

Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière

Jean-Louis Colliot-Thélène et Claire Voisin

10 septembre 2011

Abstract : Building upon the Bloch–Kato conjecture in Milnor K-theory, we relate the third unramified cohomology group with \mathbb{Q}/\mathbb{Z} coefficients with a group which measures the failure of the integral Hodge conjecture in degree 4. As a first consequence, a geometric theorem of the second-named author implies that the third unramified cohomology group with \mathbb{Q}/\mathbb{Z} coefficients vanishes on all uniruled threefolds. As a second consequence, a 1989 example by Ojanguren and the first named author implies that the integral Hodge conjecture in degree 4 fails for unirational varieties of dimension at least 6. For certain classes of threefolds fibered over a curve, we establish a relation between the integral Hodge conjecture and the computation of the index of the generic fibre.

Résumé : En nous appuyant sur la conjecture de Bloch–Kato en K-théorie de Milnor, nous établissons un lien général entre le défaut de la conjecture de Hodge entière pour la cohomologie de degré 4 et le troisième groupe de cohomologie non ramifiée à coefficients \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Ceci permet de montrer que sur un solide¹ uniréglé le troisième groupe de cohomologie non ramifiée à coefficients \mathbb{Q}/\mathbb{Z} s’annule, ce que la K-théorie algébrique ne permet d’obtenir que dans certains cas. Ceci permet à l’inverse de déduire d’exemples ayant leur source en K-théorie que la conjecture de Hodge entière pour la cohomologie de degré 4 peut être en défaut pour les variétés rationnellement connexes. Pour certaines familles à un paramètre de surfaces, on établit un lien entre la conjecture de Hodge entière et l’indice de la fibre générique.

1 Introduction

Soit X une variété projective, lisse, connexe, sur le corps \mathbb{C} des complexes, de dimension d . Soit $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}(2\pi i) \subset \mathbb{C}$ et, pour $r > 0$, soit $\mathbb{Z}(r) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes r}$. Pour $i \geq 0$, soit $CH^i(X)$ le groupe des cycles algébriques de codimension i sur X modulo l’équivalence rationnelle.

Pour tout entier $i \geq 1$ on sait définir (cf. [56, IV.11.1.2]) des applications classe de cycles

$$CH^i(X) \rightarrow H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$$

qui généralisent l’application $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$ déduite de la suite de l’exponentielle. Via les isomorphismes de dualité de Poincaré entre cohomologie entière et homologie entière

$$H^{2d-2j}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(d-j)) \simeq H_{2j}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

ceci définit aussi des applications classe de cycles homologiques

$$CH_j(X) \rightarrow H_{2j}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

1. en anglais, threefold

L'image de $CH^i(X)$ dans $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ sera notée $H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$.

Dans la cohomologie $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(i))$, on a le sous-groupe $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Q})$ des classes de Hodge : ce sont celles dont l'image dans $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}(i))$ est de type (i, i) pour la décomposition de Hodge. On a une inclusion $H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i)) \otimes \mathbb{Q} \subset Hdg^{2i}(X, \mathbb{Q})$. La conjecture de Hodge affirme que cette inclusion est une égalité. C'est connu pour $i = 1$ et pour $i = d - 1$, où $d = \dim(X)$.

On définit le groupe des classes de Hodge entières $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ comme l'image réciproque de $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Q})$ dans $H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ par l'application naturelle de la cohomologie entière vers la cohomologie rationnelle.

De ce qui précède on tire l'inclusion

$$H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i)) \subset Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z}).$$

On note $Z^{2i}(X) := Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z})/H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$. En utilisant la dualité de Poincaré, on définit les groupes $Z_{2j}(X)$.

On a l'inclusion $Z^{2i}(X) \subset H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))/H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$, les sous-groupes de torsion de chacun de ces deux groupes coïncident, et sont conjecturalement égaux à $Z^{2i}(X)$ (cet énoncé est équivalent à la conjecture de Hodge en degré $2i$). En particulier chaque groupe $Z^{2i}(X)$ est conjecturalement un groupe fini. Ceci est connu pour $i = 1$ et $i = d - 1$. Pour $i = 2$, c'est connu lorsque le groupe de Chow des zéro-cycles $CH_0(X)$ est supporté sur un fermé algébrique de X de dimension ≤ 3 (théorème de Bloch–Srinivas [8]).

Une version entière de la conjecture de Hodge dirait que les groupes $Z^{2i}(X)$ sont nuls. On sait que c'est le cas pour $i = 1$, mais déjà pour $i = 2$, il existe des contre-exemples (Atiyah–Hirzebruch [2], Kollár [34]).

On cherche à déterminer des classes de variétés pour lesquelles, pour certaines valeurs de i , ce groupe est toujours nul.

On s'intéresse particulièrement aux cas $i = 2$ et $i = d - 1$, pour la raison suivante : Le groupe $Z^4(X)$ et le groupe fini $Z_2(X) \simeq Z^{2d-2}(X)$ sont des invariants birationnels des variétés projectives et lisses. La démonstration de ce fait dans [58, Lemme 15] utilise le théorème d'Hironaka, le comportement de la cohomologie et des groupes de Chow par éclatement de sous-variétés lisses, et, pour $Z^4(X)$, le théorème de Lefschetz sur les classes de type $(1, 1)$.

L'étude de la cohomologie étale des variétés à coefficients finis (qui pour les variétés sur \mathbb{C} équivaut à l'étude de la cohomologie de Betti à coefficients finis) a mené à introduire d'autres invariants birationnels permettant en particulier de détecter la non rationalité de certaines variétés unirationnelles. Les invariants en question sont les groupes de cohomologie non ramifiée $H_{nr}^i(X, \mathbb{Z}/n)$ introduits dans [16]. La preuve de leur invariance birationnelle utilise la conjecture de Gersten en cohomologie étale, établie par Bloch et Ogus [7].

L'observation de cette double invariance birationnelle nous a amenés à nous demander s'il existe un lien entre la torsion de $Z^4(X)$ et les groupes $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/n)$. Il est aussi notoire que tant les groupes $Z^{2i}(X)$ que les groupes de cohomologie non ramifiée sont difficiles à calculer, et que leur comportement « en famille » est mystérieux.

Des résultats sur $Z^4(X)$ ont été obtenus par des méthodes de géométrie complexe ([57], [58]). Des résultats sur les groupes $H_{nr}^3(X)$ à coefficients de torsion ont été obtenus par des méthodes de K -théorie algébrique ([16], [30]).

La théorie de Bloch–Ogus, combinée à la conjecture de Bloch–Kato, maintenant un théorème de Voevodsky [54] et Rost, et à un argument de Bloch et Srinivas, permet d'établir un lien entre les deux types d'invariants. Pour les variétés de dimension 3, ce lien avait été remarqué en 1992 par Barbieri-Viale [3]. En prenant appui sur le cas général de la conjecture de Bloch–Kato, nous

montrons au §3 que le lien existe en toute dimension. Le théorème général est le théorème 3.7. Citons-en ici une conséquence (Théorème 3.9) :

Théorème 1.1. *Soit X une variété, projective et lisse sur les complexes, dont le groupe de Chow des zéro-cycles $CH_0(X)$ est supporté sur une surface. On a un isomorphisme de groupes finis*

$$H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\cong} Z^4(X),$$

où le premier groupe est l'union de ses sous-groupes $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$.

Cela nous permet de traduire et comparer les résultats obtenus par la géométrie algébrique et par la K -théorie algébrique.

La combinaison du théorème 1.1 et d'un théorème obtenu par des méthodes de géométrie complexe [57] donne :

Théorème 1.2. *Soit X un solide projectif et lisse sur les complexes. Si X est uniréglé, alors $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

Pour les solides fibrés en coniques sur une surface, ce résultat avait été obtenu via la K -théorie algébrique en 1989 [42].

La combinaison du théorème 1.1 et d'un contre-exemple à la rationalité obtenu par des méthodes de K -théorie algébrique [16] donne :

Théorème 1.3. *Il existe une variété X projective, lisse, connexe sur \mathbb{C} , unirationnelle, de dimension 6, avec $Z^4(X) = Z^4(X)_{\text{tors}} \neq 0$.*

Ceci répond négativement à une question soulevée dans [58] : Si X est une variété rationnellement connexe, le groupe $Z^4(X) = Z^4(X)_{\text{tors}}$ est-il nul ?

Donnons des indications plus détaillées sur la structure de l'article. Le paragraphe 2 est consacré à des rappels sur la théorie de Bloch et Ogus et sur la conjecture de Bloch–Kato. Au paragraphe 3, on commence par étendre un argument de Bloch–Srinivas en dimension quelconque. Ceci nous permet ensuite de montrer que le groupe fini $Z^4(X)_{\text{tors}}$ est le quotient du groupe de cohomologie non ramifiée $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par son sous-groupe divisible maximal, résultat qui implique le théorème 1.1. Nous établissons un résultat analogue pour le groupe fini $Z^{2d-2}(X)$ (théorème 3.11). Il y a des liens entre le sous-groupe divisible maximal de $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, le groupe de Griffiths en codimension 2 et le groupe de cohomologie cohérente $H^3(X, \mathcal{O}_X)$. Ces liens, en partie conjecturaux, sont discutés au paragraphe 4. Au paragraphe 5, on passe en revue les exemples, d'origines très diverses, de variétés X pour lesquelles divers auteurs ont montré que soit le groupe $Z^4(X)_{\text{tors}}$, soit le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/n)$ est non nul. *On construit un exemple de solide X dont conjecturalement le groupe de Chow $CH_0(X)$ est réduit à \mathbb{Z} mais pour lequel néanmoins $Z^4(X) \neq 0$.* Au paragraphe 6, on établit le théorème 1.2. La nullité de $Z^4(X)$ a aussi été établie pour les hypersurfaces cubiques lisses de dimension 4 ([58]). Motivés par ce résultat, pour l'espace total d'une fibration en solides au-dessus d'une courbe, nous donnons des conditions suffisantes sur la fibration qui impliquent l'annulation de $Z^4(X)$ (Théorème 6.8).

Au paragraphe 7, on s'intéresse de façon générale aux variétés X munies d'une fibration $\pi : X \rightarrow \Gamma$ sur une courbe. L'indice d'une telle fibration π est le pgcd des degrés des multisections. Lorsque les groupes de cohomologie cohérente $H^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ des fibres lisses sont nuls pour $i \geq 1$, on établit par des méthodes géométriques indépendantes des paragraphes précédents des liens entre la nullité de $Z_2(X)$ et le fait que l'indice de la fibration soit égal à 1 (Théorèmes 7.6 et 7.7).

La fibre générique $V/\mathbb{C}(\Gamma)$ d'une fibration comme ci-dessus est une variété projective et lisse sur un corps F de caractéristique zéro et de dimension cohomologique $cd(F) \leq 1$. Au paragraphe 8.1, pour tout tel corps F et toute variété V projective et lisse sur F , en développant des techniques de K -théorie algébrique et de cohomologie galoisienne ([5], [17], [30]), on établit des liens entre le groupe de Chow de codimension 2 de V et la cohomologie non ramifiée de degré 3 de V (Théorème 8.5 et, sous l'hypothèse $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, Théorème 8.7). Ceci étend certains résultats de Bruno Kahn [30]. Les applications aux variétés fibrées au-dessus de courbes sont données au paragraphe 8.2. On établit ainsi par cette méthode indépendante l'annulation (Théorème 8.14) de $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour les solides X fibrés en surfaces rationnelles sur une courbe (ce qui est un cas particulier du théorème 1.2). En combinant K -théorie algébrique et méthodes géométriques, on obtient, pour les solides X fibrés au-dessus d'une courbe Γ , dont la fibre générique $V/\mathbb{C}(\Gamma)$ satisfait $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1, 2$, d'autres liens entre le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, le groupe $Z_2(X)$ et l'indice de la fibration (Théorèmes 8.19 et 8.21).

Notations

Étant donné un groupe abélien A , un entier $n > 0$ et un nombre premier l , on note $A[n] \subset A$ le sous-groupe formé des éléments annulés par n , on note $A\{l\} \subset A$ le sous-groupe de torsion l -primaire, et on note $A_{\text{tors}} \subset A$ le sous-groupe de torsion.

2 Rappels

2.1 La théorie de Bloch–Ogus pour la cohomologie de Betti

On renvoie à [1, §4] pour plus de détails sur ce qui suit. Soit X une variété algébrique sur \mathbb{C} . On dispose de l'espace topologique $X(\mathbb{C})$. On note X_{cl} le site des isomorphismes locaux $U \rightarrow X(\mathbb{C})$. On a une flèche de sites $\delta : X_{cl} \rightarrow X(\mathbb{C})$. Les topos associés sont équivalents.

On a le diagramme commutatif de morphismes de sites suivant

$$\begin{array}{ccc} X_{cl} & \xrightarrow{\delta} & X(\mathbb{C}) \\ \downarrow f & & \downarrow h \\ X_{ét} & \xrightarrow{g} & X_{Zar} \end{array}$$

On note

$$\pi : X_{cl} \rightarrow X_{Zar}$$

le morphisme de sites $h \circ \delta = g \circ f$.

Soit A un groupe abélien. On note $A(1) = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(1)$ et $A(-1) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(1), A)$. Ceci permet de définir $A(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.1. (Bloch–Ogus [7]) Soit X une variété algébrique sur \mathbb{C} . Les faisceaux $\mathcal{H}_X^i(A)$ sur X sont les faisceaux pour la topologie de Zariski sur X définis par

$$\mathcal{H}_X^i(A) := R^i \pi_* A = R^i h_*(A).$$

En d'autres termes, $\mathcal{H}_X^i(A)$ est le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau pour la dite topologie défini par $U \mapsto H^i(U(\mathbb{C}), A)$. Pour une discussion de la définition suivante dans le contexte de la cohomologie étale à coefficients finis, on consultera [16] et [13].

Définition 2.2. Soit X une variété algébrique sur \mathbb{C} . On définit le i -ième groupe de cohomologie non ramifiée de X à coefficients dans A par la formule

$$H_{nr}^i(X, A) = H^0(X, \mathcal{H}_X^i(A)).$$

Un résultat central de l'article de Bloch et Ogus [7] est la démonstration de la conjecture de Gersten pour diverses théories cohomologiques. Ceci a comme conséquence le théorème suivant. Pour toute sous-variété fermée intègre D de X , on note $i_D : D \rightarrow X$ l'inclusion et on note

$$H_B^i(\mathbb{C}(D), A) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ U \subset D \\ \text{ouvert de Zariski non vide}}} H^i(U(\mathbb{C}), A)$$

en tout point de D . Lorsque $D' \subset D$ est de codimension 1, on a une flèche induite par le résidu topologique (sur la normalisation de D) (cf. [56, p. 417]) :

$$Res_{D, D'} : H_B^i(\mathbb{C}(D), A) \rightarrow H_B^{i-1}(\mathbb{C}(D'), A(-1)).$$

Supposons X irréductible. Pour $r \geq 0$ on note $X^{(r)}$ l'ensemble des sous-schémas fermés de codimension r dans X . Pour un groupe abélien M et une sous-variété fermée intègre $D \subset X$, on note $i_{D*}M$ l'image par i_{D*} du faisceau constant M_D sur D défini par le groupe M .

Théorème 2.3. ([7, Thm 4.2]) Pour toute variété lisse connexe sur \mathbb{C} et tout entier $i \geq 1$, on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^i(A) \rightarrow i_{X*}H_B^i(\mathbb{C}(X), A) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(1)}} i_{D*}H_B^{i-1}(\mathbb{C}(D), A(-1)) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(i)}} i_{D*}A_D(-i) \rightarrow 0.$$

Ici les flèches ∂ sont induites par les flèches $Res_{D, D'}$ lorsque $D' \subset D$ (et sont nulles sinon). Le faisceau $A_D(-i)$ sur D s'identifie bien sûr au faisceau constant de fibre $H_B^0(\mathbb{C}(D), A(-i))$.

Les conséquences de ce théorème sont considérables. Tout d'abord, notant $CH^k(X)/alg$ le groupe des cycles de codimension k de X modulo équivalence algébrique, on obtient la formule de Bloch–Ogus :

Corollaire 2.4. ([7, Cor. 7.4]) Si X est une variété projective, lisse et connexe sur \mathbb{C} , on a un isomorphisme canonique

$$CH^k(X)/alg = H^k(X, \mathcal{H}_X^k(\mathbb{Z}(k))).$$

D'après le théorème 2.3, le faisceau \mathcal{H}_X^i a une résolution acyclique de longueur $\leq i$. On a donc le résultat d'annulation suivant.

Corollaire 2.5. Pour X lisse, A un groupe abélien et $r > i$, on a $H^r(X, \mathcal{H}_X^i(A)) = 0$.

Bloch et Ogus déduisent de cette annulation, par analyse de la suite spectrale de Leray de l'application continue π , le résultat suivant, crucial pour la suite de cet article.

Théorème 2.6. ([7, Ex. 7.5]) Soit X une variété lisse sur \mathbb{C} et soit A un groupe abélien. Alors la suite spectrale de Leray du morphisme de sites $\pi : X(\mathbb{C}) \rightarrow X$ fournit une suite exacte

$$H^3(X(\mathbb{C}), A) \rightarrow H_{nr}^3(X, A) \xrightarrow{d_2} H^2(X, \mathcal{H}_X^2(A)) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), A)$$

Pour $A = \mathbb{Z}(2)$ et X de plus projective, la suite exacte ci-dessus donne la suite exacte

$$H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow CH^2(X)/alg \xrightarrow{c} H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \quad (1)$$

où l'application $c : CH^2(X)/alg \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ est induite par l'application classe de cycles pour la cohomologie de Betti.

Le noyau de $c : CH^2(X)/alg \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ est par définition le groupe de Griffiths $\text{Griff}^2(X)$ des cycles de codimension 2 de X homologues à 0 modulo équivalence algébrique. La théorie de Bloch–Ogus donne donc le

Théorème 2.7. (Bloch–Ogus, [7, Cor. 7.4]) *Pour X projective et lisse, il y a un isomorphisme*

$$H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))] \xrightarrow{\cong} \text{Griff}^2(X).$$

Voici une autre application du théorème 2.3.

Théorème 2.8. *Soit A un groupe abélien. Pour tout entier $i \geq 0$,*

- (i) *le groupe $H_{nr}^i(X, A)$,*
- (ii) *l'image de $H^i(X(\mathbb{C}), A)$ dans $H_{nr}^i(X, A) \subset H_B^i(\mathbb{C}(X), A)$,*
- (iii) *le quotient du premier groupe par le second,*

sont des invariants birationnels des variétés projectives et lisses sur \mathbb{C} , invariants qui s'annulent sur les variétés rationnelles.

Démonstration. L'invariance birationnelle de $H_{nr}^i(X, A)$ est une conséquence du théorème 2.3 (validité de la conjecture de Gersten), voir [13, Thm. 4.4.1].

L'invariance birationnelle de l'image de $H^i(X(\mathbb{C}), A)$ dans $H_B^i(\mathbb{C}(X), A)$, est établie par Grothendieck dans [26, III (9.2)]. Comme on est en caractéristique zéro, on peut utiliser le théorème d'Hironaka et réduire la démonstration au cas de l'éclatement d'une sous-variété fermée lisse. On sait comment se calcule la cohomologie d'un tel éclatement : tout ce qu'on ajoute dans la cohomologie est supporté dans le diviseur exceptionnel et donc s'annule par passage au corps des fonctions. \square

2.2 K -théorie algébrique, cohomologie étale et conjecture de Bloch–Kato

Sur tout schéma X et tout entier $i \geq 0$, on note $\mathcal{K}_{i,X}$ le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$. Le cas $n = 0$ du théorème suivant (conjecture de Gersten pour la K -théorie algébrique) est un célèbre résultat de Quillen. On trouvera une démonstration du cas général dans [14].

Théorème 2.9. *Soit X une variété lisse connexe sur un corps F . Pour tout entier $i \geq 1$, et tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X*

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_{i,X}/n \rightarrow i_{X*}K_i(F(X))/n \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(1)}} i_{D*}K_{i-1}(F(D))/n \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(i)}} i_{D*}\mathbb{Z}/n \rightarrow 0.$$

À tout anneau commutatif unitaire A et tout entier $i \geq 0$ et tout entier $i \geq 0$ on associe le groupe $K_i^M(A)$ quotient du produit tensoriel $A^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} A^\times$ (i fois) par le sous-groupe engendré par les éléments $x_1 \otimes \dots \otimes x_i$ avec $x_r + x_s = 1$ pour un couple d'entiers $r < s$. Pour A un corps, c'est la définition de Milnor. On a $K_1^M(A) = A^*$. Sur tout schéma X et tout entier $i \geq 0$, on note $\mathcal{K}_{i,X}^M$ le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i^M(H^0(U, \mathcal{O}_X))$. L'analogie du théorème de Quillen pour la K -théorie de Milnor a fait l'objet de travaux de nombreux auteurs. On a maintenant le résultat suivant (M. Kerz [32, Thm. 7.1]) :

Théorème 2.10. *Soit X une variété lisse connexe sur un corps infini F . Pour tout entier $i \geq 1$, et tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X*

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_{i,X}^M/n \rightarrow i_{X*}K_i^M(F(X))/n \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(1)}} i_{D*}K_{i-1}^M(F(D))/n \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(i)}} i_{D*}\mathbb{Z}/n \rightarrow 0.$$

Soit M un module continu discret sur le groupe de Galois absolu G de F , et $i \geq 0$ un entier. On note $H^i(F, M) = H^i(G, M)$ le i -ième groupe de cohomologie galoisienne de M .

Théorème 2.11. (Bloch–Ogus [7]) *Soit X une variété lisse connexe sur un corps F . Soit n un entier positif premier à la caractéristique de F , et soit μ_n le faisceau étale sur X défini par les racines n -ièmes de l'unité. Soit $\mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes i})$ le faisceau pour la topologie de Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U, \mu_n^{\otimes i})$. Pour tout entier $i \geq 1$, tout entier $j \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 0$, on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X*

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes j}) \rightarrow i_{X*}H^i(F(X), \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(1)}} i_{D*}H^{i-1}(F(D), \mu_n^{\otimes j-1}) \xrightarrow{\partial} \dots$$

$$\xrightarrow{\partial} \bigoplus_{D \in X^{(i)}} i_{D*}H^0(F(D), \mu_n^{\otimes j-i}) \rightarrow 0.$$

En d'autres termes, quand on prend les sections de cette suite sur un anneau local de X , on obtient une suite exacte de groupes abéliens. Ceci vaut encore quand on prend les sections sur un anneau semilocal de X (voir [14]).

Pour toute variété X sur \mathbb{C} , tout groupe abélien *de torsion* A , et tout entier $i \geq 0$, les théorèmes de comparaison de SGA4 [1] donnent des isomorphismes canoniques $H_{\text{ét}}^i(X, A) \xrightarrow{\cong} H^i(X(\mathbb{C}), A)$ et $H^i(\mathbb{C}(X), A) \xrightarrow{\cong} H_B^i(\mathbb{C}(X), A)$. On en déduit un isomorphisme canonique entre le faisceau Zariski $\mathcal{H}_X^i(A)$ obtenu par faisceautisation de $U \mapsto H_{\text{ét}}^i(U, A)$ et le faisceau Zariski $\mathcal{H}_X^i(A)$ obtenu par faisceautisation de $U \mapsto H^i(U(\mathbb{C}), A)$, ce qui nous autorise à utiliser une notation unique pour ces deux faisceaux. Pour X lisse sur \mathbb{C} , et $A = \mu_n^{\otimes j}$, cela permet d'identifier les suites exactes de faisceaux des théorèmes 2.3 et 2.11.

Notons $CH^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle et $H_{nr}^i(X, \mu_n^{\otimes j}) = H^0(X, \mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes j}))$. Du théorème 2.11, on tire comme au paragraphe précédent des isomorphismes

$$CH^i(X)/n \xrightarrow{\cong} H^i(X, \mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes i}))$$

et des suites exactes

$$H_{\text{ét}}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Rappelons l'énoncé de la conjecture de Bloch–Kato en K-théorie algébrique.

($BK_{i,n}$) Soient $i \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers. Pour tout corps F de caractéristique première à n , l'application de réciprocité (définie par Tate)

$$K_i^M(F)/n \rightarrow H^i(F, \mu_n^{\otimes i}),$$

qui envoie les groupes de K-théorie de Milnor modulo n vers les groupes de cohomologie galoisienne, est un isomorphisme.

Des cas particuliers importants de cette conjecture ont été démontrés par Merkur'ev et Suslin ([37], [38]), Rost [47], et Voevodsky [53]. Le cas général vient d'être établi par Voevodsky [54] et Rost (cf. [51]), voir aussi le texte de Weibel [61].

Il est facile, dans chacun des énoncés du présent article, de déterminer lesquels parmi les énoncés $BK_{i,n}$ sont requis pour les démonstrations.

Pour X une variété lisse sur un corps infini F et $n > 0$ un entier premier à la caractéristique de F , les applications de réciprocity définissent un morphisme de la suite exacte du théorème 2.10 dans la suite exacte du théorème 2.11 (cf. [32]). Sous la conjecture de Bloch–Kato, on déduit de ces deux théorèmes un isomorphisme de faisceaux pour la topologie de Zariski $\mathcal{K}_{i,X}^M/n \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes i})$. Comme expliqué dans [32, Thm. 7.8], une méthode due à Hoobler permet d’établir un énoncé plus général : *Sous la conjecture de Bloch–Kato, pour tout anneau semilocal A contenant un corps F infini et tout entier n premier à la caractéristique de F , pour tout entier $i \geq 1$, l’application de réciprocity $K_i^M(A)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^i(A, \mu_n^{\otimes i})$ est un isomorphisme.*

Pour F un corps, on a des homomorphismes $K_i^M(F) \rightarrow K_i(F)$, qui sont des isomorphismes pour $i = 0, 1, 2$. Pour $i \leq 2$, on a donc $\mathcal{K}_{i,X}/n \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_X^i(\mu_n^{\otimes i})$.

3 Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière

3.1 Généralisation d’un argument de Bloch et Srinivas

Dans cette partie on détaille et généralise un argument de Bloch et Srinivas [8]. Soit X une variété algébrique sur \mathbb{C} . Les notations sont celles du paragraphe 2.1.

Théorème 3.1. *Soit X une variété algébrique connexe sur \mathbb{C} . Pour tout entier i , la multiplication par un entier $n > 0$ sur les faisceaux $\mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i))$ induit des suites exactes courtes de faisceaux Zariski sur X*

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i)) \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mu_n^{\otimes i}) \rightarrow 0.$$

En particulier les faisceaux $\mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i))$ sont sans torsion, et donc leurs groupes de sections globales $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i))) = H_{\text{nr}}^p(X, \mathbb{Z}(i))$ sont sans torsion.

Démonstration. Les suites exactes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(i) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}(i) \rightarrow \mu_n^{\otimes i} \rightarrow 0$$

donnent naissance à de longues suites exactes de groupes de cohomologie sur tout $U(\mathbb{C})$ pour $U \subset X$ ouvert Zariski, et donc à de longues suites de faisceaux sur X_{Zar}

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_X^{p-1}(\mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i)) \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mu_n^{\otimes i}) \rightarrow \mathcal{H}_X^{p+1}(\mathbb{Z}(i)) \rightarrow \dots$$

Il s’agit donc de montrer que les flèches $\mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(i)) \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mu_n^{\otimes i})$ sont surjectives. Il suffit pour cela d’établir que les flèches $\mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}(p)) \rightarrow \mathcal{H}_X^p(\mu_n^{\otimes p})$ le sont.

On a le diagramme commutatif de faisceaux sur X_{cl}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,cl} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où les deux flèches verticales de gauche sont définies par $z \mapsto \text{exp}(z/n)$.

Dans ce diagramme, le faisceau $\mathcal{O}_{X,cl}$ désigne le faisceau des fonctions continues sur $X(\mathbb{C})$ à valeurs complexes sur $X(\mathbb{C})$, vu sur X_{cl} .

De ce diagramme on déduit un diagramme commutatif de faisceaux sur X_{Zar} :

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \longrightarrow & R^1 \pi_*(\mathbb{Z}(1)) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \\ \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \longrightarrow & R^1 \pi_*(\mu_n) \end{array}$$

On cherche à identifier la flèche composée $\mathcal{O}_{X,Zar}^\times \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times \rightarrow R^1 \pi_*(\mu_n)$.

D'après [1, Thm. 4.4], on a $R^1 f_* \mu_n = 0$. La suite exacte de faisceaux sur X_{cl}

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathcal{O}_{X,cl}^\times \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathcal{O}_{X,cl}^\times \rightarrow 1$$

induit donc une suite exacte de faisceaux sur $X_{ét}$

$$1 \rightarrow f_* \mu_n \rightarrow f_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times \xrightarrow{z \mapsto z^n} f_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times \rightarrow 1.$$

On a le diagramme commutatif de faisceaux sur $X_{ét}$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & f_* \mu_n & \rightarrow & f_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & f_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \rightarrow & 1 \\ & & \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \rightarrow & \mu_n & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,ét}^\times & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & \mathcal{O}_{X,ét}^\times & \rightarrow & 1 \end{array}$$

d'où l'on déduit un diagramme commutatif sur X_{Zar}

$$\begin{array}{ccc} g_* f_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \rightarrow & R^1 g_*(f_* \mu_n) \\ \uparrow & & \uparrow \simeq \\ g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times & \rightarrow & R^1 g_* \mu_n \end{array}$$

Comme $R^1 f_* \mu_n = 0$, la flèche naturelle $R^1 g_*(f_* \mu_n) \rightarrow R^1 \pi_* \mu_n$ est un isomorphisme. Le diagramme ci-dessus se réécrit

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \rightarrow & R^1 \pi_* \mu_n \\ \uparrow & & \uparrow \simeq \\ g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times & \rightarrow & R^1 g_* \mu_n \end{array}$$

On obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \rightarrow & R^1 \pi_*(\mathbb{Z}(1)) \\ \downarrow id & & \downarrow \\ \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times & \rightarrow & R^1 \pi_* \mu_n \\ \uparrow & & \uparrow \simeq \\ g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times & \rightarrow & R^1 g_* \mu_n \end{array}$$

Le théorème de Hilbert 90, sous la forme de Grothendieck, assure $R^1 g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times = 0$. Ainsi la flèche $g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times \rightarrow R^1 g_* \mu_n$ est surjective. Du diagramme ci-dessus il résulte que la flèche

$$R^1 \pi_*(\mathbb{Z}(1)) \rightarrow R^1 \pi_* \mu_n$$

est surjective, ce qui se traduit encore ainsi : le faisceau $R^2 \pi_*(\mathbb{Z}(1))$ est sans torsion ([3, Lemma 3.2]).

Observons que la flèche $\mathcal{O}_{X,Zar}^\times \rightarrow g_* \mathcal{O}_{X,ét}^\times$ est un isomorphisme. On a donc établi le fait suivant : la flèche composée

$$\mathcal{O}_{X,Zar}^\times \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{X,cl}^\times \rightarrow R^1 \pi_*(\mathbb{Z}(1)) \rightarrow R^1 \pi_* \mu_n \rightarrow R^1 g_* \mu_n,$$

où la dernière flèche est l'isomorphisme réciproque du composé d'isomorphismes

$$R^1 g_* \mu_n \xrightarrow{\simeq} R^1 g_*(f_* \mu_n) \xrightarrow{\simeq} R^1 (g \circ f)_*(\mu_n) = R^1 \pi_* \mu_n,$$

est la surjection naturelle de faisceaux induite par la suite de Kummer.

On prend maintenant des produits tensoriels et des cup-produits. On obtient ainsi une suite d'homomorphismes

$$(\mathcal{O}_{X,Zar}^\times)^{\otimes p} \rightarrow R^p \pi_*((\mathbb{Z}(p))) \rightarrow R^p \pi_*(\mu_n^{\otimes p}) \rightarrow R^p g_*(\mu_n^{\otimes p}),$$

le composé $(\mathcal{O}_{X,Zar}^\times)^{\otimes p} \rightarrow R^p g_*(\mu_n^{\otimes p})$ est simplement le composé

$$(\mathcal{O}_{X,Zar}^\times)^{\otimes p} \rightarrow (R^1 g_* \mu_n)^{\otimes p} \rightarrow R^p g_*(\mu_n^{\otimes p}),$$

la première flèche étant donnée par la suite de Kummer.

Comme $R^i f_*(\mu_n^{\otimes p}) = 0$ pour tout $i > 0$ ([1], loc. cit.), la flèche $R^p \pi_*(\mu_n^{\otimes p}) \rightarrow R^p g_*(\mu_n^{\otimes p})$ est un isomorphisme.

Comme rappelé à la fin de la section 2.2, la conjecture de Bloch–Kato implique que la flèche de faisceaux Zariski

$$(\mathcal{O}_{X,Zar}^\times)^{\otimes p} \rightarrow R^p g_*(\mu_n^{\otimes p})$$

est surjective. Notons que l'on ne fait pas ici d'hypothèse de lissité sur X .

La combinaison de ces résultats implique que la flèche

$$R^p \pi_*(\mathbb{Z}(p)) \rightarrow R^p \pi_*(\mu_n^{\otimes p})$$

est surjective. Ceci établit le théorème. □

Remarque 3.2. Des cas particuliers du théorème 3.1 avaient été établis.

Pour X lisse et $p = 2$, Bloch et Srinivas [8] (voir la démonstration du théorème 1 (ii), p. 1240) utilisent le théorème de Merkur'ev–Suslin pour montrer que la suite ci-dessus est exacte, et que donc le faisceau $\mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z})$ est sans torsion.

Barbieri-Viale [3] observe que lorsque la dimension de X est 3, pour tout ouvert affine U de X , on a $H^r(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ et $H^r(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) = 0$ pour $r \geq 4$ (théorème de Lefschetz faible, cf. [56, Thm. 13.2.22]). Ainsi les faisceaux $\mathcal{H}_X^r(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{H}_X^r(\mathbb{Z}/n)$ sont nuls pour $r \geq 4$. Le théorème de Merkur'ev–Suslin suffit alors à établir le théorème ci-dessus pour les variétés de dimension 3.

L. Barbieri-Viale nous signale une démonstration du théorème 3.1 dans sa prépublication [4].

3.2 Action des correspondances et cohomologie des faisceaux $\mathcal{H}^n(\mathbb{Z})$

Proposition 3.3. *Soit X une variété projective, lisse, connexe sur \mathbb{C} , de dimension d .*

(i) *Si le groupe $CH_0(X)$ est supporté sur un fermé algébrique $Y \subset X$ avec $\dim Y = r$, alors $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ est annulé par un entier $N \neq 0$ pour $p > r$. En particulier $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z})) = 0$ pour $p > r$.*

(ii) *Si le groupe $CH_0(X)$ est supporté sur un fermé algébrique $Y \subset X$ avec $\text{codim } Y = r$, alors pour $p < r$ le groupe $H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A))$ est annulé par un entier $N > 0$.*

(iii) *Pour l'espace projectif $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$, on a $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) = 0$, pour $p \neq q$ et $H^p(X, \mathcal{H}_X^p(A)) = A$ pour tout $p \leq d$.*

Démonstration. Les correspondances modulo équivalence algébrique agissent sur la cohomologie des faisceaux $\mathcal{H}^i(A)$, pour tout groupe abélien A . Pour la commodité du lecteur, nous avons inclus en appendice une preuve de ce fait dans le contexte de la cohomologie de Betti. Pour la cohomologie étale à coefficients des groupes \mathbb{Z}/n , dans le cadre des modules de cycles de Rost [46], une telle action est construite par Merkur'ev dans [36].

(i) La décomposition de la diagonale (cf. [8]) dit que sous l'hypothèse de la proposition, on a pour un entier $N \neq 0$ une égalité de cycles modulo équivalence rationnelle sur $X \times X$:

$$N\Delta_X = \Gamma_1 + \Gamma_2 \text{ dans } CH^d(X \times X),$$

où Γ_1 est supporté sur $Y \times X$, où l'on peut supposer que Y est de pure dimension r , et Γ_2 est supporté sur $X \times D$, avec $D \subsetneq X$. Prenant les actions de ces correspondances sur $H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A))$, on obtient l'égalité :

$$NId = \Gamma_{1*} + \Gamma_{2*} : H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)).$$

Introduisant des désingularisations \tilde{D} de D et \tilde{Y} de Y et des relèvements de Γ_1, Γ_2 , on constate que Γ_{1*} se factorise par la flèche de restriction

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) \rightarrow H^0(\tilde{Y}, \mathcal{H}_{\tilde{Y}}^p(A)).$$

Or le faisceau $\mathcal{H}_{\tilde{Y}}^p(A)$ est nul car $\dim(\tilde{Y}) < p$. Par ailleurs Γ_{2*} a son image dans $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(A))$ constituée de classes à support dans le fermé $D \subsetneq X$, donc nulles (Théorème 2.3). Ainsi $NH^0(X, \mathcal{H}_X^p(A)) = 0$. Si $A = \mathbb{Z}$, le théorème 3.1 dit que $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z}))$ est sans torsion et donc $H^0(X, \mathcal{H}_X^p(\mathbb{Z})) = 0$.

(ii) En permutant les facteurs, on trouve une égalité de cycles modulo équivalence rationnelle sur $X \times X$:

$$N\Delta_X = \Gamma_1 + \Gamma_2 \text{ dans } CH^d(X \times X),$$

où Γ_1 est supporté sur $D \times X$, $D \subsetneq X$ et Γ_2 est supporté sur $X \times Y$, où l'on peut supposer que Y est de pure codimension r . Prenant les actions de ces correspondances sur $H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A))$, on obtient l'égalité :

$$NId = \Gamma_{1*} + \Gamma_{2*} : H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A)) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A)).$$

Introduisant des désingularisations \tilde{D} de D et \tilde{Y} de Y et des relèvements de Γ_1, Γ_2 , on constate que Γ_{1*} se factorise par la flèche de restriction

$$H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A)) \rightarrow H^p(\tilde{D}, \mathcal{H}_{\tilde{D}}^d(A))$$

qui est nulle car $\dim D < d$ et donc $\mathcal{H}_{\tilde{D}}^d(A) = 0$. Enfin Γ_{2*} se factorise par la flèche

$$\tilde{j}_* : H^{p-r}(\tilde{Y}, \mathcal{H}_{\tilde{Y}}^{d-r}(A)) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A))$$

induite par $j : \tilde{Y} \rightarrow X$, qui est nulle car $p < r$. Donc $NId = 0$ sur $H^p(X, \mathcal{H}_X^d(A))$.

(iii) Pour $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$, on a une décomposition complète de la diagonale dans $CH^d(X \times X)$

$$\Delta_X = \sum_{i=0}^d h_1^i h_2^{d-i},$$

où $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)) \in CH^1(\mathbb{P}^d)$ et $h_i := pr_i^* h$, $i = 1, 2$. On en déduit que pour $\alpha \in H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$, on a $\Delta_{X*} \alpha = \sum_{i=0}^d (h_1^i h_2^{d-i})_* \alpha$. Soient $X_i = \mathbb{P}^i \xrightarrow{j_i} \mathbb{P}^d$ et $\pi_i : \mathbb{P}^i \rightarrow pt$ l'application constante. Alors $h_1^i h_2^{d-i}$ est la classe de $X_{d-i} \times X_i$ dans $X \times X$ et on a

$$(h_1^i h_2^{d-i})_* \alpha = j_{i*} (\pi_i^* (\pi_{d-i*} (j_{d-i}^* \alpha))),$$

ce qui montre que $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) = 0$ pour $p \neq q$ car $\pi_{d-i*} \circ j_{d-i}^*$ s'annule sur $H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A))$ pour $p \neq q$. L'assertion restante résulte du même argument ou, si $A = \mathbb{Z}$, du corollaire (2.4). \square

Proposition 3.4. *Pour tout groupe abélien A et tout entier $i \geq 0$, les groupes $H^i(X, \mathcal{H}_X^d(A))$ sont des invariants birationnels des variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} de dimension d .*

Démonstration. Soient X et Y deux variétés projectives lisses sur \mathbb{C} de dimension d et $\phi : X \dashrightarrow Y$ une application birationnelle. Soit $\Gamma_\phi \subset X \times Y$ le graphe de ϕ et $\Gamma_{\phi^{-1}} \subset Y \times X$ le graphe de ϕ^{-1} . Regardons ces correspondances modulo équivalence algébrique, de façon à pouvoir les composer.

Lemme 3.5. *Le composé $\Gamma_{\phi^{-1}} \circ \Gamma_\phi \in CH^d(X \times X)/alg$ se décompose de la façon suivante :*

$$\Gamma_{\phi^{-1}} \circ \Gamma_\phi = \Delta_X + Z \text{ dans } CH^d(X \times X)/alg, \quad (2)$$

où Δ_X est la diagonale de X et Z est un cycle de $X \times X$ supporté sur $D \times X$, $D \subsetneq X$ étant un fermé propre de X .

À l'aide de ce lemme, on conclut de la façon suivante : Comme dans la preuve de la proposition 3.3, on note qu'un cycle Z comme ci-dessus agit trivialement sur $H^i(X, \mathcal{H}_X^d(A))$ pour tout i . On conclut donc de la décomposition (2) que l'on a :

$$\Gamma_{\phi^{-1}*} \circ \Gamma_{\phi*} = Id : H^i(X, \mathcal{H}_X^d(A)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{H}_X^d(A)).$$

Mais, pour les mêmes raisons, on a aussi

$$\Gamma_{\phi*} \circ \Gamma_{\phi^{-1}*} = Id : H^i(Y, \mathcal{H}_Y^d(A)) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{H}_Y^d(A)),$$

d'où l'on conclut que $\Gamma_{\phi*} : H^i(X, \mathcal{H}_X^d(A)) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{H}_Y^d(A))$ est un isomorphisme. \square

Démonstration du lemme 3.5. D'après la théorie de l'intersection raffinée de Fulton (voir [20, Chap. 6]), et compte tenu de la définition de la composition des correspondances, il suffit de montrer qu'il existe un fermé algébrique propre $D \subsetneq X$ tel que $p_{13}(p_{12}^{-1}(\Gamma_\phi) \cap p_{23}^{-1}(\Gamma_{\phi^{-1}}))$, où les p_{ij} sont les différentes projections de $X \times Y \times X$ sur les produits de deux de ses facteurs, coïncide (multiplicités comprises) avec Δ_X au-dessus de $U \times X$, où $U = X \setminus D$.

Notons V l'ouvert de définition de ϕ et prenons pour ouvert $U \subset X$ l'ouvert de V défini comme $\phi^{-1}(W)$, où $W \subset Y$ est l'ouvert de définition de ϕ^{-1} . Alors au-dessus de U , la première projection $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ induit un isomorphisme local entre le graphe de ϕ et X . La variété U peut alors être vue comme un ouvert U' de ce graphe. Via la seconde projection $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$, U' est par construction envoyé dans l'ouvert de définition de ϕ^{-1} , et donc l'intersection $p_{12}^{-1}(\Gamma_\phi) \cap p_{23}^{-1}(\Gamma_{\phi^{-1}})$ s'identifie au-dessus de U à la sous-variété lisse

$$\{(x, \phi(x), \phi^{-1}(\phi(x)) = x), x \in V, \phi(x) \in W\}$$

de $X \times Y \times X$, ce qui donne le résultat. \square

Certains des invariants birationnels donnés par la proposition 3.4 étaient connus. Pour ce qui est de la non-trivialité de ces invariants, les propriétés de la suite spectrale de Bloch-Ogus (§2.1) donnent les informations suivantes. Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} de dimension d .

Pour $i = 0$, on trouve la cohomologie non ramifiée de X en degré d .

Pour $i = d$, on a $H^d(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z})) = CH^d(X)/alg = \mathbb{Z}$ et $H^d(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}/n)) = CH^d(X)/n = \mathbb{Z}/n$.

Pour $i = d - 1$, on a $H^{d-1}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z})) = H^{2d-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ et pour un entier $n > 1$, on a $H^{d-1}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}/n)) = H^{2d-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$, groupe dual de $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n)$, qui est un invariant birationnel bien connu, coïncidant avec la n -torsion du groupe de Picard de X . Ces groupes sont non nuls si $H^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, soit encore $b_1 \neq 0$. La torsion du groupe de Néron-Severi $NS(X)$, égale à celle du groupe $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, peut aussi apporter une contribution.

Pour ce qui est des coefficients rationnels, ces résultats se généralisent de la façon suivante :

Proposition 3.6. *Si $H^i(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, on a $H^{d-i}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Q})) \neq 0$.*

Démonstration. Cela résulte du fait (cf. [7, p. 194], [22], [41]) que l'aboutissement de la filtration de Leray sur $H_B^{2d-i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ relative à $\pi : X_{cl} \rightarrow X_{Zar}$ est la filtration par le coniveau N . Si le terme extrême $E_2^{d-i, d} = H^{d-i}(X(\mathbb{C}), \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Q}))$ est nul, on conclut donc que $H_B^{2d-i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = N^{d-i+1} H_B^{2d-i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. Ceci entraîne classiquement (cf. [27]) que le coniveau de Hodge de la structure de Hodge sur $H_B^{2d-i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ est $\geq d - i + 1$, et donc que $H^{d, d-i}(X) := H^{d-i}(X, \Omega_X^d) = H^{d-i}(X, K_X) = 0$. Par la dualité de Serre, ceci contredit l'hypothèse $H^i(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$. \square

3.3 H^3 non ramifié à coefficients finis et défaut de la conjecture de Hodge entière en degré 4

Théorème 3.7. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} . On a les suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/n \rightarrow H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow Z^4(X)[n] \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow Z^4(X)_{tors} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. On considère la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}_X^q(\mathbb{Z}(2))) \implies H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$$

associée au morphisme de sites $X(\mathbb{C}) \rightarrow X_{Zar}$. Cette suite est concentrée dans le premier quadrant. Comme X est lisse, la conjecture de Gersten, connue pour cette cohomologie ([7], voir [14] et le §2.1 ci-dessus), implique que cette suite spectrale est en outre concentrée dans le demi-quadrant $p \leq q$. La flèche qui va de $H^2(X, \mathcal{H}_X^2(\mathbb{Z}(2)))$ dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ a pour image le groupe $H_{alg}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ des cycles algébriques. Cela résulte de l'identification de la filtration qu'on obtient ainsi avec la filtration par la codimension du support ([41], [22]).

De la suite spectrale on tire alors une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2))) \rightarrow [H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/H_{alg}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))] \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^4(\mathbb{Z}(2))).$$

Pour X de dimension quelconque, le faisceau $\mathcal{H}_X^4(\mathbb{Z}(2))$ est sans torsion (théorème 3.1). On en conclut

$$H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)))[n] \simeq [H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/H_{alg}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))][n].$$

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, $Z^4(X)[n] = [H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/H_{alg}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))][n]$. On a montré au théorème 3.1 que la suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow 0$$

est exacte. Elle donne naissance à la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)))/n \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)))[n] \rightarrow 0.$$

Ceci établit le premier énoncé du théorème.

Le second s'obtient par passage à la limite directe dans les suites exactes de (i) pour n variable. C'est une conséquence du théorème de Merkur'ev et Suslin que les flèches de passage de la suite pour n à la suite pour $n.n'$ sont toutes injectives. \square

Rappelons que la conjecture de Hodge rationnelle vaut en degré 2 et $2d - 2$ pour toute variété projective et lisse de dimension d , donc en tout degré $2i$ pour une variété de dimension

au plus 3. Plus généralement, comme rappelé dans l'introduction, Bloch et Srinivas [8, Thm. 1 (iv)] ont montré que si le groupe $CH_0(X)$ est « représenté » par le groupe CH_0 d'une variété de dimension au plus 3 alors la conjecture de Hodge rationnelle vaut en degré 4 pour X .

On a donc l'énoncé suivant :

Théorème 3.8. *Soit X connexe, projective et lisse. S'il existe une variété Y connexe, projective et lisse de dimension au plus 3 et un morphisme $f : Y \rightarrow X$ tels que l'application induite $f_* : CH_0(Y) \rightarrow CH_0(X)$ soit surjective, alors le groupe $Z^4(X)$ est un groupe fini, et l'on a la suite exacte*

$$0 \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow Z^4(X) \rightarrow 0.$$

Le théorème suivant s'applique en particulier aux variétés unirationnelles et aux solides uniréglés.

Théorème 3.9. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} . S'il existe une variété Y , projective et lisse de dimension 2 et un morphisme $f : Y \rightarrow X$ tels que l'application induite $f_* : CH_0(Y) \rightarrow CH_0(X)$ soit surjective, alors le groupe $Z^4(X)$ est fini, le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$ est nul et l'on a un isomorphisme de groupes finis $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong Z^4(X)$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 3.7 et 3.8, il suffit de montrer l'annulation de $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$. Sous l'hypothèse ci-dessus, celle-ci est un cas particulier de la proposition 3.3 (i). \square

Remarque 3.10. Dans [3], Barbieri-Viale considère les variétés projectives et lisses de dimension 3. Il montre (Teorema 5.2) que si $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2))) = 0$ (ce qui est en particulier satisfait si X est unirationnelle) alors pour tout entier $n > 0$,

$$H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) \cong Z^4(X)[n].$$

Les démonstrations de ce paragraphe étendent directement sa démonstration.

3.4 Défaut de la conjecture de Hodge entière en degré $2d - 2$.

Le cas particulier $\dim(X) = 3$ du théorème 3.7 porte sur les cycles de dimension 1. On peut aussi établir un énoncé sur les cycles de dimension 1 sur les variétés de dimension quelconque.

Théorème 3.11. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} , de dimension d . On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1))) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))) \rightarrow Z^{2d-2}(X) \rightarrow 0,$$

où le groupe $Z^{2d-2}(X)$ est fini. \square

Démonstration. Comme montré au théorème 3.1, on a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)) \rightarrow \mathcal{H}_X^d(\mu_n^{\otimes d-1}) \rightarrow 0.$$

Pour tout entier $n > 0$, on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)))/n \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mu_n^{\otimes d-1})) \rightarrow H^{d-2}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)))[n] \rightarrow 0.$$

Par passage à la limite sur n , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1))) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))) \rightarrow H^{d-2}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)))_{\text{tors}} \rightarrow 0.$$

Les termes E_2^{pq} de la suite spectrale de Bloch–Ogus pour le faisceau $\mathbb{Z}(d-1)$ sont nuls en dehors du triangle $0 \leq p \leq q \leq d$ (voir le §2.1). On obtient ainsi la suite exacte

$$H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1))) \rightarrow CH^{d-1}(X)/alg \rightarrow H^{2d-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(d-1)) \rightarrow H^{d-2}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1))) \rightarrow 0.$$

Les arguments donnés dans l’introduction montrent que le groupe $Z^{2d-2}(X)$ est fini, et qu’il s’identifie à la torsion du conoyau de l’application $CH^{d-1}(X)/alg \rightarrow H^{2d-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(d-1))$, et donc, d’après ce qui précède, à la torsion, finie, du groupe de type fini $H^{d-2}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)))$. \square

Corollaire 3.12. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} , de dimension d . Si le groupe $CH_0(X)$ est supporté sur une surface, alors on a un isomorphisme de groupes finis*

$$H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))) \xrightarrow{\cong} Z^{2d-2}(X).$$

Démonstration. D’après la proposition 3.3, le groupe $H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}(d-1)))$ est, sous l’hypothèse ci-dessus, de torsion. On conclut par une application du théorème 3.11. \square

Remarque 3.13. Comme il est remarqué dans [49, Lemme 1], le groupe $Z^{2d-2}(X)$ est un invariant birationnel des variétés projectives, lisses, connexes sur \mathbb{C} . Le théorème 3.11 décrit ce groupe à l’aide de la cohomologie de X à valeurs dans les faisceaux \mathcal{H}_X^d , $d = \dim X$, pour des coefficients adéquats. La proposition 3.4 montre que ces groupes sont aussi des invariants birationnels et la Proposition 3.6 donne une condition suffisante pour leur non trivialité à coefficients dans \mathbb{Q} .

Quant aux coefficients de torsion, pour tout entier $d \geq 3$, des exemples de Kollár (voir §5.3 ci-après, [34], [49, §2], [57, Thm. 1]) montrent que le groupe $Z^{2d-2}(X)$ n’est pas forcément nul.

Pour $d \geq 4$, ceci donne des exemples où les invariants birationnels $H^{d-2}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}))$ et $H^{d-3}(X, \mathcal{H}_X^d(\mathbb{Z}/n))$ sont non nuls, mais où cependant les groupes $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ intervenant dans la Proposition 3.6 sont nuls.

4 Cohomologie non ramifiée à coefficients entiers en degré 3, cohomologie cohérente en degré 3, groupe de Griffiths en degré 2

Dans toute cette section on considère une variété X connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} . On se propose de discuter un lien conjectural entre $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z})$ et $H^3(X, \mathcal{O}_X)$.

4.1 La situation en degrés 1 et 2

Les groupes H_{nr}^1 et H_{nr}^2 sont compris depuis longtemps ([26, II.3 et III.8]). Le lecteur vérifiera que l’on a $H_{nr}^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ si et seulement si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Notons $\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer–Grothendieck. Pour tout entier $n > 0$, on a

$$H_{nr}^2(X, \mu_n) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(X)[n].$$

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow NS(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H_{nr}^2(X, \mathbb{Z}(1)) \rightarrow 0,$$

où $NS(X)$ est le groupe de Néron–Severi de X . La flèche $NS(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$ induit un isomorphisme sur les groupes de torsion. Si l’on note ρ le rang du \mathbb{Q} -vectoriel $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ et b_2 le deuxième nombre de Betti de $X(\mathbb{C})$, on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$H_{nr}^2(X, \mathbb{Z}(1)) \simeq \mathbb{Z}^{b_2 - \rho}.$$

Enfin on a une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho} \rightarrow H_{nr}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))_{\text{tors}} \rightarrow 0.$$

Par ailleurs la théorie de Hodge montre que l'on a $b_2-\rho = 0$ si et seulement si $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. En d'autres termes, $H_{nr}^2(X, \mathbb{Z}(1)) = 0$ si et seulement si $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

4.2 La situation en degré 3

Au paragraphe 2.1, on vu l'isomorphisme

$$H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))] \xrightarrow{\cong} \text{Griff}^2(X).$$

Le théorème 3.1 assure que le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$ est sans torsion. Comme le groupe $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ est de type fini, on en déduit immédiatement :

Proposition 4.1. *Pour tout l premier, le sous-groupe de torsion l -primaire $\text{Griff}^2(X)\{l\}$ est de cotype fini, son sous-groupe divisible maximal étant de corang au plus le troisième nombre de Betti b_3 .*

Le résultat suivant montre que le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))]$ n'est pas en général de torsion.

Théorème 4.2. *(Griffiths [25]) Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une hypersurface très générale de degré 5. Alors le groupe $\text{Griff}^2(X)$ n'est pas de torsion.*

Ce résultat a été amélioré de façon frappante par Clemens [10] (voir aussi [55] pour le cas des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 arbitraires) qui montre que dans le cas considéré par Griffiths, le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\text{Griff}^2(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2))]$ n'est pas de dimension finie.

Par ailleurs le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))] \simeq \text{Griff}^2(X)$ n'est pas en général divisible :

Théorème 4.3. *(Bloch–Esnault [6]) Il existe des intersections complètes lisses $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ de dimension 3 pour lesquelles le groupe de Griffiths $\text{Griff}^2(X)$ n'est pas divisible.*

Ceci a été raffiné par C. Schoen [48]), qui montre qu'il existe des variétés X projectives lisses connexes de dimension 3 sur \mathbb{C} et des entiers $n > 1$ tels que les quotients $\text{Griff}^2(X)/n$ et $CH^2(X)/n = [CH^2(X)/\text{alg}]/n$ soient infinis.

Les démonstrations de ces résultats sont arithmétiques, les variétés considérées sont définies sur un corps de nombres.

Supposons maintenant $H^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$. La conjecture de Hodge généralisée (par Grothendieck [27]) prédit alors que la cohomologie $H^3(X, \mathbb{Q})$ est de coniveau géométrique 1, de sorte qu'il devrait exister une variété projective complexe lisse Y de dimension $n - 1$, où $n = \dim X$, et un morphisme $j : Y \rightarrow X$, tel que $j_* : H^1(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Q})$ soit surjectif. Il en résulte immédiatement que le morphisme induit par j_* entre les jacobiniennes intermédiaires $J^1(Y) = \text{Pic}^0(Y)$ et $J^2(X) = H^3(X, \mathbb{C})/(F^2H^3(X, \mathbb{C}) \oplus H^3(X, \mathbb{Z})/\text{tors})$ est surjectif. Comme l'application d'Abel-Jacobi $AJ_Y^1 : CH^1(Y)_{\text{hom}} \rightarrow J^1(Y)$ est surjective, il en résulte aussi que l'application d'Abel-Jacobi $AJ_X^2 : CH^2(X)_{\text{hom}} \rightarrow J^2(X)$ de X envoie surjectivement $j_*CH^1(Y)_{\text{hom}}$ vers $J^2(X)$. Or $j_*CH^1_{\text{hom}}(Y)$ est contenu dans le groupe $CH^2(X)_{\text{alg}}$ des cycles algébriquement équivalents à 0 de X .

Soit maintenant $z \in CH^2(X)_{\text{hom}}$. D'après ce qui précède, il existe $z' \in CH^2(X)_{\text{alg}}$ tel que $AJ_X^2(z - z') = 0$. Or on a la conjecture suivante, due à Nori [40] :

Conjecture 4.4. *Les cycles de codimension 2 homologues à 0 et annulés par l'application d'Abel-Jacobi sont de torsion modulo l'équivalence algébrique.*

On conclut donc que le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/\text{Im}[H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))] \simeq \text{Griff}^2(X)$ est conjecturalement de torsion si $H^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Par ailleurs la conjecture de Hodge généralisée ([27]) et l'hypothèse $H^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$ impliquent l'existence d'un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$ tel que la restriction $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2)) \rightarrow H^3(U(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2))$ soit nulle. Il existe donc un entier $n > 0$ tel que la restriction $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ soit annulée par n . A fortiori la flèche $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_B^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}(2))$ est-elle annulée par n . La restriction $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_B^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}(2))$ se factorise par la flèche $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z}(2))) \rightarrow H_B^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}(2))$ qui est injective par la théorie de Bloch–Ogus (théorème 2.3). Ainsi la flèche $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z}(2)))$ a son image annulée par $n > 0$. Mais $H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z}(2))) = H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$ est sans torsion ([8]; thm. 3.1 ci-dessus). La flèche $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$ est donc nulle. Ainsi $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \simeq \text{Griff}^2(X)$, mais le groupe de gauche est sans torsion et celui de droite conjecturalement de torsion.

La conjecture de Nori, combinée avec la conjecture de Hodge généralisée, et le théorème 3.1 permettraient donc d'établir la conjecture suivante.

Conjecture 4.5. *Si $H^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$, le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))$ est nul, ainsi que le groupe $\text{Griff}^2(X)$, et l'on a un isomorphisme de groupes finis $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} Z^4(X)$.*

Cet énoncé conjectural, faisant suite aux énoncés du paragraphe 4.1, suggère le problème intrigant suivant :

Pour $i \geq 4$, existe-t-il des variétés X avec $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour lesquelles $H_{nr}^i(X, \mathbb{Z}(i-1)) \neq 0$?

Notons qu'on a par ailleurs la conjecture suivante (pour laquelle les hypothèses ont une structure différente) :

Conjecture 4.6. *Si $H^j(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $j \geq i$, le groupe $H_{nr}^i(X, \mathbb{Z}(i-1))$ est nul.*

Cette dernière conjecture est en effet entraînée par la conjecture de Bloch généralisée (c'est-à-dire, la réciproque du théorème de Mumford généralisé [56, Théorème 22.17]), qui dit que sous ces hypothèses, il existe un fermé algébrique $Y \subset X$ de dimension $\leq i-1$ tel que la flèche $CH_0(Y) \rightarrow CH_0(X)$ soit surjective, combinée avec la proposition 3.3 (i).

5 Variétés avec $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \neq 0$ ou $Z^4(X)_{\text{tors}} \neq 0$.

Soit X une variété connexe, projective et lisse sur \mathbb{C} et $n > 0$ un entier. On a le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/n & \rightarrow & H_{\text{ét}}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))[n] \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/n & \rightarrow & H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) & \rightarrow & Z^4(X)[n] \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \text{Griff}^2(X)/n & \rightarrow & \text{Ker}[CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2})] & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

La première suite exacte horizontale vient de la longue suite exacte de groupes de cohomologie de Betti associée à la multiplication par n sur le faisceau constant $\mathbb{Z}(2)$; on a utilisé

l'identification $H_{\acute{e}t}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\simeq} H^3(X(\mathbb{C}), \mu_n^{\otimes 2})$. La suite exacte horizontale médiane est donnée par le théorème 3.7. Les deux flèches verticales supérieures de gauche sont les flèches évidentes, la flèche verticale supérieure droite est induite par le reste du diagramme. La suite verticale de gauche est induite par le théorème 2.7. La suite verticale médiane est celle donnée au paragraphe 2.2, après le théorème 2.11.

Dans ce paragraphe, on passe en revue un certain nombre d'exemples de variétés X construites dans la littérature, pour lesquelles certains des groupes apparaissant dans les deux lignes inférieures du diagramme ci-dessus sont non nuls.

Comme on le voit, deux groupes de types très différents peuvent contribuer à la non nullité de $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$: d'une part le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/n$, d'autre part le groupe $Z^4(X)[n]$. Nous commentons également ces exemples du point de vue du problème de déformation ou de spécialisation qui est décrit précisément dans la sous-section 5.1.

5.1 Déformation et spécialisation du groupe Z^{2i}

Lorsque l'on a un exemple de variété projective et lisse X avec $Z^{2i}(X) \neq 0$, on s'intéresse à la question de la stabilité de cet exemple par déformation, petite ou globale. Voici comment on peut donner un sens précis à ce problème (nous renvoyons à [59] pour plus de détails).

On a les inclusions $H_{alg}^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i)) \subset Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$. Une famille de déformations de X est une famille projective et lisse $\mathcal{X} \rightarrow T$ au-dessus d'un \mathbb{C} -schéma T connexe équipé d'un point marqué 0 , de fibre spéciale $\mathcal{X}_0 = X$. Soit $f : \mathcal{X}(\mathbb{C}) \rightarrow T(\mathbb{C})$ le morphisme correspondant de variétés complexes. D'après le lemme d'Ehresmann [56, 9.1], f est une fibration topologique au-dessus de $T(\mathbb{C})$. Il en résulte que $R^{2i}f_*\mathbb{Z}(i)$ est un système local sur $T(\mathbb{C})$.

Pour $t, s \in T(\mathbb{C})$, on a alors une identification $\rho_{t,s} : H^{2i}(\mathcal{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i)) \xrightarrow{\simeq} H^{2i}(\mathcal{X}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$, canoniquement déterminée par le choix d'un chemin continu $[0, 1] \rightarrow T(\mathbb{C})$ de t à s .

Partant d'une classe α dans $H^{2i}(\mathcal{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$, on se pose deux questions :

(a) pour quels $s \in T(\mathbb{C})$ a-t-on $\rho_{t,s}(\alpha) \in Hdg^{2i}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$ (pour un choix adéquat de chemin de t à s) ?

(b) pour quels $s \in T(\mathbb{C})$ a-t-on $\rho_{t,s}(\alpha) \in H_{alg}^{2i}(\mathcal{X}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ (pour un choix adéquat de chemin de t à s) ?

Une conséquence très simple de l'existence, de la projectivité, et de la dénombrabilité des schémas de Hilbert relatifs est l'énoncé suivant (cf. [59, 1.2]) :

Lemme 5.1. *L'ensemble $T_{\alpha,alg}$ des $s \in T(\mathbb{C})$ tels que $\rho_{t,s}(\alpha) \in H_{alg}^{2i}(\mathcal{X}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ pour un choix adéquat de chemin de t à s est une union dénombrable de fermés algébriques de T .*

Soit T_{alg} l'union (dénombrable) des ensembles $T_{\alpha,alg}$, prise sur les classes α telles que $T_{\alpha,alg} \neq T(\mathbb{C})$. Cet ensemble ne dépend pas de t , comme il résulte des propriétés formelles du transport parallèle.

Infiniment plus difficile est l'énoncé correspondant pour les classes de Hodge, montré par Cattani, Deligne et Kaplan [9] :

Théorème 5.2. *L'ensemble $T_{\alpha,Hdg}$ des $s \in T(\mathbb{C})$ tels que $\rho_{t,s}(\alpha) \in Hdg^{2i}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$ pour un choix adéquat de chemin de t à s est un fermé algébrique de T .*

Soit T_{Hdg} l'union (dénombrable) des fermés $T_{\alpha,Hdg}$, prise sur les classes α telles que $T_{\alpha,Hdg} \neq T(\mathbb{C})$. Comme précédemment, cet ensemble ne dépend pas de t .

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 5.3. *i) Si $t \in T(\mathbb{C})$ est très général (et plus précisément, en dehors de T_{alg}), pour toute classe $\alpha \in H_{alg}^{2i}(\mathcal{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$, pour tout $s \in T(\mathbb{C})$, et pour tout choix de chemin de t à s , on a $\rho_{t,s}(\alpha) \in H_{alg}^{2i}(\mathcal{X}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$.*

ii) Si $t \in T(\mathbb{C})$ est très général (et plus précisément, en dehors de T_{Hdg}), pour toute classe $\alpha \in Hdg^{2i}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$, pour tout $s \in T(\mathbb{C})$, et pour tout choix de chemin de t à s , on a $\rho_{t,s}(\alpha) \in Hdg^{2i}(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$.

Ceci montre que pour t très général, et pour tout $s \in T(\mathbb{C})$, on dispose d'une application

$$\rho_{t,s}^i : Z^{2i}(\mathcal{X}_t) \rightarrow Z^{2i}(\mathcal{X}_s) \quad (3)$$

déterminée par le choix d'un chemin de t à s et donc bien définie à composition près à droite et à gauche par l'action de monodromie (l'action à gauche préservant $Hdg^{2i}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$ et $H_{alg}^{2i}(\mathcal{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$ et donc agissant sur $Z^{2i}(\mathcal{X}_t)$).

Une façon de formuler le problème de déformation consiste à examiner les questions suivantes :

- (c) Pour t très général dans $T(\mathbb{C})$, l'application $\rho_{t,s}^i$ est-elle injective pour tout s ?
- (d) Pour t très général dans $T(\mathbb{C})$, l'application $\rho_{t,s}^i$ est-elle surjective pour tout s ?

Les questions (c) et (d) ne sont en fait intéressantes que pour les entiers i pour lesquels les groupes Z^{2i} sont des invariants birationnels non triviaux, c'est-à-dire $i = 2$ et $i = n - 1$, $n = \dim \mathcal{X}_t$. Elles sont motivées par l'application potentielle à l'étude ou la caractérisation des variétés rationnelles : on ignore en effet si, pour une famille $\mathcal{X} \rightarrow B$ de variétés projectives lisses sur un corps algébriquement clos K , la propriété de rationalité des fibres \mathcal{X}_b est une propriété ouverte, ou fermée, sur $B(K)$ pour la topologie de Zariski. Un seul fait est évident, par considération de la dénombrabilité et de la projectivité des schémas de Hilbert relatifs de $\mathbb{P}^n \times \mathcal{X} \rightarrow B$: cette propriété est satisfaite sur une union dénombrable de sous-ensembles localement fermés pour la topologie de Zariski.

La question (c) concernant l'injectivité peut aussi être formulée pour une classe $\alpha \in Z^{2i}(\mathcal{X}_t)$ non nulle donnée : a-t-on $\rho_{t,s}^i(\alpha) \neq 0$ dans $Z^{2i}(\mathcal{X}_s)$ pour tout s ? On verra au paragraphe 5.3 que la question (c) a en général une réponse négative en degré $i = 2$ et pour des variétés de dimension 3.

En ce qui concerne la question (d), la réponse est négative pour $i \neq 2, n - 1$, comme le montre l'exemple suivant : Partons de n'importe quelle variété Y pour laquelle $Z^4(Y)$ est un groupe cyclique d'ordre $d \geq 4$ (voir paragraphe 5.3), introduisons la famille $\mathcal{S} \rightarrow B$ des surfaces lisses de degré d dans \mathbb{P}^3 , et considérons la famille $\mathcal{X} = \mathcal{S} \times Y \rightarrow B$. Soit $\alpha \in Hdg^4(Y, \mathbb{Z})$ une classe de Hodge entière non algébrique. Choisissons $s \in B$ tel que la surface \mathcal{S}_s contienne une droite Δ , et soit $\delta := [\Delta] \in Hdg^2(\mathcal{S}_s, \mathbb{Z}) \subset H^2(\mathcal{S}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Alors la classe $\alpha' := pr_1^* \delta \cup pr_2^* \alpha \in Hdg^6(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$ n'est pas algébrique, car sinon $\alpha = pr_{2*}(pr_1^* c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_s}(1)) \cup \alpha')$ le serait aussi. Cette classe fournit donc une classe non nulle $\overline{\alpha'}$ dans $Z^6(\mathcal{X}_s)$, et on a :

Lemme 5.4. *La classe $\overline{\alpha'}$ n'est pas dans l'image de l'application $\rho_{t,s}^3$ pour un point très général t de B .*

Démonstration. En effet, supposons par l'absurde que $\overline{\alpha'}$ soit dans l'image de $\rho_{t,s}^3$. De façon équivalente, on peut écrire $\alpha' = \alpha'_1 + \alpha'_2$, où α'_1 est une classe algébrique sur \mathcal{S}_s et $\alpha'_2 \in Hdg^6(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$ est une classe de Hodge qui est obtenue par transport parallèle d'une classe de Hodge au point très général t . Le théorème de Noether-Lefschetz [56, 15.3] dit que les classes de Hodge sur \mathcal{S}_t , pour t très général dans B , sont réduites à la classe $c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_t}(1))$. On en déduit que

$\alpha'_2 \in H^6(\mathcal{X}_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ a sa composante de Künneth de type (2, 4) de la forme $pr_1^*c_1(\mathcal{O}_{S_s}(1)) \cup pr_2^*\beta$ pour une certaine classe $\beta \in Hdg^4(Y, \mathbb{Z})$, puis que

$$\alpha = pr_{2*}(pr_1^*c_1(\mathcal{O}_{S_s}(1)) \cup \alpha') = pr_{2*}(pr_1^*c_1(\mathcal{O}_{S_s}(1)) \cup (\alpha'_1 + \alpha'_2))$$

est égal modulo les classes algébriques sur Y à $\deg(c_1(\mathcal{O}_{S_s}(1))^2)\beta = d\beta$. Comme le groupe $Z^4(Y)$ est annulé par d , le dernier terme est nul dans $Z^4(Y)$, ce qui contredit le fait que α est non nul dans $Z^4(Y)$. □

Par contre pour $i = 2$ ou $i = n - 1$, on ne connaît pas de contre-exemple à la question (d).

5.2 Exemples d'Atiyah–Hirzebruch

On sait depuis Atiyah et Hirzebruch [2] que les groupes $Z^{2i}(X)$ ne sont pas forcément triviaux pour $i \neq 1$. Pour tout premier l , leur méthode permet en particulier de fabriquer une variété X avec $Z^4(X)[l] \neq 0$. Pour ces variétés, on a donc $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/l) \neq 0$. L'exemple de dimension minimale chez eux, pour $l = 2$, est une variété de dimension 7. Les exemples de Atiyah et Hirzebruch sont de nature topologique. Ce sont des classes de torsion dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ sur une variété projective complexe $X(\mathbb{C})$, qui ne peuvent pour des raisons de cobordisme complexe (voir Totaro [52]) être des classes de cycles analytiques pour aucune structure complexe sur $X(\mathbb{C})$. En particulier, dans le langage introduit au paragraphe 5.1, ces classes $\alpha \in H^4(\mathcal{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$, avec $X \cong \mathcal{X}_t$, ont la propriété que $\rho_{t,s}^2(\alpha)$ reste de Hodge en tout point s , et $\rho_{t,s}(\alpha)$ ne s'annule pas dans $Z^4(\mathcal{X}_s)$, quel que soit $s \in T(\mathbb{C})$. L'espace de paramètres T est ici un ouvert non vide dans un espace projectif sur \mathbb{Q} . On peut donc choisir $s \in T(\mathbb{Q})$ et facilement donner des exemples d'Atiyah–Hirzebruch définis sur \mathbb{Q} . En cohomologie l -adique, on peut donner des exemples analogues sur des corps finis (voir [18]).

Par ces méthodes topologiques, Totaro ([52, Thm. 7.1]) a aussi construit des variétés projectives et lisses X de dimension 7 sur \mathbb{C} , de type Godeaux–Serre, telles que l'application $CH^2(X)/2 \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mathbb{Z}/2)$ n'est pas injective. Ainsi l'application $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/2)$ n'est pas surjective.

5.3 Exemples de Kollár

Pour toute hypersurface lisse X dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$, on a $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}$ et donc $Hdg^4(X) = H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}$. Le sous-groupe $H_{alg}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \subset H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Z}$ est l'idéal $\mathbb{Z}.I \subset \mathbb{Z}$ (avec $I \in \mathbb{N}$) engendré par les degrés des courbes contenues dans X . Dans [34], Kollár montre que pour les hypersurfaces très générales dans \mathbb{P}^4 , de degré suffisamment divisible, on a $I \neq 1$ et donc d'une part $Z^4(X) = \mathbb{Z}/I \neq 0$, d'autre part $CH^2(X)/I \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mu_I^{\otimes 2})$ non injective (pour plus de détails, voir [49]).

Ces exemples sont très instructifs du point de vue du problème de déformation/spécialisation soulevé dans la section 5.1. Tout d'abord, notons que la classe de Hodge α engendrant le groupe $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ est de Hodge en tout point de la famille naturelle T de déformations de X . Ainsi les flèches $\rho_{t,s}^2 : Z^4(\mathcal{X}_t) \rightarrow Z^4(\mathcal{X}_s)$ de (3), définies pour t très général dans $T(\mathbb{C})$, sont surjectives pour tout s . Elles ne sont cependant pas injectives pour tout s : en effet, lorsque \mathcal{X}_s contient une droite, la classe α devient algébrique et donc $Z^4(\mathcal{X}_s) = 0$. Il est même montré dans [49] que, t étant fixé très général, la classe $\rho_{t,s}^2(\alpha)$ s'annule pour s dans une union dénombrable de fermés algébriques de T , dense pour la topologie usuelle de $T(\mathbb{C})$. Ceci montre qu'il faut bien prendre une union dénombrable d'ensembles algébriques dans le lemme 5.1, alors que le théorème 5.2 suggérerait qu'un fermé algébrique suffirait.

Remarque 5.5. Malgré la nécessité d’ôter de $T(\mathbb{C})$ une union dénombrable de sous-ensembles fermés algébriques définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ pour construire des variétés X avec $Z^4(X) \neq 0$, Hassett et Tschinkel ont montré que les exemples de Kollár peuvent être choisis définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (voir la remarque 5.9). Par contraste, sous l’hypothèse que la conjecture de Tate sur les diviseurs sur les surfaces sur un corps fini vaut, on ne peut pas construire d’exemple à la Kollár sur la clôture algébrique d’un corps fini ([18, §6]).

5.4 Exemples de Bloch–Esnault et Schoen

Comme rappelé ci-dessus (Théorème 4.3), Bloch et Esnault [6], resp. Schoen [48], construisent des variétés de dimension 3 pour lesquelles, pour un entier $n > 1$ convenable, le quotient $\text{Griff}^2(X)/n$ est non nul, resp. infini. Des suites exactes du début du paragraphe, il suit donc que, dans les cas cités, $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2))/n$ est non nul, resp. infini, et qu’il en est de même de $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$. Pour les exemples de Schoen, il est alors clair que le noyau de $CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est infini.

Dans les exemples de Bloch et Esnault, le groupe $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est sans torsion. Des suites exactes du début du paragraphe et de la non nullité du groupe $\text{Griff}^2(X)/n$ on déduit alors que l’application $CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2})$ n’est pas injective. Ceci laisse ouverte la question de la trivialité du groupe $Z^4(X)_{\text{tors}}$ pour ces variétés.

5.5 Exemples de Gabber

Soient $E_i, i = 1, 2, 3$ des courbes elliptiques, l un nombre premier, et pour chaque i , $\alpha_i \in H_{\text{ét}}^1(E_i, \mathbb{Z}/l)$ non nul. Un cas particulier d’un résultat de Gabber [21] dit que si les j -invariants des courbes E_i sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , alors le cup-produit $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \in H_{\text{ét}}^3(X, \mathbb{Z}/l)$ a une image non nulle dans $H^3(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/l)$. On obtient ainsi des classes non nulles dans $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/l)$. Mais celles-ci proviennent de classes dans $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z})/l$, elles ont donc une image nulle dans $Z^4(X)[l]$.

5.6 Certaines variétés unirationnelles

Les variétés considérées dans les exemples précédents ne sont pas rationnellement connexes (les exemples d’Atiyah et Hirzebruch, par construction, admettent des revêtements non ramifiés).

On a le résultat suivant, qui repose sur un théorème d’Arason sur la cohomologie galoisienne des corps de fonctions de certaines quadriques :

Théorème 5.6. (*Colliot-Thélène–Ojanguren [16]*) *Il existe des variétés X projectives, lisses, connexes, unirationnelles, de dimension 6, telles que $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/2) \neq 0$.*

Étant unirationnelles, ces variétés ont un groupe CH_0 isomorphe à \mathbb{Z} . Le théorème 3.9 du présent article montre alors que l’on a $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) = 0$ et $Z^4(X) = Z^4(X)_{\text{tors}} \neq 0$. Ces exemples permettent donc, en dimension ≥ 6 , de répondre négativement à une partie de la question 16 posée dans [58] : la conjecture de Hodge entière est-elle satisfaite pour les classes de Hodge de degré 4 sur les variétés rationnellement connexes ?

Les exemples de [16] sont des variétés fibrées en quadriques de dimension 3 au-dessus de l’espace projectif de dimension 3. D’autres exemples de variétés unirationnelles satisfaisant $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \neq 0$ pour n convenable ont été obtenus par E. Peyre [43, 44]. Pour la même raison que précédemment, ces exemples satisfont aussi $Z^4(X) = Z^4(X)_{\text{tors}} \neq 0$.

La construction donnée dans [16] de classes non triviales dans $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/2)$ est explicite. Des modèles lisses des variétés considérées étant difficiles à construire, les éléments non triviaux

correspondants du groupe $Z^4(X)$, c'est-à-dire des classes de Hodge entières non algébriques, sont difficiles à analyser. Ces classes proviennent-elles ou non comme dans les exemples d'Atiyah-Hirzebruch de classes de torsion dans $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$? Ce problème est lié à la question de savoir si l'application $CH^2(X)/2 \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mathbb{Z}/2)$ est injective.

La théorie des déformations de ces variétés semble très difficile. Ces classes de Hodge sont-elles stables par déformation, c'est-à-dire, sont-elles dans l'image de l'application de spécialisation $\rho_{t,s}^2$ de (3) pour t très général dans la base d'une famille complète de déformations de X ? Il n'est pas clair non plus si, se plaçant en un point très général t de la famille de déformations T de X préservant ces classes de Hodge (cf. théorème 5.2), ces classes peuvent s'annuler sous l'application de spécialisation $\rho_{t,s}^2$, pour un $s \in T(\mathbb{C})$.

5.7 Une variété X de dimension 3 avec $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$

On donne maintenant un exemple de telle variété (projective et lisse) avec $Z^4(X) \neq 0$. Dans cet exemple, le groupe $Z^4(X)$ n'est pas localement constant par déformations.

Soit $G = \mathbb{Z}/5$. On choisit une racine 5-ième de l'unité ζ non triviale et un générateur g de G , et on fait agir G sur $\mathbb{P}^1 = \text{Proj } \mathbb{C}[x, y]$ et sur $\mathbb{P}^3 = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} g^*x &= x, \quad g^*y = \zeta y, \\ g^*x_i &= \zeta^i x_i, \quad i = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Soit $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ une hypersurface de bidegré $(3, 4)$ définie par une équation $f = 0$, avec $f \in H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3}(3, 4))$ invariante sous G . Soit $\tau : \widetilde{W} \rightarrow W$ une désingularisation de $W = X/G$. Si f est génériquement choisie, X n'a que des singularités isolées et un théorème de Bertini implique que la première projection $pr_1 : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ a pour fibre générale une surface $K3$ lisse de degré 4. Le groupe G agit librement sur X et \mathbb{P}^1 en dehors de points fixes isolés et pr_1 est équivariante. Il en résulte que l'application $W \rightarrow \mathbb{P}^1/G$ a aussi pour fibre générale une surface $K3$ lisse de degré 4.

Proposition 5.7. *Soient X, W, \widetilde{W} comme ci-dessus. Si X est très générale en modules, alors :*

- (i) *On a $H^i(\widetilde{W}, \mathcal{O}_{\widetilde{W}}) = 0$ pour $i > 0$.*
- (ii) *La 2-torsion du groupe $Z^4(\widetilde{W})$ est non nulle.*
- (iii) *Le groupe $H_{nr}^3(\widetilde{W}, \mathbb{Z}/2)$ est non nul.*

Démonstration. Notons d'abord que pour un choix générique de f , la variété X a au pire des singularités quadratiques ordinaires. En effet, par le théorème de Bertini X est génériquement lisse en dehors du lieu de base du système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3}(3, 4)|^G$, qui est constitué des points

$$\begin{aligned} O_1 &: y = 0, x_0 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0, \\ O_2 &: y = 0, x_0 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \\ O_3 &: y = 0, x_0 = 0, x_3 = 0, x_1 = 0, \\ O'_1 &: x = 0, x_3 = 0, x_0 = 0, x_1 = 0, \\ O'_2 &: x = 0, x_3 = 0, x_0 = 0, x_2 = 0, \\ O'_3 &: x = 0, x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0. \end{aligned}$$

Un examen de l'équation générique de X en ces points permet de conclure.

Comme les singularités de X sont rationnelles, pour toute désingularisation \tilde{X} de X , on a $H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = H^i(X, \mathcal{O}_X)$. Pour toute désingularisation \tilde{W} de W , l'application rationnelle naturelle

$$Q : \tilde{X} \dashrightarrow \tilde{W}$$

est G -équivariante, et identifie birationnellement \tilde{W} à \tilde{X}/G . Il en résulte que

$$H^i(\tilde{W}, \mathcal{O}_{\tilde{W}}) \subset H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})^G = H^i(X, \mathcal{O}_X)^G. \quad (4)$$

En effet, nous pouvons supposer que l'application quotient Q est un morphisme. Il en résulte (cf. [56, 7.3.2]) que l'application

$$Q^* : H^i(\tilde{W}, \mathcal{O}_{\tilde{W}}) \rightarrow H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

est injective, et elle envoie $H^i(\tilde{W}, \mathcal{O}_{\tilde{W}})$ dans $H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})^G$ par G -invariance de Q .

Pour établir l'énoncé (i), il suffit donc de montrer que l'on a $H^i(X, \mathcal{O}_X)^G = 0$ pour $i > 0$. Pour $i = 1, 2$, cela résulte du fait que $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ est un diviseur ample. Pour $i = 3$, on doit montrer de façon équivalente que $H^0(X, K_X)^G = 0$. Or par adjonction $K_X = \mathcal{O}_X(1, 0)$, et plus précisément les sections de K_X sont données par les $\eta_P := \text{Res}_X \frac{P\Omega}{f}$, où $P \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1, 0))$ et Ω est le générateur naturel de $H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3, K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3}(2, 4))$.

Notant que $g^*\Omega = \zeta^2\Omega$, on conclut que η_P est G -invariante si et seulement si $g^*P = \zeta^3P$. Comme g n'agit pas avec la valeur propre ζ^3 sur $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, on a bien montré que $H^0(X, K_X)^G = 0$.

Notons $\pi : W \rightarrow \mathbb{P}^1/G \cong \mathbb{P}^1$ l'application naturelle, et $l := (\pi \circ \tau)^*c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$: c'est la classe des fibres de $\tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Comme $H^2(\tilde{W}, \mathcal{O}_{\tilde{W}}) = 0$, la structure de Hodge sur $H^4(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ (qui est dual au sens de Poincaré de $H^2(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$) est triviale, c'est-à-dire entièrement de type $(2, 2)$.

Toutes les classes entières dans $H^4(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ sont donc de Hodge. Pour montrer que la 2-torsion de $Z^4(\tilde{W})$ est non nulle, il suffit de montrer :

(1) Il existe une classe $\alpha \in H^4(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H_2(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ telle que $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha = 5$.

(2) Pour X très générale, et pour toute classe algébrique $[Z] \in H^4(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, $\deg_{[Z]} l$ est pair. De façon équivalente, pour toute courbe Z contenue dans W , le degré de la restriction de π à Z est pair.

En effet, l'intersection avec Z induit alors un homomorphisme de groupes finis $Z^4(\tilde{W}) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ qui envoie α sur la classe $1 \in \mathbb{Z}/2$.

L'énoncé (1) est obtenu en spécialisant X en un X_0 générique contenant une droite $\mathbb{P}^1 \times M$, où M est génériquement choisi. On vérifie que X_0 est alors lisse le long de cette droite, et que W_0 est lisse le long de son image Δ dans W_0 . La courbe Δ se relève naturellement en une courbe $\tilde{\Delta} \subset \tilde{W}_0$ qui satisfait $\deg_{\tilde{\Delta}} l = 5$. Comme W_0 est lisse le long de Δ , la classe $\delta = [\tilde{\Delta}] \in H_2(\tilde{W}_0(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ s'étend par ailleurs en une classe dans $H_2(\tilde{W}(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ pour toute petite déformation W de W_0 , ce qui donne la classe α souhaitée.

La preuve de (2) se fait par spécialisation. En effet, X et donc W étant choisies très générales, tout 1-cycle de W se spécialise dans n'importe quelle spécialisation W_0 de W . Il suffit donc de spécialiser W en W_0 , de façon que W_0 ne contienne pas de 1-cycle de degré impair au-dessus de \mathbb{P}^1 . On choisit la spécialisation suivante (cf. [50]) : On considère le morphisme G -équivariant

$$\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

défini par $\phi^*x = u^4$, $\phi^*y = v^4$, où u, v sont des coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^1 , avec l'action (linéarisée) suivante de $G : g^*u = u$, $g^*v = \zeta^4v$. On choisit un élément G -invariant générique Q (relativement à cette dernière action) de $H^0(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3}(3, 1))$.

Un tel élément s'écrit (modulo l'action de scalaires sur les x_i) sous la forme

$$Q = u^3x_0 + u^2vx_1 + uv^2x_2 + v^3x_3. \quad (5)$$

Soit $\Gamma \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ le diviseur de Q , et soit $X_0 := (\phi, Id)(\Gamma)$. Comme le degré de ϕ est 4, on a $X_0 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3}(3, 4)|$. Par G -équivariance (linéarisée) de ϕ , X_0 est de plus défini par une équation G -invariante. Le lemme 5.8 suivant conclut la démonstration de l'énoncé (ii). Le théorème 3.7 donne alors l'énoncé (iii). \square

Lemme 5.8. *Pour toute courbe $Z \subset W_0$, le degré de $\pi|_Z : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ est pair.*

Démonstration. Comme le degré de l'application quotient $X_0 \rightarrow W_0$ est impair, il suffit de montrer que pour toute courbe $Z \subset X_0$, le degré de $pr_{1|Z} : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ est pair. La preuve est semblable à celle de Starr [50]. La fibre de $pr_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ au-dessus de t est un hyperplan H_t , et donc la fibre de $pr_1 : X_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est constituée de l'union des quatre hyperplans H_{t_i} , où $\{t_1, \dots, t_4\} = \phi^{-1}(\{t\})$. Ces quatre hyperplans sont pour t générique en position générale, comme le montre l'équation (5). Soit $Z \subset X_0$ une courbe dominant \mathbb{P}^1 . On peut supposer Z irréductible. Au point générique z de Z , envoyé par pr_1 sur le point $t \in \mathbb{P}^1$, z appartient à m des hyperplans H_{t_i} , où $m \leq 3$. Donc il y a une factorisation naturelle de $pr_{1|Z}$ à travers la courbe $C_m \rightarrow \mathbb{P}^1$ paramétrant m points dans les fibres de $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Pour $m = 1$ ou 3 , $C_m \rightarrow \mathbb{P}^1$ s'identifie à $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Donc le degré de C_m sur \mathbb{P}^1 est divisible par 4. Pour $m = 2$, comme ϕ est un revêtement galoisien cyclique d'ordre 4, $C_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ a deux composantes au-dessus de \mathbb{P}^1 , l'une de degré 2, l'autre de degré 4. Donc toutes les composantes des courbes C_m , $m \leq 3$, sont de degré pair au-dessus de \mathbb{P}^1 . Comme $pr_{1|Z}$ se factorise à travers l'une de ces composantes, on conclut que le degré de $pr_{1|Z}$ est pair. \square

Remarque 5.9. De tels exemples peuvent en fait être construits sur \mathbb{Q} et c'est aussi le cas pour les exemples de Kollár (cf. section 5.3). Ceci nous a été signalé par Hassett et Tschinkel. En effet, la terminologie « très générale » a été utilisée dans la démonstration ci-dessus pour s'assurer que tout 1-cycle de W se spécialise avec W , ce qu'on obtient en demandant que W ne soit pas paramétré par un point de l'espace de modules qui appartient à l'image d'un schéma de Hilbert relatif ne dominant pas l'espace de modules.

Mais si W est définie sur \mathbb{Q} , les cycles de W se spécialisent aussi bien aux réductions de W modulo p (pour presque tout p). Dans l'argument précédent, il suffit donc de supposer que W a une réduction modulo p , pour p premier adéquat, qui est de la forme W_0 comme ci-dessus. En effet, le lemme 5.8 est vrai en caractéristique $p > 2$.

Remarque 5.10. Comme on le voit dans la preuve, les contre-exemples à la conjecture de Hodge entière construits dans la proposition 5.7 sont, comme ceux de Kollár, instables par déformation : la classe considérée non nulle $\alpha \in Z^4(\widetilde{W}_t)$, où t est un point très général de la base T paramétrant les déformations des variétés \widetilde{W} , s'annule en certains points : $\rho_{t,s}(\alpha) = 0$ dans $Z^4(\widetilde{W}_s)$ pour certains $s \in T(\mathbb{C})$.

6 Cas de nullité des groupes $Z^4(X)$ et $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$

Le théorème 5.6 montre que l'invariant $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/2)$, ou encore la 2-torsion du groupe $Z^4(X)$, peuvent être non nuls pour des variétés unirationnelles, donc rationnellement connexes, de dimension 6. Cependant, on a le :

Théorème 6.1. (Voisin [57]) Soit X une variété projective et lisse de dimension 3 sur \mathbb{C} . Le groupe $Z^4(X)$ est nul dans chacun des cas suivants :

- (i) X est uniréglée;
- (ii) X est une variété de Calabi-Yau.

Corollaire 6.2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et X un solide projectif et lisse sur k . Si la variété X est uniréglée, alors pour tout entier $n > 0$, les groupes $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$ sont nuls.

Démonstration. Pour obtenir le résultat lorsque $k = \mathbb{C}$, il suffit de combiner les théorèmes 3.8, 3.9 et 6.1. Il est par ailleurs connu que les groupes de cohomologie non ramifiée à coefficients de torsion sont invariants par extension de corps de base algébriquement clos ([13, Thm. 4.4.1]). \square

Proposition 6.3. Soit X un solide projectif et lisse sur \mathbb{C} , uniréglé et sans torsion dans son groupe de Picard, et tel que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Pour tout entier $n > 0$:

- (i) L'application classe de cycle $CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est un isomorphisme.
- (ii) Les groupes $H^i(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 3}))$ sont nuls pour $i \neq 3$, et $H^3(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 3})) \simeq \mathbb{Z}/n$.

Notons que les hypothèses impliquent $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$.

Démonstration. D'après le corollaire 6.2, on a $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) = 0$, et on a donc aussi $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes i})) = 0$ pour tout i .

Pour une variété X de dimension 3 satisfaisant $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, la structure de Hodge sur $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2))$ est triviale. On a donc $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) = \text{Hdg}^4(X, \mathbb{Z})$. Si de plus X est uniréglée, le théorème 6.1 dit alors que l'application classe de cycle $CH^2(X) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))$ est surjective.

On a la suite exacte

$$H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/n \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^5(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))[n].$$

Par dualité de Poincaré, la n -torsion de $H^5(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ s'identifie à la torsion de $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Par hypothèse, $X(\mathbb{C})$ ne possède pas de revêtements finis abéliens non ramifiés. On a donc $H^5(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))[n] = 0$, d'où l'on déduit que l'application $CH^2(X)/n \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mu_n^{\otimes 2})$ est surjective, ce qui entraîne le même énoncé en cohomologie étale. Enfin l'injectivité de cette flèche résulte de l'annulation $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) = 0$. Ceci établit l'énoncé (i).

On considère, pour tout i entier, la suite spectrale de Bloch–Ogus pour la cohomologie étale :

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}_X^q(\mu_n^{\otimes i})) \implies H_{\text{ét}}^n(X, \mu_n^{\otimes i}).$$

Le théorème 2.11 et le théorème de Lefschetz faible pour la cohomologie étale montrent que cette suite spectrale est concentrée dans le triangle $0 \leq p \leq q \leq 3$. On en déduit alors l'isomorphisme $H^2(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) \xrightarrow{\simeq} H_{\text{ét}}^5(X, \mu_n^{\otimes 2})$. Par la dualité de Poincaré en cohomologie étale, ce dernier groupe est dual de $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n)$. Mais ce groupe n'est autre que la n -torsion du groupe de Picard de X , par hypothèse nulle. De la suite spectrale on déduit l'isomorphisme $H^3(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 3})) \xrightarrow{\simeq} H_{\text{ét}}^6(X, \mu_n^{\otimes 3}) \simeq \mathbb{Z}/n$. En utilisant la nullité de $H^0(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2}))$, on déduit de la suite spectrale la suite exacte

$$0 \rightarrow CH^2(X)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) \rightarrow 0,$$

où la première application est l'application classe de cycle. L'énoncé (i) montre alors que l'on a $H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes 2})) = 0$ et donc $H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mu_n^{\otimes i})) = 0$ pour tout i . \square

Remarque 6.4. Des propriétés de rigidité des groupes $H^i(X, \mathcal{H}^j(\mathbb{Z}/n))$ en principe connues ([13, Rmk. 4.4.2]; U. Jannsen, « Rigidity results on K-theory and other functors » (non publié, 1995)) permettent de déduire du théorème ci-dessus le même énoncé sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Remarque 6.5. La proposition ci-dessus s'applique en particulier à tout solide rationnellement connexe. On sait en effet que toute variété projective lisse rationnellement connexe est algébriquement simplement connexe et satisfait de plus $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

On pourrait se poser la question : Pour une variété X de dimension 3 dont le groupe de Chow des zéro-cycles est supporté sur une surface, le groupe fini $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq Z^4(X)$ (voir le théorème 3.9) est-il nul ? La réponse est très probablement non, car si la conjecture de Bloch (voir [5, lecture 1] pour les surfaces et [56, Conjecture 23.23] en dimension arbitraire) est satisfaite par les variétés X construites au paragraphe 5.7, celles-ci fournissent alors un contre-exemple. De fait on devrait avoir pour ces variétés un isomorphisme $\text{deg} : CH_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Les résultats et exemples ci-dessus laissent néanmoins ouvertes les questions suivantes.

Question 6.6. *Pour une variété X rationnellement connexe de dimension 4 ou 5, le groupe fini $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq Z^4(X)$ est-il nul ?*

Question 6.7. *([58, Question 16]) Pour une variété X rationnellement connexe de dimension d quelconque, le groupe fini $Z^{2d-2}(X)$ est-il nul ?*

D'après [57], la réponse à cette dernière question est affirmative en dimension $d \leq 3$. En dimension 4, mentionnons le résultat (cf. [28, Theorem 1.7]) : Pour une variété de Fano X lisse de dimension 4, le groupe $Z^6(X)$ est nul.

Pour la question 6.6 une réponse affirmative pour les hypersurfaces cubiques de dimension 4 est donnée dans [58]. On va établir ici un résultat plus général. On s'intéresse ici au groupe $Z^4(X)$, où $f : X \rightarrow \Gamma$ est une fibration en variétés projectives X_t de dimension 3 satisfaisant $H^3(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$. Pour $X_t, t \in \Gamma(\mathbb{C})$, comme ci-dessus, la jacobienne intermédiaire $J^2(X_t)$ est une variété abélienne, du fait que $H^3(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ (cf. [56, 12.2.2]) et pour toute classe $\alpha \in H^4(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \text{Hdg}^4(X_t, \mathbb{Z})$, on dispose d'un torseur $J^2(X_t)_\alpha$ sous $J^2(X_t)$ qui est une variété algébrique et qu'on peut définir par la formule :

$$J^2(X_t)_\alpha := d^{-1}(\alpha),$$

où $d : H_D^4(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Hdg}^4(X_t, \mathbb{Z})$ est l'application naturelle de la cohomologie de Deligne vers la cohomologie de Betti à coefficients entiers, d'image $\text{Hdg}^4(X, \mathbb{Z})$ (cf. [56, 12.3.1]). Pour toute famille de 1-cycles $\mathcal{Z} \subset B_t \times X_t$ sur X_t de classe $[Z_t] = \alpha$ paramétrée par une variété algébrique B_t , l'application d'Abel-Jacobi (ou plutôt classe de Deligne) de X_t induit un morphisme de variétés algébriques complexes :

$$AJ_{X_t}^2 : B_t \rightarrow J^2(X_t)_\alpha.$$

Cette situation se met en famille au-dessus de l'ouvert $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de lissité de f . On dispose donc d'une famille de variétés abéliennes $\mathcal{J}^2 \rightarrow \Gamma_0$, et pour toute section α de $R^4 f_* \mathbb{Z}$ sur Γ_0 , de la famille tordue $\mathcal{J}_\alpha^2 \rightarrow \Gamma_0$. Etant donné une variété algébrique B , un morphisme $g : B \rightarrow \Gamma$ et une famille de 1-cycles relatifs $\mathcal{Z} \subset B \times_\Gamma X$ de classe $[Z_t] = \alpha_t \in H^4(X_t, \mathbb{Z})$, l'application d'Abel-Jacobi relative fournit un morphisme $\phi_{\mathcal{Z}} : B_0 \rightarrow \mathcal{J}_\alpha^2$ au-dessus de Γ_0 , où $B_0 := g^{-1}(\Gamma_0)$.

Théorème 6.8. *Supposons que $f : X \rightarrow \Gamma$ satisfait les hypothèses suivantes :*

(i) *Les fibres lisses X_t de f sont de dimension 3 et satisfont $H^3(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$.*

(ii) *Pour X_t lisse, le groupe $H^3(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est sans torsion.*

(iii) *Les fibres singulières de f sont réduites et ont au pire des singularités quadratiques ordinaires.*

(iv) *Pour tout $\alpha \in H^0(\Gamma, R^4 f_* \mathbb{Z})$, il existe une famille $g_\alpha : B_\alpha \rightarrow \Gamma$ et une famille de 1-cycles relatifs $\mathcal{Z}_\alpha \subset B_\alpha \times_\Gamma X$ de classe α , telle que le morphisme $\phi_{\mathcal{Z}_\alpha} : B \rightarrow \mathcal{J}_\alpha^2$ soit surjectif à fibre générale rationnellement connexe.*

Alors $Z^4(X) = 0$.

Ce théorème s'applique concrètement aux fibrations en cubiques de dimension 3 sur une courbe, à fibres au pire nodales (cf. [60], où l'on étudie d'autres conséquences de la condition (iv)).

Le théorème 6.8 est une conséquence immédiate de l'énoncé suivant :

Proposition 6.9. *Sous les hypothèses (i), (ii) et (iii) ci-dessus, soit α une section de $R^4 f_* \mathbb{Z}$ pour laquelle il existe une famille B_α et un cycle \mathcal{Z}_α satisfaisant la conclusion de l'hypothèse (iv). Alors pour toute classe de Hodge $\tilde{\alpha}$ sur X , induisant par restriction la section α de $R^4 f_* \mathbb{Z}$, $\tilde{\alpha}$ est la classe d'un cycle algébrique sur X .*

Démonstration. D'après Zucker [62], une classe de Hodge entière $\tilde{\alpha} \in \text{Hdg}^4(X, \mathbb{Z}) \subset H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ induit une section α de $R^4 f_* \mathbb{Z}$ qui a un relèvement canonique dans la famille tordue de jacobiniennes \mathcal{J}_α^2 . Ce relèvement est une section algébrique $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathcal{J}_\alpha^2$ du morphisme structural $\mathcal{J}_\alpha^2 \rightarrow \Gamma$. Nous disposons maintenant par hypothèse du morphisme $\phi_{\mathcal{Z}_\alpha} : B_\alpha \rightarrow \mathcal{J}_\alpha^2$ qui est algébrique, surjectif à fibre générale rationnellement connexe. Nous appliquons le résultat suivant (cf. [24, Proposition 2.7]) :

Théorème 6.10. *Soit $f : W \rightarrow B$ un morphisme surjectif projectif entre variétés lisses sur \mathbb{C} dont la fibre générale est rationnellement connexe. Alors pour tout morphisme $g : C \rightarrow B$, où C est une courbe lisse, il existe un relèvement $\tilde{g} : C \rightarrow W$ de g dans W .*

D'après ce théorème, la section σ se relève en une section $\tilde{\sigma} : \Gamma \rightarrow B_\alpha$. Rappelons que B_α paramètre une famille de 1-cycles relatifs $\mathcal{Z}_\alpha \subset B_\alpha \times_\Gamma X$ et restreignons cette famille à $\tilde{\sigma}(\Gamma)$. Ceci fournit un cycle $Z \subset X \cong \tilde{\sigma}(\Gamma) \times_\Gamma X$ qui a par construction la propriété que la « fonction normale » (cf. [56]) ν_Z associée à Z , définie par

$$\nu_Z(t) = AJ_{X_t}(Z|_{X_t})$$

est égale à σ . On en déduit d'après [25] (voir aussi [56, 20.2.2]), grâce à l'hypothèse (ii), que les classes de cohomologie $[Z] \in H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ de Z et $\tilde{\alpha}$ coïncident après restriction à X_U , où $U \subset \Gamma_0$ est un ouvert affine de lissité de f .

Mais le noyau de la flèche de restriction $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est engendré par les $i_{t*} H_4(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ où $t \in \Gamma \setminus U$, et $i_t : X_t \rightarrow X$ est l'inclusion. On conclut en notant que grâce à l'hypothèse (iii) et au fait que la fibre générale de f satisfait la condition $H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$, les fibres (singulières ou non) X_t ont la propriété que leur homologie entière de degré 4 est engendrée par des classes d'homologie de cycles algébriques; il en résulte que $[Z] - \tilde{\alpha}$ est algébrique, et donc que $\tilde{\alpha}$ est algébrique. □

7 Liens entre le groupe $Z_2(X)$ et l'indice des variétés sur le corps de fonctions d'une courbe sur \mathbb{C}

Soient Γ une courbe projective lisse connexe et X une variété projective lisse de dimension n équipée d'un morphisme surjectif $f : X \rightarrow \Gamma$ de fibre générique X_η génériquement intègre sur $F = \mathbb{C}(\Gamma)$. L'indice $I(X_\eta) = I(X_\eta/F)$ de X_η est défini comme le pgcd des degrés $\deg_F(z)$, où $z \in CH_0(X_\eta)$. C'est aussi le pgcd des degrés sur F des points fermés de la F -variété X_η . Notons $NS(Y)$ le groupe de Néron-Severi d'une variété projective et lisse Y .

Lemme 7.1. *Soit $f : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant entre variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe. On suppose la fibre générique X_η géométriquement intègre sur son corps de base $F = \mathbb{C}(\Gamma)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) On a $I(X_\eta) = n$.
- (ii) L'application composée

$$CH_1(X) \rightarrow H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

a pour image $n\mathbb{Z}$.

Ceci implique pour un certain entier m divisant n chacune des conditions équivalentes suivantes :

- (iii) La projection $p_* : H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ a pour image $m\mathbb{Z}$.
 - (iv) Le conoyau de la flèche $p^* : \mathbb{Z} = H^2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))/\text{tors}$ a sa torsion isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
 - (v) Le conoyau de la flèche $p^* : \mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)/\text{tors}$ a sa torsion isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Pour $m = 1$, ces énoncés sont équivalents à chacun des énoncés suivants :
 - (vi) La flèche $p^* : \mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)$ admet une rétraction.
 - (vii) Pour tout entier $n > 0$, la flèche $p^* : \mathbb{Z}/n = \text{Pic}(\Gamma)/n \rightarrow \text{Pic}(X)/n$ est injective.
 - (viii) Pour tout entier $n > 0$, la flèche $p^* : \mathbb{Z}/n = H_{\text{ét}}^2(\Gamma, \mu_n) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X, \mu_n)$ est injective.
- Ces conditions à leur tour impliquent que pour tout point $P \in \Gamma(\mathbb{C})$, le diviseur $f^{-1}(P)$ n'est pas multiple : le pgcd des degrés de ses composantes est 1.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) est bien connue : tout point fermé x sur la fibre générique X_η s'étend en un 1-cycle Z sur X . De plus, le degré de l'extension $F(x)/F$ est aussi le degré de Z sur Γ .

De (ii) on tire trivialement (iii) pour un certain entier m divisant n .

On a une dualité parfaite $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))/\text{tors} \times H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{tors} \rightarrow \mathbb{Z}$, compatible avec les flèches p^* et p_* . Ceci établit l'équivalence de (iii) et (iv). L'application cycle $NS(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$ a un conoyau sans torsion (conséquence du théorème de Lefschetz sur les classes $(1, 1)$). Ceci établit l'équivalence de (iv) et (v). Enfin (v) pour $m = 1$ est clairement équivalent à (vi).

Pour tout X/\mathbb{C} connexe, projective et lisse, la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow NS(X) \rightarrow 0,$$

où $\text{Pic}^0(X)$ est divisible donne des isomorphismes $\text{Pic}(X)/n \simeq NS(X)/n$. Ainsi (vi) implique (vii). L'équivalence de (vii) et (viii) résulte de la suite de Kummer en cohomologie étale et de la nullité de $\text{Br}(\Gamma)$.

Sous l'hypothèse (viii), les applications $H^2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))/n \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))/n$ sont injectives. On en conclut que dans la suite exacte définissant le groupe K

$$0 \rightarrow H^2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow K \rightarrow 0,$$

où $H^2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Z}$, le sous-groupe de torsion de $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))$ est envoyé isomorphiquement sur le sous-groupe de torsion de K . On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(\Gamma(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(1))/\text{tors} \rightarrow K/\text{tors} \rightarrow 0,$$

et donc la condition (iv) avec $m = 1$ est satisfaite.

Si la fibre en P est multiple, on a $f^{-1}(P) = nD$ pour un entier $n > 1$ et un diviseur D . Ainsi $\mathbb{Z}/n = \text{Pic}(\Gamma)/n \rightarrow \text{Pic}(X)/n$ n'est pas injectif. \square

Proposition 7.2. *Soit $f : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant entre variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe. On suppose la fibre générique X_η géométriquement intègre sur son corps de base $F = \mathbb{C}(\Gamma)$.*

(i) *Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors on a $\text{Hdg}_2(X, \mathbb{Z}) = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, et le groupe $Z_2(X) = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Im}[CH_1(X)]$ est fini.*

(ii) *Si le conoyau de $\mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)/\text{tors}$ a sa torsion isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et si de plus $Z_2(X) = 0$, alors $I(X_\eta) = n$.*

(iii) *Si le conoyau de $\mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)/\text{tors}$ est sans torsion, et $Z_2(X)$ est d'ordre n , alors $I(X_\eta)$ divise n .*

Démonstration. De façon générale, le quotient $\text{Hdg}_2(X, \mathbb{Z})/\text{Im}[CH_1(X)]$ est fini. Soit $d = \dim(X)$. Sous l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, la structure de Hodge sur $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(1))$ est triviale. Par dualité de Poincaré, il en est donc de même de la structure de Hodge sur l'espace vectoriel $H^{2d-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(d-1)) \simeq H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. On a donc bien $\text{Hdg}_2(X, \mathbb{Z}) = H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Ceci établit le point (i).

Le point (ii) résulte clairement de (i) et des équivalences entre les points (i) et (ii) d'une part, et (iii) et (v) d'autre part, du lemme 7.1.

(iii) D'après l'équivalence entre les points (iii) et (v) du lemme 7.1 et l'énoncé (i) ci-dessus, la première condition dans (iii) entraîne qu'il existe une classe de Hodge $\alpha \in \text{Hdg}_2(X, \mathbb{Z})$ telle que $p_*\alpha = [\Gamma]$. Cette classe étant annulée par n dans le groupe $Z_2(X)$, $n\alpha$ est algébrique et on a $p_*(n\alpha) = n[\Gamma]$. Donc $I(X_\eta)$ divise n par l'équivalence entre les points (i) et (ii) du lemme 7.1. \square

Proposition 7.3. *Soit $f : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant entre variétés connexes, projectives et lisses, sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe. On suppose que la fibre générique X_η est géométriquement intègre et satisfait $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour $i > 0$. Alors :*

(i) *Pour tout $i \geq 2$, on a $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$.*

(ii) *La flèche $f^* : \mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)/\text{tors}$ a son conoyau sans torsion.*

(iii) *Pour tout point $P \in \Gamma(\mathbb{C})$, le pgcd des multiplicités des composantes de la fibre $f^{-1}(P)$ est égal à 1.*

Démonstration. Les hypothèses sur X_η impliquent $R^0 f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\Gamma$ et $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0$ pour $i > 0$. L'énoncé (i) résulte par exemple du fait que $R^i f_* \mathcal{O}_X$ est génériquement nul par hypothèse, tandis que Kollár ([33, Theorem 2.6]) montre que $R^i f_* \mathcal{O}_X$ est sans torsion. Par un argument de suite spectrale de Leray, il en résulte que pour tout $L \in \text{Pic}(\Gamma)$, et pour tout i , on a :

$$H^i(X, f^*L) = H^i(\Gamma, L).$$

Pour tout $i \geq 2$, cette égalité implique $H^i(X, f^*L) = 0$ ce qui avec $L = \mathcal{O}_X$ établit la première assertion. Cette égalité implique par ailleurs

$$\chi(X, f^*L) = \chi(\Gamma, L). \tag{6}$$

Pour $L = \mathcal{O}_\Gamma$, on trouve

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma). \quad (7)$$

On applique maintenant le théorème de Riemann-Roch sur X . On conclut qu'il existe $Z \in CH_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ tel que pour tout $H \in \text{Pic}(X)$ avec $c_1(H)^2 = 0$ dans $CH^2(X) \otimes \mathbb{Q}$, on ait

$$\chi(X, H) = \chi(X, \mathcal{O}_X) + c_1(H) \cdot Z = \chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) + c_1(H) \cdot Z, \quad (8)$$

où la seconde égalité vient de (7). Appliquant cette formule à $H = f^*L$, $L \in \text{Pic}(\Gamma)$, et combinant ceci avec (6), on obtient

$$\chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) + c_1(f^*L) \cdot Z = \chi(L) = \chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) + \deg L.$$

On en conclut que si $\deg L = 1$ alors $c_1(f^*L) \cdot Z = 1$.

Supposons maintenant $f^*L = H^{\otimes k} \otimes M$ dans $\text{Pic}(X)$, avec $k > 0$ et M un fibré en droites numériquement trivial sur X . La formule de Riemann-Roch (8) reste valable pour H et on trouve

$$\chi(X, H) = \chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) + c_1(H) \cdot Z = \chi(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) + \frac{c_1(f^*L) \cdot Z}{k},$$

et comme $c_1(f^*L) \cdot Z = 1$, on trouve que $\chi(X, H)$ n'est pas un nombre entier, ce qui est une contradiction et établit le point (ii). Ceci implique (iii) (voir le lemme 7.1). \square

Remarque 7.4. L'argument ci-dessus montre en particulier que, sous l'hypothèse $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour tout $i > 0$, aucune fibre de $X \rightarrow \Gamma$ n'est multiple. Cela signifie que partout localement pour la topologie étale sur Γ , l'indice relatif est 1. Ce résultat a déjà été obtenu précédemment par H. Esnault et O. Wittenberg et aussi par J. Nicaise.

Remarque 7.5. Les dénominateurs de $Z \in CH_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ sont connus. Dans le cas particulier $\dim(X) = 3$, on a $Z = (\gamma_1^2 + \gamma_2)/12$, où les $\gamma_i \in CH^i(X)$ sont les classes de Chern du fibré tangent. On voit donc qu'il existe un 1-cycle Z tel que $\deg(f^*L \cdot Z) = 12$. Ainsi $I(X_\eta)$ divise 12. De façon plus générale, si W/F est une surface projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps quelconque F , et si $\chi(W, \mathcal{O}_W) = 1$, alors la formule de Riemann-Roch pour les surfaces donne $12 = \deg(\gamma_1^2 + \gamma_2)$, où les $\gamma_i \in CH^i(X)$ sont les classes de Chern du fibré tangent. Ainsi $I(W)$ divise 12. Le même argument montre que si W est une surface K3 sur un corps F alors $I(W)$ divise 24.

Théorème 7.6. *Soit $f : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant entre variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe. On suppose que la fibre générique X_η est géométriquement intègre sur son corps de base $F = \mathbb{C}(\Gamma)$. Si l'on a $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour tout $i > 0$, alors $I(X_\eta)$ divise l'ordre du groupe de torsion $Z_2(X)$. En particulier, si $Z_2(X) = 0$, alors $I(X_\eta) = 1$.*

Démonstration. Sous l'hypothèse d'annulation des $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta})$ pour tout $i > 0$, d'après le point (i) de la proposition 7.3, on a $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. L'hypothèse (i) de la proposition 7.2 est donc satisfaite. La proposition 7.3 assure aussi que sous les hypothèses $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour tout $i > 0$, la flèche $\mathbb{Z} = NS(\Gamma) \rightarrow NS(X)/\text{tors}$ a un conoyau sans torsion. L'hypothèse (iii) de la proposition 7.2 est donc bien satisfaite. Il ne reste plus qu'à appliquer cette proposition. \square

En dimension 3, on a une réciproque partielle du théorème 7.6.

Théorème 7.7. *Soit $f : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant entre variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe et X est de dimension 3. On suppose que la fibre générique X_η , qui est une surface, est géométriquement intègre et satisfait $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$, $i = 1, 2$. On suppose en outre que les fibres lisses de f n'ont pas de torsion dans leur cohomologie de Betti entière de degré 3, et que les fibres singulières ont au plus des singularités quadratiques ordinaires. Alors $Z^4(X) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $I(X_\eta) = n$. En particulier si $I(X_\eta) = 1$, alors $Z^4(X) = 0$.*

Démonstration. Les fibres X_t de f sont de dimension 2, et l'hypothèse $H^1(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ entraîne $H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ pour toute fibre lisse X_t , et donc que $H^3(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est de torsion. Ce groupe est donc nul car sa torsion est nulle par hypothèse. Soit $\Gamma^0 \subset \Gamma$ un ouvert affine maximal au-dessus duquel f est lisse, et $X^0 = f^{-1}(\Gamma^0)$. La suite spectrale de Leray de la restriction à f à l'ouvert X^0 montre alors (du fait que Γ^0 est affine, et donc a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension ≤ 1) que $H^4(X^0(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^0(\Gamma^0, R^4 f_* \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Or on sait par la proposition 7.3, ii) qu'il existe une classe entière $\alpha \in H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ dont la restriction aux fibres lisses X_t de f engendre $H^4(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. La classe α est une classe de Hodge car la structure de Hodge sur $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ est triviale du fait que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. On conclut que $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est engendré par α et par $\text{Ker}[j_0^* : H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X^0(\mathbb{C}), \mathbb{Z})]$, ce dernier groupe étant la cohomologie de degré 4 de X supportée sur les fibres au-dessus de $\Gamma \setminus \Gamma^0$, c'est-à-dire le sous-groupe

$$\bigoplus_{t \in \Gamma \setminus \Gamma^0} i_{X_t*} H_2(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \subset H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2)).$$

Mais sous nos hypothèses sur les fibres singulières on conclut facilement que leur homologie $H_2(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est engendrée par des classes d'homologie de cycles algébriques, comme c'est le cas pour les fibres lisses X_t . En effet, les singularités des fibres X_t sont au pire des singularités quadratiques ordinaires. Par résolution simultanée, on conclut que la désingularisation \tilde{X}_t satisfait encore $H^2(\tilde{X}_t, \mathcal{O}_{\tilde{X}_t}) = 0$. Donc la cohomologie entière (ou encore l'homologie entière) de degré 2 de $\tilde{X}_t(\mathbb{C})$ est engendrée par des classes de cycles algébriques par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1, 1)$. Or la résolution par éclatement d'un point double de surface a un diviseur exceptionnel isomorphe à \mathbb{P}^1 , et il en résulte que la flèche naturelle

$$H_2(\tilde{X}_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

est surjective. Ceci entraîne que l'homologie entière de degré 2 de toutes les fibres X_t est engendrée par des classes de cycles algébriques.

On en déduit que le groupe $Z^4(X)$ est engendré par la classe α ci-dessus et donc est cyclique. Que l'ordre de α dans ce groupe soit égal à $I(X_\eta)$ résulte de l'équivalence des points (i) et (ii) du lemme 7.1 et du fait que $f_* \alpha = [\Gamma]$. □

Remarque 7.8. Si la surface X_η satisfait $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour tout $i > 0$, alors la conjecture de Bloch [5, lecture 1] implique $CH_0(X_\eta) = \mathbb{Z}$. Lorsque ceci est satisfait, sous des hypothèses moins restrictives, on peut par des méthodes de K -théorie établir le théorème 7.7 sans faire d'hypothèses sur les fibres singulières : voir la proposition 8.13 et le corollaire 8.14.

Cependant, il existe des surfaces simplement connexes (et donc sans torsion dans leur cohomologie entière) telles que $q = p_g = 0$, et pour lesquelles la conjecture de Bloch n'est pas connue. De telles surfaces (par exemple les surfaces de Barlow génériques) ne sont de plus pas nécessairement rigides, pouvant donner lieu à des familles comme ci-dessus non isotrivales.

Au paragraphe 5.7, on a construit des variétés X de dimension 3 avec $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$, mais $Z^4(X) \neq 0$. Ces variétés sont fibrées en surfaces $K3$ sur une courbe. Il est naturel de se demander si des exemples analogues existent avec des variétés fibrées en surfaces d'Enriques ou plus généralement en surfaces Y avec $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$, $i > 0$. D'après les théorèmes 7.6 et 7.7, ceci est intimement lié aux questions suivantes :

Question 7.9. *Existe-t-il des surfaces Y définies sur le corps de fonctions d'une courbe complexe Γ , telles que $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i > 0$, mais $I(Y) \neq 1$?*

Question 7.10. *Existe-t-il de telles surfaces avec de plus $H^3(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ sans torsion, pour une fibre complexe lisse X_t de la fibration correspondante $X \rightarrow \Gamma$?*

Notons que si on remplace la condition $I(Y) \neq 1$ par la condition : « il n'existe pas de point rationnel », la première de ces questions a une réponse positive, d'après [35] et [24]. Dans [50], Starr écrit que, vraisemblablement, les exemples de familles de surfaces d'Enriques sans sections construits dans [24] ont un indice différent de 1, mais cela n'est pas montré à notre connaissance.

8 Quelques résultats obtenus par la K -théorie algébrique

Soient X et Y deux variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , et soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant à fibre générale lisse et connexe. Soit $F = \mathbb{C}(Y)$ le corps des fonctions de Y , et soit $V = X \times_Y \text{Spec}(F)$ la fibre générique de p .

La comparaison des théorèmes 2.3 et 2.11, rappelée dans la section 2.2, donne en particulier des inclusions $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \subset H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$. Sous certaines hypothèses sur le corps F et sur la F -variété V , des techniques de K -théorie algébrique permettent de montrer $H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2}) = 0$. Dans ces cas-là, le théorème 3.7 donne $Z^4(X) = 0$.

Soit désormais F un corps de caractéristique zéro, \bar{F} une clôture algébrique de F , et $G = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ le groupe de Galois absolu. Soit V une F -variété projective, lisse, géométriquement connexe. On note $\bar{V} = V \times_F \bar{F}$. La K -théorie algébrique permet de faire un lien entre les groupes $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et le conoyau de l'application $CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G$. Lorsque V est une surface, on trouve des liens entre $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et l'indice $I(V)$.

Kahn, Rost et Sujatha [31, Thm. 5 et Cor. 10 (2)] ont établi le résultat général suivant.

Théorème 8.1. *Soit Q une quadrique lisse de dimension au moins 1 sur un corps F de caractéristique différente de 2. Supposons que cette quadrique n'est pas définie par une forme d'Albert (forme quadratique de rang 6, de la forme $\langle a, b, ab, -c, -d, -cd \rangle$). Alors l'application de restriction $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ (où l'on se limite aux coefficients de torsion première à la caractéristique) est surjective.*

Ainsi, si $cd(F) \leq 2$, le groupe $H_{nr}^3(Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, sauf peut-être si $Q \subset \mathbb{P}_F^5$ est une quadrique d'Albert.

Corollaire 8.2. *Soit $X \rightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , de fibre générique une quadrique Q de dimension au moins 1, de base une surface Y . Alors $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $Z^4(X) = 0$.*

Démonstration. Si la dimension de la fibre est au moins 3, la quadrique Q a un point rationnel sur le corps $F = \mathbb{C}(Y)$, qui est un corps C_2 . Ceci implique que Q est F -birationnelle à un espace projectif, et donc (cf. [13, Thm. 4.15]) que la flèche de restriction $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un isomorphisme. Comme la dimension cohomologique de F est 2, on a $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Si la dimension de la fibre est 1 ou 2, le théorème 8.1 et la nullité de $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ impliquent $H_{nr}^3(Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. L'inclusion $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \subset H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$ et le théorème 3.7 permettent de conclure. \square

Remarque 8.3. On obtient donc par la K -théorie une démonstration d'un cas particulier du résultat de C. Voisin sur les solides uniréglés (théorème 6.1 ci-dessus). La nullité de $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/2)$ pour les solides fibrés en coniques avait été en substance établie par S. Bloch en 1977 (non publié). Une démonstration fondée sur les résultats de Merkur'ev et Suslin sur la K -théorie des coniques fut donnée en 1989 (voir l'appendice de [42]).

8.1 Variétés sur un corps de dimension cohomologique 1

Dans cette sous-section, on s'intéresse de façon générale aux variétés projectives et lisses sur un corps F de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1, le cas principal que nous avons en vue étant le corps des fonctions d'une courbe complexe, discuté à la sous-section 8.2. La plupart des énoncés établis ici valent encore pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini. Les arguments et résultats spécifiques à cette situation seront traités dans une autre publication.

Les considérations qui suivent remontent à S. Bloch, elles furent développées par W. Raskind et l'un des auteurs dans [17], puis dans l'article [30] de B. Kahn. Comme on va le voir, lorsque le corps F est de dimension cohomologique 1, la méthode de [17] suffit pour recouvrer à moindres frais, et même généraliser, les résultats de [30]. Il devrait cependant être clair au lecteur que ce qui suit est inspiré des résultats de [30], et en particulier du Théorème 1, de son corollaire, et de la suite (6) annoncée à la page 397.

Proposition 8.4. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1. Soit V une F -variété géométriquement intègre. Soient \bar{F} une clôture algébrique de F et $G = \text{Gal}(\bar{F}/F)$.*

(i) *Il existe alors un isomorphisme naturel*

$$\text{Ker}[H^3(F(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \simeq H^2(G, K_2(\bar{F}(V))).$$

(ii) *Si V est lisse, cet isomorphisme induit un isomorphisme*

$$\text{Ker}[H^0(V, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \rightarrow H^0(\bar{V}, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))] \simeq \text{Ker}[H^2(G, K_2(\bar{F}(V))) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}(1)} \bar{F}(x)^\times)].$$

Démonstration. Le théorème de Merkur'ev et Suslin dit que l'application G -équivariante

$$K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^2(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est un isomorphisme.

On a une suite exacte longue

$$0 \rightarrow K_2(\bar{F}(V))_{\text{tors}} \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

que l'on peut découper en deux suites exactes

$$0 \rightarrow K_2(\bar{F}(V))_{\text{tors}} \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \rightarrow L \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow L \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

La seconde suite donne $H^1(G, K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^2(G, L)$. La première suite donne un homomorphisme $H^2(G, K_2(\bar{F}(V))) \rightarrow H^2(G, L)$ qui est bijectif car $cd(F) \leq 1$. On a donc un isomorphisme

$$H^2(G, K_2(\bar{F}(V))) \simeq H^1(G, K_2(\bar{F}(V)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \implies H^n(F(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

donne naissance à un homomorphisme

$$\text{Ker}[H^3(F(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow H^1(G, H^2(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

qui est un isomorphisme car $cd(F) \leq 1$. Ceci établit la première partie de la proposition.

Supposons V lisse sur F . Soit x un point de $V^{(1)}$. Comme on l'a rappelé au paragraphe 2.2, on dispose aussi pour l'anneau semilocal $\mathcal{O}_{\bar{V},x}$ (semilocalisé de \bar{V} aux points de codimension 1 de \bar{V} d'image $x \in V$) d'un isomorphisme G -équivariant

$$K_2(\mathcal{O}_{\bar{V},x}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} H_{\text{ét}}^2(\mathcal{O}_{\bar{V},x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Procédant comme ci-dessus, on obtient un isomorphisme

$$\text{Ker}[H_{\text{ét}}^3(\mathcal{O}_{V,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{ét}}^3(\mathcal{O}_{\bar{V},x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \simeq H^2(G, K_2(\mathcal{O}_{\bar{V},x})).$$

Pour tout point $x \in V^{(1)}$, la conjecture de Gersten pour l'anneau semilocal $\mathcal{O}_{\bar{V},x}$ (cf. [14]) donne une suite exacte courte de G -modules

$$0 \rightarrow K_2(\mathcal{O}_{\bar{V},x}) \rightarrow K_2(\bar{F}(V)) \rightarrow \bar{F}(x)^\times \rightarrow 0,$$

où l'on a noté $\bar{F}(x) = \bar{F} \otimes_F F(x)$. Ainsi le noyau de

$$H^2(G, K_2(\bar{F}(V))) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in V^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)$$

est le groupe des éléments de $H^2(G, K_2(\bar{F}(V)))$ qui sont dans l'image de $H^2(G, K_2(\mathcal{O}_{\bar{V},x}))$ pour tout $x \in V^{(1)}$.

La conjecture de Gersten pour la cohomologie étale (Bloch–Ogus, voir le théorème 2.3) implique que le groupe $H^0(V, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \subset H^3(F(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est le sous-groupe des éléments de $H^3(F(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ qui en chaque point $x \in V^{(1)}$ sont dans l'image de $H_{\text{ét}}^3(\mathcal{O}_{V,x}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Ceci établit la deuxième partie de la proposition. \square

Théorème 8.5. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique ≤ 1 . Soit V une F -variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit \bar{F} une clôture algébrique de F et $\bar{V} = V \times_F \bar{F}$. On a alors une suite exacte*

$$0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})] \rightarrow H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \\ \text{Ker}[H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \text{Coker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G] \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit F un corps de caractéristique zéro, E/F une extension galoisienne, et $G = \text{Gal}(E/F)$ le groupe de Galois. Soit V une F -variété lisse géométriquement intègre.

On considère le complexe, gradué en degrés $(0, 1, 2)$

$$0 \rightarrow K_2E(V) \rightarrow \bigoplus_{x \in V_E^{(1)}} E(x)^\times \rightarrow \bigoplus_{x \in V_E^{(2)}} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Par la conjecture de Gersten pour la K -théorie, établie par Quillen (Théorème 2.9) l'homologie de ce complexe en degré i est $H^i(V_E, \mathcal{K}_2)$. Notons \mathcal{Z} le noyau de la deuxième flèche, et \mathcal{I} son image.

On a donc des suites exactes de modules galoisiens

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \bigoplus_{x \in V_E^{(1)}} E(x)^\times \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow K_2E(V)/H^0(V_E, \mathcal{K}_2) \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow H^1(V_E, \mathcal{K}_2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \bigoplus_{x \in V_E^{(2)}} \mathbb{Z} \rightarrow CH^2(V_E) \rightarrow 0.$$

et les suites analogues avec F en place de E .

On sait que l'on a $\bigoplus_{x \in V^{(2)}} \mathbb{Z} = (\bigoplus_{x \in V_E^{(2)}} \mathbb{Z})^G$, que l'on a $H^1(G, \bigoplus_{x \in V_E^{(2)}} \mathbb{Z}) = 0$ (lemme de Shapiro et nullité de $H^1(G, \mathbb{Z})$ pour G profini) et qu'enfin on a $H^1(G, \bigoplus_{x \in V_E^{(1)}} E(x)^\times) = 0$ (lemme de Shapiro et théorème 90 de Hilbert).

De ceci on déduit les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(G, \mathcal{Z}) \rightarrow CH^2(V) \rightarrow CH^2(V_E)^G \rightarrow H^1(G, \mathcal{I}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H^1(G, \mathcal{I}) \rightarrow H^2(G, \mathcal{Z}) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in V_E^{(1)}} E(x)^\times). \end{aligned}$$

Dans la suite on prend $E = \bar{F}$.

Sur tout corps F de caractéristique zéro, on sait ([17, Thm. 1.8]) que le groupe $H^0(\bar{V}, \mathcal{K}_2)$ est extension d'un groupe fini par un groupe divisible. On a le résultat analogue pour $H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)$ ([17, Thm. 2.2]). La démonstration de ces résultats repose sur des travaux antérieurs de Bloch, Merkur'ev–Suslin, et Suslin, et utilise les résultats de Deligne sur les conjectures de Weil.

Sous l'hypothèse $cd(F) \leq 1$, cette structure des groupes $H^i(\bar{V}, \mathcal{K}_2)$ pour $i = 0, 1$ implique $H^r(G, H^i(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) = 0$ pour $i = 0, 1$ et $r \geq 2$.

On a $H^1(G, K_2\bar{F}(V)/H^0(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) = 0$ car $H^1(G, K_2\bar{F}(V)) = 0$ si $cd(F) \leq 1$ ([11, Thm. B]), et la flèche $H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, K_2\bar{F}(V)/H^0(\bar{V}, \mathcal{K}_2))$ est un isomorphisme.

La cohomologie galoisienne des suites exactes ci-dessus donne alors la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(G, \mathcal{Z}) \rightarrow H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, \mathcal{Z}) \rightarrow 0.$$

et donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})] \rightarrow H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, \mathcal{Z}) \rightarrow 0.$$

La flèche $H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)$ est induite par les résidus. Elle induit la flèche $H^2(G, \mathcal{Z}) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)$. On a donc la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})] \rightarrow H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \\ \text{Ker}[H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)] \rightarrow \text{Ker}[H^2(G, \mathcal{Z}) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)] \rightarrow 0, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})] \rightarrow H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \\ \text{Ker}[H^2(G, K_2\bar{F}(V)) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \bar{V}^{(1)}} \bar{F}(x)^\times)] \rightarrow \text{Coker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On conclut avec la proposition 8.4. □

Pour tirer du théorème des conséquences pratiques, il faut contrôler le module galoisien $H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)$. Le théorème suivant regroupe des résultats de [17] (Thm. 2.1, Thm. 2.2, Thm. 2.12).

Théorème 8.6. (*Colliot-Thélène et Raskind*) *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soit V une F -variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $M = M(\bar{V})$ le module galoisien fini défini par $M = \bigoplus_l H_{\text{ét}}^3(\bar{V}, \mathbb{Z}_l(2))\{l\}$.*

(i) *Il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow D \rightarrow H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2) \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où le groupe de droite est fini et le groupe D est divisible.

(ii) Pour tout premier l il existe un isomorphisme naturel

$$H_{\text{ét}}^2(\bar{V}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\cong} H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)\{l\}.$$

(iii) Soit K , resp. C , le noyau, resp. le conoyau de la flèche naturelle $\text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{F}^\times \rightarrow H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)$. Si l'on a $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, alors K est uniquement divisible et C est la somme directe d'un groupe uniquement divisible et du groupe M .

Sous l'hypothèse $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, on a donc une suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow K \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2) \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où K est un groupe uniquement divisible et C est somme directe de M et d'un groupe uniquement divisible.

Ceci donne naissance à deux suites exactes

$$0 \rightarrow K \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow R \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow R \rightarrow H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2) \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où R est divisible.

On a aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(\bar{V}) \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}) \rightarrow NS(\bar{V}) \rightarrow 0$$

et donc la suite exacte

$$\text{Tor}^1(NS(\bar{V}), \bar{k}^*) \rightarrow \text{Pic}^0(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow NS(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow 0.$$

On en déduit les suites exactes

$$0 \rightarrow P \rightarrow \text{Pic}^0(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow Q \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Q \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow NS(\bar{V}) \otimes \bar{k}^* \rightarrow 0$$

où P est un groupe fini et Q est divisible.

Si l'on tient maintenant compte des faits suivants :

(1) $\text{Pic}^0(\bar{V}) \otimes \bar{k}^*$ est uniquement divisible car c'est un produit tensoriel de deux groupes divisibles ;

(2) pour un corps k avec $cd(k) \leq 1$ et W un module galoisien sur k , on a $H^2(G, W) = 0$ si W est fini ou divisible, et $H^r(G, W) = 0$ pour $r \geq 1$ si W est uniquement divisible,

(3) $H^1(G, NS(\bar{V}) \otimes \bar{k}^*) = H^1(G, NS(\bar{V})/\text{tors} \otimes \bar{k}^*) = 0$ car pour k avec $cd(k) \leq 1$ et T un k -tore, $H^1(G, T(\bar{k})) = 0$,

alors on obtient $H^1(G, Q) = 0$, puis $H^1(G, \text{Pic}(\bar{V}) \otimes \bar{k}^*) = 0$, puis $H^1(G, R) = 0$ et $H^2(G, R) = 0$, et en fin de compte

$$H^1(G, H^1(\bar{V}, \mathcal{K}_2)) \simeq H^1(G, M).$$

En combinant ce résultat avec le théorème 8.5 , on obtient le théorème suivant.

Théorème 8.7. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique au plus 1. Soit \bar{F} une clôture algébrique de F , et G le groupe de Galois de \bar{F} sur F . Soit V une F -variété projective, lisse, géométriquement intègre, satisfaisant $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Soit M le module galoisien fini $\oplus_l H_{\text{ét}}^3(\bar{V}, \mathbb{Z}_l(2))\{l\}$. On a alors une suite exacte*

$$0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})] \rightarrow H^1(G, M) \rightarrow \\ \text{Ker}[H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \text{Coker}[CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G] \rightarrow 0.$$

Le groupe de Brauer $Br(\bar{V})$ est une extension du groupe fini $\oplus_l H_{\text{ét}}^3(\bar{V}, \mathbb{Z}_l(1))\{l\}$ par le groupe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2 - \rho}$ ([26], voir le paragraphe 4.1 ci-dessus). En caractéristique zéro, $b_2 - \rho = 0$ si et seulement si $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$.

Théorème 8.8. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique au plus 1. Soit \bar{F} une clôture algébrique de F , et $G = \text{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit V une F -variété projective et lisse, géométriquement intègre.*

(i) *Si le groupe de Brauer de \bar{V} est nul, alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G \rightarrow H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

(ii) *Si \bar{V} est une variété rationnelle, on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G \rightarrow H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0.$$

(iii) *Si \bar{V} est une variété rationnellement connexe de dimension 3, sans torsion dans sa cohomologie entière de degré 3, alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G \rightarrow H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0.$$

Démonstration. L'énoncé (i) est une conséquence immédiate du théorème 8.7 et du rappel ci-dessus sur le groupe de Brauer. Si \bar{V} est rationnelle, son groupe de Brauer est nul et l'invariant birationnel $H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est aussi nul. Ceci établit (ii). Si \bar{V} est rationnellement connexe de dimension 3, alors $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$, donc le groupe de Brauer de \bar{V} est, sous l'hypothèse de (iii), nul. Par ailleurs pour \bar{V} rationnellement connexe de dimension 3, on a $H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ ([57], voir le corollaire 6.2 ci-dessus). Ceci établit (iii). \square

Proposition 8.9. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique ≤ 1 . Soit V une F -surface projective, lisse, géométriquement intègre. Supposons $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Si $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, alors l'indice $I(V)$ est égal à 1.*

Démonstration. Le degré définit la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \rightarrow A_0(\bar{V}) \rightarrow CH_0(\bar{V}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

L'hypothèse $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ implique que la variété d'Albanese de V est nulle. Il résulte alors du théorème de Roitman (cf. [12, §4]) que le groupe $A_0(\bar{V})$ est uniquement divisible. Ainsi $H^1(G, A_0(\bar{V})) = 0$ et l'application $CH_0(\bar{V})^G \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective. Le théorème 8.5 et l'hypothèse $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ impliquent que la flèche $CH_0(V) \rightarrow CH_0(\bar{V})^G$ est surjective. On a donc $I(V) = 1$. \square

Voici un résultat un peu plus précis que la proposition 8.9.

Proposition 8.10. *Soit F un corps de caractéristique zéro, de dimension cohomologique 1. Soit V une surface sur F , projective, lisse, géométriquement connexe. Soit \bar{F} une clôture algébrique de F et $\bar{V} = V \times_F \bar{F}$. Soit $n > 1$ un entier. Supposons*

- (i) $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$.
 - (ii) $NS(\bar{V})[n] = 0$.
 - (iii) *Le groupe de cohomologie étale non ramifiée $H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$ est nul.*
- Alors l'indice $I(V)$ est premier à n .*

Démonstration. La théorie de Bloch–Ogus donne naissance à une suite exacte (§2.2)

$$H_{\text{ét}}^3(V, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow CH^2(V)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(V, \mu_n^{\otimes 2}).$$

L'hypothèse (iii) implique donc que l'application cycle $CH^2(V)/n \rightarrow H_{\text{ét}}^4(V, \mu_n^{\otimes 2})$ est injective. Pour toute surface V/F , l'application $CH^2(\bar{F})/n \rightarrow H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/n$ est un isomorphisme. La suite spectrale de Leray pour V/F et la cohomologie étale, sous l'hypothèse $cd(F) \leq 1$, donne une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(F, H^3(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2})) \rightarrow H^4(V, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2})^G \rightarrow 0.$$

On a $H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2})^G = H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/n$. Les hypothèses (i) et (ii) donnent $H^1(\bar{V}, \mu_n) = \text{Pic}(\bar{V})[n] = 0$. Par dualité de Poincaré en cohomologie étale on en déduit $H^3(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2}) = 0$. On a donc $H^4(V, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\cong} H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2})$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^2(V)/n & \hookrightarrow & H^4(V, \mu_n^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ CH^2(\bar{V})/n & \hookrightarrow & H^4(\bar{V}, \mu_n^{\otimes 2}) \end{array}$$

on déduit que l'application degré $CH_0(V) \rightarrow \mathbb{Z}$ dont l'image est $\mathbb{Z} \cdot I(V)$ induit un plongement $CH_0(V)/n \hookrightarrow \mathbb{Z}/n$ et donc un plongement $\mathbb{Z} \cdot I(V) / \mathbb{Z} \cdot (nI) \hookrightarrow \mathbb{Z}/n$. \square

Remarque 8.11. Dans [15], on donne un exemple surface cubique lisse V , sur un (grand) corps F de dimension cohomologique 1, avec $I(V) = 3$. Dans ce cas on a donc $H_{nr}^3(V, \mathbb{Z}/3) \neq 0$.

Remarque 8.12. Soit $S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ une surface quintique invariante sous l'action de Godeaux de $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $X = \mathbb{P}^1 \times S/G$, où l'action de G est diagonale. Alors $\pi : X \rightarrow \Gamma = \mathbb{P}^1/G$ a ses fibres lisses isomorphes à S et donc la fibre générique $V = X_\eta$ satisfait $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ et $NS(\bar{V})_{\text{tors}} = 0$. La fibration π a des fibres de multiplicité 5; on en déduit $I(X_\eta) = 5$. D'après la proposition 8.10, on a $H_{nr}^3(V, \mathbb{Z}/5) \neq 0$. Cependant la variété X est fibrée en coniques au-dessus de la surface S/G . Par le corollaire 8.2, on a donc $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et $Z^4(X) = 0$. Dans ce cas on voit donc que l'inclusion $H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}/5) \subset H_{nr}^3(V, \mathbb{Z}/5)$ n'est pas un isomorphisme.

Proposition 8.13. *Soit F un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique au plus 1. Soit \bar{F} une clôture algébrique de F , et $G = \text{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit V une F -surface projective et lisse, géométriquement intègre. Soit $I(V)$ l'indice de V sur F . Supposons $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$ et $NS(\bar{V})_{\text{tors}} = 0$. Alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow CH_0(V) \rightarrow CH_0(\bar{V})^G \rightarrow H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0.$$

Supposons de plus $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Alors le quotient du groupe $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par son sous-groupe divisible maximal est isomorphe à $\mathbb{Z}/I(V)$.

Si de plus $\text{deg} : CH_0(\bar{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (ce qui sous les hypothèses précédentes est une conjecture de Bloch), alors $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/I(V)$.

Démonstration. On applique le théorème 8.8(i). Les hypothèses en sont satisfaites, car pour une surface projective et lisse \bar{V} , le groupe $NS(\bar{V})_{\text{tors}}$ est nul si et seulement si on a $\oplus_l H_{\text{ét}}^3(\bar{V}, \mathbb{Z}_l(2))\{l\} = 0$.

Comme V est une surface, le corps $\bar{F}(V)$ est de dimension cohomologique 2, on a donc $H_{nr}^3(\bar{V}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H^3(\bar{F}(V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Sous l'hypothèse $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, la variété d'Albanese de V est triviale. Il résulte alors du théorème de Roitman (cf. [12, §4]) que le groupe $A_0(\bar{V})$ noyau de la flèche degré : $CH_0(\bar{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un groupe uniquement divisible, i.e. est un \mathbb{Q} -vectoriel. Ceci implique que le groupe $A_0(\bar{V})^G$ est un \mathbb{Q} -vectoriel et que l'on a $H^1(G, A_0(\bar{V})) = 0$. Le lemme du serpent donne alors la suite exacte

$$A_0(\bar{V})^G \rightarrow H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{Z}/I(V) \rightarrow 0.$$

□

8.2 Applications aux fibrations au-dessus d'une courbe

Théorème 8.14. *Soit Γ une courbe projective et lisse sur \mathbb{C} et X un solide projectif et lisse muni d'une fibration $X \rightarrow \Gamma$ dont la fibre générique géométrique est une surface rationnelle. Alors les groupes $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ et $Z^4(X)$ sont nuls.*

Démonstration. Soient $F = \mathbb{C}(\Gamma)$ et V/F la fibre générique de $X \rightarrow \Gamma$. Le corps F , corps de fonctions d'une variable sur \mathbb{C} , est un corps C_1 . Rappelons le fait bien connu suivant. De la classification F -birationnelle des F -surfaces géométriquement rationnelles (Enriques, Manin, Iskovskikh ; Mori) on déduit par inspection que toute telle surface V sur un corps C_1 possède un point rationnel. Sur $F = \mathbb{C}(\Gamma)$, c'est aussi un cas particulier d'un théorème de Graber, Harris et Starr [23]. En particulier l'application $CH^2(V) \rightarrow CH^2(\bar{V})^G = \mathbb{Z}$ est surjective. De la proposition 8.13 on déduit alors $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Comme rappelé au début du paragraphe 8, le groupe $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un sous-groupe de $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, il est donc nul. L'énoncé sur $Z^4(X)$ est alors une conséquence du théorème 3.7. □

Remarque 8.15. La démonstration de ce théorème ne repose pas sur l'énoncé 6.2. On obtient ainsi par la K -théorie algébrique un nouveau cas particulier (voir la remarque 8.3) du théorème de C. Voisin sur les solides unirégles (théorème 6.1 ci-dessus).

Lemme 8.16. *Soit $\pi : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant de variétés projectives et lisses sur \mathbb{C} , avec Γ une courbe. Soit n la dimension de la fibre générique V supposée géométriquement intègre sur le corps $\mathbb{C}(\Gamma)$. Supposons $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$.*

(i) *Si une fibre singulière Y de π a des singularités quadratiques ordinaires, on a $H^2(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$, où Z est la désingularisée de Y obtenue par éclatement de ses points doubles.*

(ii) *Si de plus une fibre lisse de π a sa cohomologie de Betti entière de degré 3 sans torsion, et $n \neq 3$, il en va de même pour Z .*

Démonstration. (i) D'après [33], les faisceaux $R^i \pi_* \mathcal{O}_X$ sont sans torsion donc localement libres sur Γ . Pour toute fibre Y de π , on a donc $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. Ceci entraîne $H^2(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ car les singularités quadratiques ordinaires sont rationnelles.

(ii) Soit $0 \in \Gamma(\mathbb{C})$ un point tel que la fibre $X_0 = Y$ ait des points doubles ordinaires. Soit $\Delta \subset \Gamma$ un petit disque analytique centré en 0, et soit $0 \neq t \in \Delta$. On dispose (cf. [56, 14.2.1]) d'une application continue $f : X_t(\mathbb{C}) \rightarrow Y(\mathbb{C})$ qui est un homéomorphisme au-dessus de la partie lisse de $Y(\mathbb{C})$ et qui contracte une sphère évanescence $S^n \subset X_t(\mathbb{C})$ sur chaque point double de Y . Par ailleurs on dispose de l'application de désingularisation $g : Z(\mathbb{C}) \rightarrow Y(\mathbb{C})$, qui est aussi

un homéomorphisme au-dessus de la partie lisse de $Y(\mathbb{C})$ et qui contracte une quadrique Q_i de dimension $n - 1$ sur chaque point double de Y . Pour $p \neq 0$, les faisceaux $R^p f_* \mathbb{Z}$ et $R^p g_* \mathbb{Z}$ sont supportés sur les points doubles de Y et on a donc pour $p \neq 0$, et $q > 0$,

$$H^q(Y(\mathbb{C}), R^p g_* \mathbb{Z}) = 0 = H^q(Y(\mathbb{C}), R^p f_* \mathbb{Z}).$$

Au niveau E_2 de la suite spectrale de Leray de f , seuls les termes

$$H^0(Y(\mathbb{C}), R^3 f_* \mathbb{Z}) \text{ et } H^3(Y(\mathbb{C}), R^0 f_* \mathbb{Z}) = H^3(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

contribuent donc à $H^3(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, et de même pour g et Z . De plus, on a $R^p f_* \mathbb{Z} = 0$ pour $p \neq 0, n$, donc en particulier $R^3 f_* \mathbb{Z} = 0$ pour $n \neq 3$. Enfin, pour $n \neq 2, 3$, le faisceau $R^2 g_* \mathbb{Z}$ est constitué d'un exemplaire de $\mathbb{Z} = H^2(Q_i, \mathbb{Z})$ supporté sur chaque point double de Y et de plus le générateur α_i de $H^2(Q_i, \mathbb{Z})$ est engendré par la classe $c_1(\mathcal{O}_Z(Q_i))|_{Q_i}$. On en déduit que pour $n \neq 2, 3$, la flèche

$$H^2(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(Y(\mathbb{C}), R^2 g_* \mathbb{Z})$$

est surjective, de sorte que la différentielle

$$d_3 : H^0(Y(\mathbb{C}), R^2 g_* \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(Y(\mathbb{C}), R^0 g_* \mathbb{Z}) = H^3(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

est nulle. Cet énoncé est bien sûr aussi valable pour f puisqu'on a $R^2 f_* \mathbb{Z} = 0$ pour $n \neq 2$. Pour $n \neq 2, 3$, les suites spectrales de Leray de f et g fournissent donc des isomorphismes

$$H^3(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xleftarrow{g^*} H^3(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^3(X_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Dans le cas $n = 2$, la résolution simultanée montre directement que $Z(\mathbb{C})$ et $X_t(\mathbb{C})$ sont homéomorphes, d'où la conclusion. \square

Remarque 8.17. Dans le cas $n = 3$, les résultats de [19] montrent qu'on peut effectivement avoir une famille de variétés de Fano de dimension 3 paramétrée par une courbe lisse sur \mathbb{C} , à fibres au pire nodales, dont les fibres lisses n'ont pas de torsion dans leur cohomologie de Betti de degré 3, tandis que les fibres singulières ont une désingularisation possédant de la torsion dans leur cohomologie de Betti de degré 3.

Proposition 8.18. *Soit $\pi : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant de variétés projectives, lisses, connexes sur \mathbb{C} , avec Γ une courbe. Supposons la fibre générique $V = X_\eta$ géométriquement intègre, sur le corps $F = \mathbb{C}(\Gamma)$. Soit n un entier positif.*

Supposons que $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$ et que la cohomologie de Betti entière de degré 3 d'une fibre lisse de π est sans torsion.

(i) Soit $\Gamma^0 \subset \Gamma$ l'ouvert maximal au-dessus duquel π est lisse et $X^0 = \pi^{-1}(\Gamma^0)$. La restriction naturelle $H_{nr}^3(X^0, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$ est un isomorphisme.

Supposons de plus que les fibres singulières de π n'ont que des singularités quadratiques ordinaires. Alors :

(ii) L'inclusion naturelle $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H_{nr}^3(X^0, \mu_n^{\otimes 2}) = H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$ a un conoyau fini.

(iii) Si la dimension de $V = X_\eta$ est différente de 3, alors la restriction à la fibre générique donne un isomorphisme $H_{nr}^3(X, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\cong} H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$.

Démonstration. Les hypothèses d'annulation faites sur $H^2(V, \mathcal{O}_V)$ et sur la torsion dans la cohomologie entière de degré 3 d'une fibre lisse restent valables pour toute fibre Y de π au-dessus

de Γ^0 . Soit $\alpha \in H_{nr}^3(V, \mu_n^{\otimes 2})$. Le résidu de α en une fibre lisse Y de π appartient à $H_{nr}^2(Y, \mu_n)$, qui est nul grâce à ces hypothèses. Ceci montre (i).

En éclatant sur X les points singuliers des fibres spéciales, on obtient un modèle X' muni d'un morphisme $\pi' : X' \rightarrow \Gamma$ dont chaque fibre non lisse est de la forme $Z + 2 \sum H_i$, avec Z lisse irréductible (obtenu par éclatement de la fibre correspondante Y de π en ses points doubles) et chaque diviseur exceptionnel H_i isomorphe à \mathbb{P}^n , les intersections $H_i \cap H_j$ étant vides pour $i \neq j$, et $Q_i := Z \cap H_i$ étant isomorphe à une hypersurface quadratique lisse de $H_i = \mathbb{P}^n$. On a la suite exacte de localisation

$$0 \rightarrow H_{nr}^2(H_i, \mu_n) \rightarrow H_{nr}^2(H_i \setminus Q_i, \mu_n) \rightarrow H^1(Q_i, \mathbb{Z}/n)$$

avec $H_{nr}^2(H_i, \mu_n) = H^1(Q_i, \mathbb{Z}/n) = 0$. On a donc $H_{nr}^2(H_i \setminus Q_i, \mu_n) = 0$.

En une fibre singulière de $\pi' : X' \rightarrow \Gamma$, le résidu de α au point générique de H_i appartient à $H_{nr}^2(H_i \setminus Q_i, \mu_n)$, donc est nul. On en déduit que le résidu de α au point générique de Z est sans résidu le long de Q_i et donc appartient à $H_{nr}^2(Z, \mu_n)$.

Le (i) du lemme 8.16 implique que, sous les hypothèses de la proposition 8.18, le groupe $H_{nr}^2(Z, \mu_n)$ est fini. Avec les arguments précédents, on conclut que $H_{nr}^3(X', \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow H_{nr}^3(X^0, \mu_n^{\otimes 2})$ a un conoyau de torsion, ce qui donne (ii).

Enfin le (ii) du lemme implique que, sous les hypothèses de la proposition 8.18, si $n \neq 3$, on a $H_{nr}^2(Z, \mu_n) = 0$, et donc le résidu de α au point générique de Z est nul, d'où le point (iii). \square

Théorème 8.19. *Soit $\pi : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme dominant de variétés projectives, lisses, connexes sur \mathbb{C} , de fibre générique $V = X_\eta$ géométriquement intègre, de dimension 2, sur le corps $F = \mathbb{C}(\Gamma)$.*

Supposons $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1, 2$ et supposons que la cohomologie de Betti entière de degré 3 d'une fibre lisse de π est sans torsion. Supposons de plus que les fibres singulières de π n'ont que des singularités quadratiques ordinaires.

Si $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, alors $I(X_\eta) = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la combinaison de la proposition 8.18 et de la proposition 8.9. \square

Remarque 8.20. On notera que cet énoncé est plus faible que le résultat obtenu par application du théorème 7.6.

Théorème 8.21. *Soit $\pi : X \rightarrow \Gamma$ un morphisme surjectif de variétés connexes, projectives et lisses sur \mathbb{C} , où Γ est une courbe et la fibre générique $V = X_\eta$ est une surface géométriquement connexe sur $F = \mathbb{C}(\Gamma)$. Supposons $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1, 2$, que le groupe de Néron-Severi de la fibre générique géométrique n'a pas de torsion, et que la flèche $\deg : CH_0(\bar{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.*

(i) *On a alors des inclusions $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{Z}/I(V)$.*

(ii) *Si les fibres singulières de π n'ont que des singularités ordinaires, on a des isomorphismes $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{Z}/I(V)$.*

Démonstration. L'énoncé (i) est une conséquence immédiate de la proposition 8.13. L'égalité $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ dans (ii) a été établie à la proposition 8.18. \square

Remarque 8.22. Comparons ce résultat avec le théorème 7.7. À la différence de ce théorème, on a supposé ici $CH_0(\bar{V}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$, ce qui selon une conjecture de Bloch devrait résulter de l'hypothèse $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1, 2$. Cette conjecture est connue pour les surfaces qui ne sont pas

de type général, et aussi pour un certain nombre de surfaces de type général. L'hypothèse $CH_0(\bar{V}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ implique que $H_{nr}^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est d'exposant fini, et il en est donc de même de $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, qui coïncide donc avec $Z^4(X)$. L'énoncé (ii), où l'on suppose les singularités des fibres le plus simples possibles, n'est donc pas plus fort que le théorème 7.7. Mais l'énoncé (i) donne en particulier que $I(X_\eta) = 1$ implique $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et donc $Z^4(X) = 0$, et ceci est établi sans hypothèse sur les fibres singulières, alors qu'au théorème 7.7 on n'autorise que des singularités quadratiques dans les fibres.

9 Appendice : Action des correspondances sur les groupes $H^i(\mathcal{H}^j)$

Dans ce qui suit X et Y sont lisses et projectives sur \mathbb{C} . On considère les cycles $Z \subset X \times Y$ de codimension $r + \dim X$, c'est-à-dire tels que $\dim Y - \dim Z = r$.

Proposition 9.1. *Pour tout groupe abélien A , le cycle $Z \in CH^{r+\dim X}(X \times Y)/alg$ induit un homomorphisme*

$$Z_* : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \rightarrow H^{p+r}(Y, \mathcal{H}_Y^{q+r}(A(r))).$$

Ces actions sont compatibles à la composition des correspondances.

Démonstration. Tout d'abord, par la formule de Bloch–Ogus (cf. Corollaire 2.4), Z a une classe

$$[Z]_{BO} \in H^{d+r}(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^{d+r}(\mathbb{Z}(d+r))),$$

où $d = \dim X$. Par ailleurs on a clairement des flèches

$$pr_1^* : H^p(X, \mathcal{H}^q(A)) \rightarrow H^p(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^q(A)),$$

et enfin on dispose de produits (induits par les cup-produits $\mathcal{H}_W^l(A) \otimes \mathcal{H}_W^s(\mathbb{Z}(l)) \rightarrow \mathcal{H}_W^{l+s}(A(l))$) :

$$H^p(W, \mathcal{H}_W^l(A)) \otimes H^q(W, \mathcal{H}_W^s(\mathbb{Z}(l))) \rightarrow H^{p+q}(W, \mathcal{H}_W^{l+s}(A(l)))$$

pour toute variété W et tout entier l . On en déduit que l'on a une flèche

$$[Z]_{BO} \circ pr_1^* : H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)) \rightarrow H^{p+d+r}(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^{q+d+r}(A(d+r))).$$

Pour conclure, il suffit donc de construire

$$pr_{2*} : H^i(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^j(A(d+r))) \rightarrow H^{i-d}(Y, \mathcal{H}_Y^{j-d}(A(r)))$$

pour X projective lisse de dimension d . (On peut évidemment remplacer ici la projection par n'importe quelle application propre.)

Or ceci résulte de la résolution de Bloch–Ogus (théorème 2.3) qui donne la formule explicite :

$$\begin{aligned} & H^i(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^j(A(d+r))) = \\ & \frac{\text{Ker} [\oplus_{x \in (X \times Y)^{(i)}} H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i)) \xrightarrow{\partial} \oplus_{x \in (X \times Y)^{(i+1)}} H_B^{j-i-1}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i-1))]}{\text{Im} [\oplus_{x \in (X \times Y)^{(i-1)}} H_B^{j-i+1}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i+1)) \xrightarrow{\partial} \oplus_{x \in (X \times Y)^{(i)}} H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i))]} \quad (9) \end{aligned}$$

Un point x de codimension i a une adhérence $Z_x \subset X \times Y$ qui s'envoie sur une sous-variété $Z'_x \in Y$ de codimension $\geq i - d$, avec égalité lorsque $pr_2 : Z_x \rightarrow Z'_x$ est génériquement finie. On notera x' le point de Y correspondant à Z'_x . Pour un x ne satisfaisant pas la condition que $x' \in Y^{(i-d)}$, on dira que $pr_{2*} : H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i)) \rightarrow H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x'), A(d+r-i))$ est nulle, et dans le cas contraire, $pr_{2*} : H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i)) \rightarrow H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x'), A(d+r-i))$ sera induite par l'application propre $pr_{2|Z_x} : pr_{2|Z_x}^{-1}(V) \rightarrow V$ pour des ouverts suffisamment petits V de Z'_x . Nous avons alors besoin du lemme suivant :

Lemme 9.2. *Les flèches pr_{2*} ci-dessus commutent aux flèches de résidus, c'est-à-dire les différentielles ∂ apparaissant dans (9).*

Ce lemme entraîne que la somme des flèches pr_{2*} passe à la cohomologie pour donner une flèche pr_{2*} du groupe (9) dans

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Ker} [\oplus_{x \in Y^{(i-d)}} H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i)) \xrightarrow{\partial} \oplus_{x \in Y^{(i+1-d)}} H_B^{j-i-1}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i-1))]}{\text{Im} [\oplus_{x \in Y^{(i-d-1)}} H_B^{j-i+1}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i+1)) \xrightarrow{\partial} \oplus_{x \in Y^{(i-d)}} H_B^{j-i}(\mathbb{C}(x), A(d+r-i))]} \\ & = H^{i-d}(Y, \mathcal{H}_Y^{j-d}(A(r))), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est encore donnée par le théorème de résolution 2.3, appliqué à Y cette fois.

Pour conclure la preuve de la proposition 9.1, il reste à établir le lemme 9.2 ainsi qu'à montrer le lemme suivant :

Lemme 9.3. *L'action ainsi construite $Z \mapsto Z_*$, de $CH^{\dim X+r}(X \times Y)/alg$ dans*

$$\text{Hom}(H^p(X, \mathcal{H}_X^q(A)), H^{p+r}(Y, \mathcal{H}_Y^{q+r}(A(r))),$$

est compatible à la composition des correspondances.

□

Démonstration du lemme 9.2. Soit $Z \subset X \times Y$ une sous-variété de codimension i . Soit $D' \subset Z' = pr_2(Z)$ une sous-variété de codimension $i-d-1$ dans Y . Supposons pour simplifier que Z et Z' sont normales. On veut montrer que pour tout entier l , le composé

$$\text{Res}_{Z', D'} \circ pr_{2*} : H_B^k(\mathbb{C}(Z), A(l)) \rightarrow H_B^k(\mathbb{C}(Z'), A(l)) \rightarrow H_B^{k-1}(\mathbb{C}(D'), A(l-1))$$

est égal à $pr_{2*} \circ \sum_{\substack{D \subset Z \\ pr_2(D)=D'}} pr_{2*} \circ \text{Res}_{Z, D}$:

$$H_B^k(\mathbb{C}(Z), A(l)) \rightarrow \bigoplus_{\substack{D \subset Z \\ pr_2(D)=D'}} H_B^{k-1}(\mathbb{C}(D), A(l-1)) \rightarrow H_B^{k-1}(\mathbb{C}(D'), A(l-1)).$$

Supposons tout d'abord que $\dim Z' = \dim Z$. Alors, rappelant que les flèches de résidus sont induites par la suite exacte de cohomologie à supports pour les paires constituées d'une variété et d'un diviseur, le résultat résulte simplement du fait qu'on a un morphisme propre pr_2 entre les paires $(Z_0, \cup_{pr_2(D)=D'} D)$ et (Z'_0, D') , où Z'_0 est un ouvert lisse de Z' contenant un ouvert de Zariski dense de D' , et Z_0 est l'image inverse de Z'_0 dans Z . De plus ce morphisme reste propre lorsqu'on passe aux complémentaires des diviseurs considérés. Sans hypothèse de normalité, il suffit de normaliser les variétés considérées.

Il reste à étudier ce qui se passe lorsque $\dim Z' < \dim Z$, ce qui n'est possible que si $\dim Z' = \dim Z - 1$, et $Z' = D'$. Dans ce cas, le premier composé est nul par définition car $pr_{2*} : H_B^k(\mathbb{C}(Z), A(l)) \rightarrow H_B^k(\mathbb{C}(Z'), A(l))$ est nul. Il suffit donc de montrer que pour toute classe $\alpha \in H_B^k(\mathbb{C}(Z), A(l))$, on a $pr_{2*}(\text{Res } \alpha) = 0$, où $\text{Res } \alpha$ est une somme finie de classes de degré $k-1$ sur des diviseurs $D \subset Z$ tels que $pr_2 : D \rightarrow D'$ soit génériquement fini. Ceci est élémentaire car l'application $pr_2 : Z \rightarrow Z'$ induit une application $pr_2^0 : Z_0 \rightarrow Z'_0$ qui est propre et lisse de dimension relative 1 au-dessus d'un ouvert de Zariski dense Z'_0 de $D' = Z'$. On dispose

donc d'une application $pr_{2*}^0 : H^{k+1}(Z_0, A(l)) \rightarrow H^{k-1}(Z'_0, A(l-1))$ et on a alors la relation suivante, pour $\beta \in H^{k-1}(D, A(l-1))$, où $D \subset Z^0$ est un diviseur lisse propre au-dessus de Z'_0 :

$$pr_{2*}(\beta) = pr_{2*}^0 \circ j_*(\beta),$$

où le premier pr_{2*} est relatif à l'application propre induite par pr_2 de D sur Z'_0 . Cela conclut la preuve car on a

$$j_* \circ Res = 0 : H^k(Z^0 \setminus D, A(l)) \rightarrow H^{k-1}(D, A(l-1)) \rightarrow H^{k+1}(Z^0, A(l)).$$

□

Démonstration du lemme 9.3. En examinant la preuve de la compatibilité de l'action des correspondances sur les groupes de Chow ou la cohomologie avec la composition des correspondances (cf. [56, Prop. 21.17]), et la construction de l'action Z_* sur les $H^p(\mathcal{H}^q)$, on constate que la compatibilité de l'action Z_* construite ci-dessus avec la composition des correspondances est une conséquence formelle des trois faits suivants, faciles à vérifier dans notre cas :

(1) La compatibilité de l'application classe de cycles de Bloch–Ogus $Z \mapsto [Z]_{BO}$ avec le produit d'intersection.

(2) La formule de projection pour les applications $pr_{2*} : H_B^k(\mathbb{C}(Z), A(l)) \rightarrow H_B^k(\mathbb{C}(Z'), A(l))$ introduites ci-dessus. Pour $\alpha \in H_B^p(\mathbb{C}(Z), A)$, $\beta \in H_B^p(\mathbb{C}(Z'), \mathbb{Z}(l))$

$$pr_{2*}(\alpha \cup pr_2^* \beta) = pr_{2*}(\alpha) \cup \beta.$$

(3) La formule de changement de base suivante : prenons un produit $X \times Y \times Z$ de variétés projectives avec $\dim X = d$, et notons p la projection de $X \times Y$ sur Y , P la projection de $X \times Y \times Z$ sur $Y \times Z$, q la projection de $Y \times Z$ sur Y et Q celle de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y$. Alors on a pour $\alpha \in H^p(X \times Y, \mathcal{H}_{X \times Y}^q(A(l)))$:

$$q^*(p_* \alpha) = P_*(Q^* \alpha) \text{ dans } H^{p-d}(X \times Y, \mathcal{H}_{Y \times Z}^{q-d}(A(l-d))).$$

□

Remerciements. Ce travail a été commencé lors de l'atelier « Rational curves and \mathbb{A}^1 -homotopy theory » organisé par Aravind Asok et Jason Starr à l'American Institute of Mathematics (Palo Alto, Californie) du 5 au 9 octobre 2009.

Références

- [1] M. Artin, Comparaison avec la cohomologie classique : cas d'un schéma lisse, Exposé XI in *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Tome 3. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **305**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [2] M. Atiyah et F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* **1**, 25–45 (1962).
- [3] L. Barbieri-Viale, Cicli di codimensione 2 su varietà unirazionali complesse, in *K-Theory*, Strasbourg 1992, Astérisque **226** (1994), p. 13–41.
- [4] L. Barbieri-Viale, On the Deligne–Beilinson cohomology sheaves, prépublication, arXiv :alg-geom/9412006v1.

- [5] S. Bloch, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series IV (1980). Second edition, New mathematical monographs vol. **16**, Cambridge University Press (2010).
- [6] S. Bloch et H. Esnault, The coniveau filtration and non-divisibility for algebraic cycles. *Math. Ann.* **304** (1996), no. 2, 303–314.
- [7] S. Bloch et A. Ogus, Gersten’s conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., Sér. 4*, **7**, 181–201 (1974).
- [8] S. Bloch et V. Srinivas, Remarks on correspondences and algebraic cycles, *Amer. J. of Math.* **105** (1983) 1235–1253.
- [9] E. Cattani, P. Deligne et A. Kaplan, On the locus of Hodge classes, *J. Amer. Math. Soc.* **8**, 483–506 (1995).
- [10] H. Clemens, Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **58** (1983) 19–38 (1984).
- [11] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert’s theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces, *Invent. math.* **71** (1983) 1–20.
- [12] J.-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in *Arithmetic Algebraic Geometry* (CIME, Trento, 1991, E. Ballico, ed.) J.-L. Colliot-Thélène, K. Kato, P. Vojta, Springer L.N.M. **1553** (1993) p. 1–49.
- [13] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **58**, Part I (1995) p. 1–64.
- [14] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn, The Bloch-Ogus-Gabber theorem, in *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)*, 31–94, *Fields Inst. Commun.*, **16**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [15] J.-L. Colliot-Thélène et D. Madore, Surfaces de del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique 1, *Journal de l’Institut mathématique de Jussieu* (2004) **3**(1), 1–16.
- [16] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l’exemple d’Artin et Mumford, *Invent. math.* **97** (1989), no. 1, 141–158.
- [17] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2 -cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985) 165–199.
- [18] J.-L. Colliot-Thélène et T. Szamuely, Autour de la conjecture de Tate à coefficients \mathbb{Z}_ℓ pour les variétés sur les corps finis, in *The Geometry of Algebraic Cycles*, R. Akhtar, P. Brosnan and R. Joshua eds., *AMS/Clay Institute Proceedings*, 2010, p. 83–98.
- [19] S. Endrass, On the divisor class group of double solids, *manuscripta math.* **99**, 341–358 (1999).
- [20] W. Fulton, *Intersection Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 2*, Springer-Verlag, (1984).
- [21] O. Gabber, Appendice à “Exposant et indice d’algèbres non ramifiées”, par J.-L. Colliot-Thélène, *Ens. Math.* **48** (2002) 127–146.
- [22] H. Gillet et C. Soulé, C. Filtrations on higher algebraic K -theory. *Algebraic K-theory* (Seattle, WA, 1997), 89–148, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999).

- [23] T. Graber, J. Harris et J. Starr, Families of rationally connected varieties, *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (1), 57–67 (2003).
- [24] T. Graber, J. Harris, B. Mazur et J. Starr, Rational connectivity and sections of families over curves, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., Sér. 4*, **38** (2005), 671–692.
- [25] P. Griffiths, On the periods of certain rational integrals, I, II, *Ann. of Math.* **90** (1969), 460–541.
- [26] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics vol. **3**, Masson et North-Holland, 1968.
- [27] A. Grothendieck, Hodge’s general conjecture is false for trivial reasons, *Topology* **8** (1969) 299–303.
- [28] A. Höring et C. Voisin, Anticanonical Divisors and Curve Classes on Fano Manifolds, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **7**, no. 4, (Special Issue : In memory of Eckart Viehweg) (2011) 1371–1393.
- [29] R. T. Hoobler, The Merkurjev-Suslin theorem for any semi-local ring, *J. Pure Appl. Algebra* **207** (2006), no. 3, 537–552.
- [30] B. Kahn, Applications of weight two motivic cohomology, *Documenta Mathematica* **1** (1996) 395–416.
- [31] B. Kahn, M. Rost, R. Sujatha, Unramified cohomology of quadrics. I, *Amer. J. Math.* **120** (1998) 841–891.
- [32] M. Kerz, The Gersten conjecture for Milnor K-theory, *Invent. math.* **175** (2009) 1–33.
- [33] J. Kollár, Higher direct images of dualizing sheaves II, *Annals of Math.* **124**, 171–202 (1986).
- [34] J. Kollár, Lemma p. 134 in *Classification of irregular varieties*, edited by E. Ballico, F. Catanese, C. Ciliberto, *Lecture Notes in Math.* **1515**, Springer (1990).
- [35] G. Lafon, Une surface d’Enriques sans point sur $\mathbb{C}((t))$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 1, 51–54.
- [36] A. S. Merkur’ev, Rational correspondences, disponible sur la page <http://www.math.ucla.edu/merkurev/publicat.htm>
- [37] A. S. Merkur’ev et A. A. Suslin, K -cohomologie des variétés de Severi–Brauer et homomorphisme de norme résiduelle (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136. Trad. anglaise : *Math. USSR-Izv.* **21** (1983), no. 2, 307–340.
- [38] A. S. Merkur’ev et A. A. Suslin, Homomorphisme de norme résiduelle de degré 3 (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54** (1990), no. 2, 339–356. Trad. anglaise : *Math. USSR Izv.* **36** (1991), no. 2, 349–367.
- [39] D. Mumford, Rational equivalence of zero-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **9** (1968), 195–204.
- [40] M. Nori, Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity, *Invent. math.* **111** (1993) 349–373.
- [41] K. H. Paranjape, Some spectral sequences for filtered complexes and applications. *J. Algebra* **186** (1996), no. 3, 793–806.
- [42] R. Parimala, Witt groups vis-à-vis Chow groups, in *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry* (Bombay, 1989), 149–154, Hindustan Book Agency, Delhi, 1993.
- [43] E. Peyre, Unramified cohomology and rationality problems, *Math. Ann.* **296** (1993), no. 2, 247–268.

- [44] E. Peyre, Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem, *Invent. math.* **171** (2008), no. 1, 191–225.
- [45] A. Roitman, The torsion of the group of zero-cycles modulo rational equivalence, *Ann. of Math.* **111** (1980), 553–569.
- [46] M. Rost, Chow groups with coefficients, *Doc. Math. J. DMV* **1** (1996), 329–383.
- [47] M. Rost, <http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/K3-86.html>
- [48] C. Schoen, Complex varieties for which the Chow group mod n is not finite, *J. Algebraic Geometry* **11** (2002), no. 1, 41–100.
- [49] C. Soulé et C. Voisin, Torsion cohomology classes and algebraic cycles on complex projective manifolds, *Adv. Math.* **198** (2005), no. 1, 107–127.
- [50] J. Starr, A pencil of Enriques surfaces of index one with no section, *Algebra and Number Theory* **3** (2009) no. 6, 637–652.
- [51] A. Suslin, S. Joukhovitski, Norm varieties, *J. Pure Appl. Algebra* **206** (2006), no. 1-2, 245–276.
- [52] B. Totaro, Torsion algebraic cycles and complex cobordism, *J. Amer. Math. Soc.* **10**, 467–493, (1997).
- [53] V. Voevodsky, Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$ -coefficients, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), 59–104.
- [54] V. Voevodsky, Motivic cohomology with \mathbb{Z}/l -coefficients, *Annals of Math.* **174** (2011) 401–438.
- [55] C. Voisin, The Griffiths group of a general Calabi-Yau threefold is not finitely generated. *Duke Math. J.* **102**, No 1 (2000), 151–186.
- [56] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés **10**, SMF (2004).
- [57] C. Voisin, On integral Hodge classes on uniruled and Calabi-Yau threefolds, in *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **45**, 2006, p. 43–73.
- [58] C. Voisin, Some aspects of the Hodge conjecture. *Japan. J. Math.* **2**, 261–296 (2007).
- [59] C. Voisin, Hodge loci, prépublication 2010, à paraître dans *Handbook of Moduli*.
- [60] C. Voisin, Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal, [arXiv :1005.1346v1](https://arxiv.org/abs/1005.1346v1), à paraître dans le *Journal of Algebraic Geometry*.
- [61] C. Weibel, The norm residue isomorphism theorem, *Jour. Topology* **2** (2009), 346–372.
- [62] S. Zucker, The Hodge conjecture for cubic fourfolds, *Compositio Math.* **34**, 199–209 (1977).

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., UMR 8628,
Mathématiques, Bâtiment 425,
Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay, France
courriel : jlct@math.u-psud.fr

Claire Voisin,
C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu,
Case 247,
4 Place Jussieu,
F-75005 Paris, France
courriel : voisin@math.jussieu.fr