en cohomologie étale. On constate donc avec satisfaction que le dernier terme disparait, ce qui montre que la partie ℓ-primaire de $\mathrm{Br}\,\overline{X}_{\overline{F}}$ est en fait triviale. □

Le corollaire 1.2 peut également se déduire du théorème 6.2 ci-après. Il s'agit d'une variante du théorème 6.1, avec la différence sensible qu'ici on fait une hypothèse au-dessus du corps de fonctions d'une courbe définie sur un corps fini, et non pas sur $\overline{\mathbf{F}}_p$.

Soient donc C une courbe propre, lisse, géométriquement connexe définie sur un corps fini k, et Y une variété lisse sur le corps des fonctions $k(C)$ de C. Pour un point fermé P de C notons K_P le complété de $k(C)$ pour la valuation discrète associée à P. Une famille $\{z_P\}$ de zéro-cycles de degré 1 sur $Y \times_{k(C)} K_P$ pour tout P définit un homomorphisme $\mathrm{Br}\, Y \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par $A \mapsto \Sigma_P \mathrm{inv}_P(A[z_P])$. Ici $\mathrm{Br}\, Y$ est le groupe de Brauer de Y, le morphisme inv_P est l'invariant de Hasse du corps local K_P, et $A[z_P]$ est l'évaluation de l'élément $A \in \mathrm{Br}\, Y$ en z_P définie via la fonctorialité contravariante du groupe de Brauer.

On dit qu'il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur Y s'il existe une famille $\{z_P\}$ pour laquelle l'homomorphisme ci-dessus est nul. Notons que cette condition est automatique si la flèche naturelle $\mathrm{Br}\, k(C) \to \mathrm{Br}\, Y$ est surjective.

Théorème 6.2. *Soient k un corps fini de caractéristique p, et $X \to C$ un morphisme projectif et dominant de k-variétés projectives lisses géométriquement connexes, où C est une courbe et la fibre générique $X_{k(C)}$ est lisse et géométriquement intègre.*

Supposons :

(i) Il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur la $k(C)$-variété $X_{k(C)}$.

(ii) La conjecture de Tate sur les diviseurs vaut sur les surfaces projectives et lisses sur un corps fini.

Alors la $\overline{k}(C)$-variété $X \times_{k(C)} \overline{k}(C)$ possède un zéro-cycle de degré une puissance de p.

Démonstration. Soit $d+1$ la dimension de X, et donc d la dimension de la $k(C)$-variété $X_{k(C)}$. Soit $\ell \neq p$ un nombre premier, et soit $\{z_P\}$ une famille de zéro-cycles de degré 1 sur les $X \times_{k(C)} K_P$ pour laquelle l'application $\mathrm{Br}\, X_{k(C)} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ définie ci-dessus est nulle. La proposition 3.1 de [**2**] fournit alors un élément z de $H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$ dont la restriction dans le groupe $H^{2d}(X \times_{k(C)} \overline{k(C)}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \simeq \mathbf{Z}_\ell$ est égale à $1 \in \mathbf{Z}_\ell$. D'après le théorème 1.1, l'image de z dans $H^{2d}(X \times_k \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell(d))$ provient d'un élément Z de $CH_1(X \times_k \bar{k}) \otimes \mathbf{Z}_\ell$. Prenant la trace de Z dans le groupe $CH_0(X \times_{k(C)} \overline{k}(C)) \otimes \mathbf{Z}_\ell$ on voit que le morphisme $CH_0(X \times_{k(C)} \overline{k}(C)) \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ induit par le degré est surjectif. □

Remarque 6.3. La démonstration de la proposition 3.1 de [**2**] invoquée ci-dessus utilise des arguments voisins de ceux rencontrés dans la preuve du théorème 6.1. Une différence notable est que, dans la notation de ladite preuve, l'existence de classes de cohomologie de degré 1 sur les schémas X_R implique directement l'existence d'une classe globale de degré 1 sur X grâce à l'hypothèse « arithmétique »de type Brauer–Manin, sans imposer une hypothèse géométrique comme l'hypothèse (i) du théorème 6.1.

Remerciements. Nous remercions chaleureusement Burt Totaro pour nous avoir communiqué la démonstration de 2.1, et Bruno Kahn pour plusieurs discussions édifiantes. Une grande partie de ce travail a été fait lors d'une visite du premier auteur à Budapest dans le cadre du programme intra-européen BUDALGGEO de l'Institut Rényi. Le second auteur remercie également OTKA (projet no. K 61116) pour son soutien.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds. Topology 1 (1962), 25–45.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale, in *Algebraic K-theory* (Seattle, WA, 1997), W. Raskind and C. Weibel, ed., Proc. Sympos. Pure Math. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 1–12.

[3] P. Deligne, La conjecture de Weil, II, Publ. Math. IHES **52** (1980), 137–252.

[4] P. Deligne, N. M. Katz, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* (SGA 7 II), Lecture Notes in Math. **340**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[5] W. Fulton, *Intersection Theory,* 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1998.

[6] O. Gabber, On space filling curves and Albanese varieties. Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 1192–1200.

[7] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), North-Holland, Amsterdam, 1968. Nouvelle édition : Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[8] A. Grothendieck et al., *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L* (SGA 5), Lecture Notes in Math. **589**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

[9] J. Kollár, Lemma p. 134 in *Classification of irregular varieties*, Lecture Notes in Math. **1515**, Springer-Verlag 1990.

[10] J. S. Milne, The Tate conjecture over finite fields (AIM talk), prépublication `arXiv:0709.3040`.

[11] G. Laumon, Homologie étale, in *Séminaire de Géométrie Analytique*, A. Douady, J-L. Verdier, eds., Astérisque 36–37 (1976), 163–188.

[12] ———, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[13] B. Poonen, Bertini theorems over finite fields. Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 3, 1099–1127.

[14] M. Raynaud, Modules projectifs universels, *Invent. Math.* 6 (1968), 1–26.

[15] C. Schoen, An integral analog of the Tate conjecture for one-dimensional cycles on varieties over finite fields. Math. Ann. **311** (1998), no. 3, 493–500.

[16] ———, On the image of the l-adic Abel-Jacobi map for a variety over the algebraic closure of a finite field. J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 3, 795–838.

[17] C. Soulé et C. Voisin, Torsion cohomology classes and algebraic cycles on complex projective manifolds, Adv. Math. **198** (2005) 107–127.

[18] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.

[19] J. Tate, Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology, in *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 55/1, U. Jannsen et al., eds., Amer. Math. Soc., Providence, 1994, 71–83.

[20] B. Totaro, Torsion algebraic cycles and complex cobordism, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 467–493.

[21] ______, The Chow ring of a classifying space, in *Algebraic K-theory (Seattle, 1997),* Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, W. Raskind and C. Weibel, ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 249–281.

[22] J-L. Verdier, Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ-adique, Séminaire Bourbaki, exp. 423, Lecture Notes in Math. **383**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, pp. 98–115.

[23] C. Voisin, Some aspects of the Hodge conjecture, Japan J. Math **2** (2007) 261–296.

C.N.R.S., U.M.R. 8628, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

E-mail address: jlct@math.u-psud.fr

Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, Reáltanoda utca 13–15, H-1053 Budapest, Hungary

E-mail address: szamuely@renyi.hu