

Principe de Hasse pour les hypersurfaces cubiques lisses dans le cas fonctionnel

Jean-Louis Colliot-Thélène, Olivier Wittenberg

▶ **To cite this version:**

Jean-Louis Colliot-Thélène, Olivier Wittenberg. Principe de Hasse pour les hypersurfaces cubiques lisses dans le cas fonctionnel. Acta Arithmetica, A paraître, volume en l'honneur de Roger Heath-Brown. ⟨hal-05752539v3⟩

HAL Id: hal-05752539

https://hal.science/view/index/docid/5869225

Submitted on 17 Nov 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

PRINCIPE DE HASSE POUR LES HYPERSURFACES CUBIQUES LISSES DANS LE CAS FONCTIONNEL

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET OLIVIER WITTENBERG

Résumé. La résolution finale du problème de Cassels et Swinnerton-Dyer pour les surfaces cubiques sur un corps quelconque, par deux méthodes indépendantes élaborées avec l'aide de modèles de langage, vient d'être annoncée par Alexeev et Schreieder [2]. Cette note enregistre deux corollaires. Soit k un corps global de caractéristique strictement positive différente de 3. En utilisant un théorème de Zhiyu Tian (2025), on montre que pour les surfaces cubiques lisses sur k l'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel est la seule obstruction. On en déduit le principe de Hasse pour les points rationnels des hypersurfaces cubiques lisses de dimension au moins 3 sur k. Ce dernier résultat n'était pas connu en dimension 3.

Roger Heath-Brown die natali oblatum

1. Le contexte

Soit k un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Pour v une place de k, on note k_v le complété. Pour X une k-variété, on note $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels, contenu diagonalement dans son espace des adèles $X(\mathbf{A}_k)$. Si X est projective, on a simplement $X(\mathbf{A}_k) = \prod_v X(k_v)$. On note $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble de Brauer-Manin, c'est-à-dire l'orthogonal de $X(\mathbf{A}_k)$ pour l'accouplement de Manin avec le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$:

$$X(\mathbf{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On a $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

On a les *conjectures* suivantes, cas particuliers de conjectures générales (voir les rapports [30, 7]) sur l'arithmétique des variétés rationnellement connexes.

(i) Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse. Si l'ensemble de Brauer-Manin $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ est non vide, alors $X(k)$ est non vide.

(ii) Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 4$, une hypersurface cubique lisse. Si l'ensemble $X(\mathbf{A}_k)$ est non vide, alors $X(k)$ est non vide.

Date: 16 septembre 2026 ; révisé le 13 octobre 2026, soumis à Acta Arithmetica (volume en l'honneur de Heath-Brown) le 14 octobre 2026 ; accepté le 16 novembre 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11G35 ; 14G12, 11D25, 14G05.

Ces deux conjectures ont été beaucoup discutées, des résultats partiels et parfois conditionnels ont été obtenus, par exemple pour les hypersurfaces cubiques diagonales. Citons ici :

(a) Pour $k = \mathbf{Q}$ le corps des rationnels, l'énoncé (ii) est un théorème de R. Heath-Brown [19] (1983) pour $n \geq 9$ (dans ce cas $X(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ est toujours non vide, l'énoncé est simplement $X(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$), et un théorème de C. Hooley (1988) pour $n = 8$. Le résultat de Heath-Brown fut étendu à tous les corps de nombres par Browning et Vishe [3]. Ces articles utilisent la méthode du cercle de Hardy et Littlewood.

(b) Pour $k = \mathbf{F}(C)$ le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini de caractéristique $p \geq 7$, Zhiyu Tian [27] a établi l'énoncé (ii) lorsque $n \geq 5$. Cet article utilise des techniques de déformation venant de la théorie des variétés rationnellement connexes. Le résultat pour $k = \mathbf{F}(\mathbf{P}^1)$ de caractéristique $p \geq 5$, avec $n \geq 7$ avait été obtenu par une version de la méthode du cercle dans [4].

(c) Pour k un corps de nombres, une méthode de fibration utilisée dans l'étude du principe de Hasse en famille [25, 18] montre que la conjecture (ii) suit de la validité de la conjecture (i) pour toute surface cubique lisse (D. Harari [18, Prop. 5.2.2]).

2. Les surfaces cubiques

Théorème 2.1. *Soit k un corps global de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur k. Supposons p différent de 3. S'il existe un élément de $X(\mathbf{A}_k)$ orthogonal à la torsion 3-primaire du groupe de Brauer de X, alors $X(k)$ est non vide.*

Démonstration. Par des méthodes motiviques élaborées, combinées avec le travail géométrique [21], pour toute surface projective lisse géométriquement rationnelle sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, Zhiyu Tian [28] a établi un analogue de cet énoncé pour les zéro-cycles de degré 1. Les surfaces cubiques projectives et lisses sont géométriquement rationnelles. Pour une surface cubique X sur k comme ci-dessus, pour $\ell = 3$, le théorème 1.4 de [28] (via son application à la conjecture 1.2 de [28]) implique immédiatement : s'il existe un point dans $X(\mathbf{A}_k)$ qui est orthogonal à la torsion 3-primaire du groupe de Brauer, alors il existe un zéro-cycle sur X de degré premier à 3, et donc il existe un point fermé de degré premier à 3. La conjecture de Cassels–Swinnerton-Dyer, maintenant établie pour les surfaces cubiques lisses sur un corps k quelconque en combinant les travaux de Coray [10] (1976), Voisin [29] (2026) et d'Alexeev et Schreieder [2] donne alors l'existence d'un point rationnel sur X. □

Corollaire 2.2. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini de caractéristique $p \neq 3$. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur k. Si le sous-groupe de 3-torsion de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est nul, alors le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de X.*

Remarques 2.3. (i) Comme $\mathrm{Br}(k)$ est divisible, il revient au même de demander, dans le théorème 2.1, l'orthogonalité à la torsion 3-primaire de $\mathrm{Br}(X)$ ou l'orthogonalité à la torsion 3-primaire de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$.

(ii) Des cas particuliers du théorème 2.1 avaient été établis dans [9, Theorem 3] et dans [6, Chap. 3].

(iii) L'analogue du théorème 2.1 pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ sur un corps global k de caractéristique $p \geq 3$ est [28, Theorem 1.5].

(iv) On peut s'étonner que seule la torsion 3-primaire du groupe de Brauer joue un rôle. Rappelons à ce sujet deux résultats de Swinnerton-Dyer [26]. Soit X une surface cubique lisse sur un corps de nombres k. Le groupe $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est annulé par 6. Par ailleurs, si $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ contient un élément d'ordre 2, alors, sur une extension K/k de degré au plus 2, la surface X_K est l'éclatée d'une surface de Severi–Brauer sur K. Ceci implique le principe de Hasse pour les points rationnels sur X [26, Corollary 1].

(v) On utilise dans la démonstration la conjecture de Cassels–Swinnerton-Dyer sur une surface cubique lisse sur un corps non parfait. Que la conjecture en caractéristique zéro implique la conjecture sur tout corps se voit par un argument simple de relèvement sur un anneau de Cohen (cf. [22, Thm. 2.6] et [2, Thm. 5.3]).

(vi) Il avait été établi [24, Cor. 1.2] que les conjectures usuelles sur l'obstruction de Brauer–Manin sur les points rationnels des surfaces géométriquement rationnelles impliquent la conjecture de Cassels–Swinnerton-Dyer pour les surfaces cubiques sur un corps global.

3. Les hypersurfaces cubiques

Comme mentionné ci-dessus, le théorème suivant avait été obtenu pour $n \geq 5$ et $p \geq 7$, par une autre méthode, par Zhiyu Tian [27].

Théorème 3.1. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini de caractéristique $p \neq 3$. Le principe de Hasse vaut pour les points rationnels des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_k$ avec $n \geq 4$.*

Preuve du théorème 3.1 dans le cas $n = 4$. Soit $X \subset \mathbf{P}^4_k$ une hypersurface cubique lisse. La variété des droites $F(X)$ de X est une surface lisse et géométriquement irréductible (voir [1, Proposition 1.23]). Soit

$$D \subset F(X) \times (\mathbf{P}^4_k)^* \qquad (\text{resp. } Y \subset X \times (\mathbf{P}^4_k)^*)$$

la sous-variété fermée paramétrant les couples (d, h) (resp. (x, h)) formés d'une droite $d \subset X$ (resp. d'un point $x \in X$) et d'un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^4$ tels que $d \subset h$ (resp. tels que $x \in h$). Les projections $D \to F(X)$ et $Y \to X$ sont des fibrés projectifs, par conséquent D et Y sont des variétés lisses et géométriquement irréductibles.

Si une section hyperplane de $X_{\bar{k}}$ n'était pas intègre, elle contiendrait, comme toute surface cubique qui n'est pas intègre, un plan ; l'hypersurface $X_{\bar{k}}$ contiendrait ainsi elle-même un plan, ce qui contredirait sa lissité

[20, Remark 3.3]. Toutes les fibres de la projection $q : Y \to (\mathbf{P}^4_k)^*$ sont donc des surfaces cubiques géométriquement intègres. Ces fibres ayant toutes la même dimension et Y étant lisse, le morphisme q est plat (voir [17, Proposition 15.4.2]). La restriction de q à l'ouvert $Y^0 \subset Y$ des points en lesquels q est lisse est donc surjective.

De ces observations, du lemme de Hensel et des estimations de Lang–Weil–Nisnevich, il résulte que l'application $Y^0(k_v) \to (\mathbf{P}^4)^*(k_v)$ induite par q est surjective pour toute place v de k hors d'un ensemble fini S. (Cette implication remonte à [8]. Pour une preuve détaillée, on pourra se référer à [12, Lemma 2.10], dont les arguments fonctionnent *verbatim* sur un corps global de caractéristique $p > 0$.)

Pour démontrer que X satisfait au principe de Hasse, supposons que $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k. Il s'ensuit que $Y^0(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k. Pour $v \in S$, fixons $y_v \in Y^0(k_v)$.

La projection $D \to (\mathbf{P}^4_k)^*$ est génériquement étale (voir [11, Theorem 2.9]). Une fibre géométrique lisse consiste en 27 points correspondant aux 27 droites de la surface cubique définie par section hyperplane.

D'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert (voir [13, Corollary A.2]), il existe donc $b \in (\mathbf{P}^4)^*(k)$ arbitrairement proche de $q(y_v)$ pour $v \in S$ et tel que la fibre de la projection $D \to (\mathbf{P}^4_k)^*$ en b soit étale et irréductible et que la fibre $Y_b = q^{-1}(b)$ soit lisse. Par le théorème des fonctions implicites, si b a été choisi suffisamment proche de $q(y_v)$ pour $v \in S$, on peut supposer que $Y_b(k_v) \neq \emptyset$ pour $v \in S$. Compte tenu de la définition de S, on a donc $Y_b(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k.

Ainsi Y_b est une surface cubique lisse sur k possédant des points dans tous les complétés de k et telle que, si k^s désigne une clôture séparable de k, le groupe $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ agit transitivement sur l'ensemble des 27 droites contenues dans $(Y_b)_{k^s}$. Comme indiqué dans [14, Remark 2.6], il résulte alors de [23, Proposition 31.3] que $H^1(k, \mathrm{Pic}((Y_b)_{k^s}))$ est nul—le point étant que l'image de l'endomorphisme de $\mathrm{Pic}(Y_b)_{k^s}$ noté N dans *loc. cit.* est de rang 1, engendré par la somme des classes des 27 droites. La suite spectrale de Hochschild–Serre permet d'en déduire que l'application naturelle

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(Y_b) \to \mathrm{Br}((Y_b)_{k^s})\big) \tag{3.1}$$

est surjective. D'après [5], la surface Y_b est k^s-rationnelle ; la surjectivité de (3.1) équivaut donc à celle de l'application naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Y_b)$ (voir [16, Corollaire 7.5] et [15, Theorem 2]).

Vu le corollaire 2.2, on conclut que l'on a $Y_b(k) \neq \emptyset$, et donc $X(k) \neq \emptyset$. □

Preuve du théorème 3.1 dans le cas $n > 4$. On procède par récurrence sur n en suivant la même preuve exactement que dans le cas $n = 4$, à ceci près que l'on ignore toutes les considérations portant sur $F(X)$ et D et que l'on remplace le corollaire 2.2 par l'hypothèse de récurrence. □

Remarques 3.2. (i) Dans le cas fonctionnel, la rédaction de l'analogue des résultats généraux de [18] sur les corps de nombres n'a pas encore été faite.

C'est pourquoi la preuve ci-dessus exploite des simplifications spécifiques aux hypersurfaces cubiques en lieu et place d'un analogue de [18, Théorème 4.2.1].

(ii) Pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$, $n \geq 5$, sur un corps global k de caractéristique $p > 2$, le principe de Hasse a été établi par Zhiyu Tian [27, Theorem 1.1 (3)].

Remerciements

Nous remercions Valery Alexeev et Stefan Schreieder de nous avoir communiqué des versions préliminaires de [2].

Déclaration

Les idées et démonstrations de la présente note sont entièrement le produit de la pensée humaine.

Références

[1] A. B. Altman, S. L. Kleiman, Foundations of the theory of Fano schemes, Compos. Math. **34**, 3–47 (1977).

[2] V. Alexeev, S. Schreieder, Two proofs of the Cassels–Swinnerton-Dyer conjecture for cubic surfaces, https://arxiv.org/abs/2609.15930.

[3] T. D. Browning, P. Vishe, Cubic hypersurfaces and a version of the circle method for number fields, Duke Math. J. **163** (2014), 1825–1883.

[4] T. D. Browning, P. Vishe, Rational points on cubic hypersurfaces over $\mathbf{F}_q(t)$, Geom. Funct. Anal. Vol. **25** (2015), 671–732.

[5] K. R. Coombes, Every rational surface is separably split, Comment. Math. Helv. **63**, No. 2 (1988), 305–311.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, Points rationnels sur les fibrations, in Higher Dimensional Varieties and Rational Points, Bolyai Society Mathematical Series, vol. 12, Springer-Verlag, 2003, édité par K. J. Böröczky, J. Kollár et T. Szamuely, 171–221.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, Une liste de problèmes, Mathematics Going Forward, Springer, LNM **2313** (2023), 7–28.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I, J. reine angew. Math. **373**, 37–107 (1987).

[9] J.-L. Colliot-Thélène, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Zero-cycles and rational points on some surfaces over a global function field, Acta Arith. **155** (2012), 63–70.

[10] D. Coray, Algebraic points on cubic hypersurfaces, Acta Arith. **30** (1976), no. 3, 267–296.

[11] O. Debarre, On the geometry of hypersurfaces of low degrees in the projective space, H. Mourtada (éd.) et al., Algebraic geometry and number theory. Summer school, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, June 2–13, 2014. Basel : Birkhäuser/Springer. Progress in Mathematics **321** (2017), 55–90.

[12] J. Demeio, S. Streeter, R. Winter, Weak weak approximation and the Hilbert property for degree 2 del Pezzo surfaces, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **128**, No. 5 (2024), Article ID e12601, 28 p.

[13] V. Drinfeld, On a conjecture of Deligne, Mosc. Math. J. **12**, No. 3 (2012), 515–542.

[14] A.-S. Elsenhans, J. Jahnel, Experiments with general cubic surfaces, in Tschinkel, Yuri (éd.) et al., Algebra, arithmetic, and geometry. In honor of Yu. I. Manin on the occasion of his 70th birthday. Vol. I. Boston, MA : Birkhäuser. Progress in Mathematics **269** (2009), 637–653.

[15] O. Gabber, Some theorems on Azumaya algebras, Groupe de Brauer, Sémin., Les Plans-sur-Bex 1980, Lect. Notes Math. **844** (1981), 129–209.

[16] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer. III : Exemples et compléments, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, Adv. Stud. Pure Math. **3** (1968), 88–188.

[17] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. (Troisième partie). Rédigé avec la collaboration de J. Dieudonné, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **28** (1966), 1–255.

[18] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. **75** (1994), 221–260.

[19] D. R. Heath-Brown, Cubic forms in ten variables. Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), no. 2, 225–257.

[20] D. Huybrechts, The geometry of cubic hypersurfaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **206** (2023). Cambridge : Cambridge University Press, 441 p.

[21] J. Kollár, Z. Tian, Stable maps of curves and algebraic equivalence of 1-cycles., Duke Math. J. **174** (2025), no. 5, 911–947.

[22] Q. Ma, Closed points on cubic hypersurfaces, Michigan Math. J. **70** (2021, no. 4, 857–868.

[23] Yu. I. Manin, Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic. Traduit du russe par M. Hazewinkel. 2ème éd., North-Holland Mathematical Library, Vol. 4 (1986), Amsterdam-New York-Oxford : North-Holland. X, 326 p.

[24] C. Rivera, B. Viray, Persistence of the Brauer–Manin obstruction on cubic surfaces, Math. Res. Lett. **29** (2022), no. 6, 1881–1889.

[25] A. N. Skorobogatov, On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1989, éd. Catherine Goldstein, Progr. Math. **91** (1990), Birkhäuser-Boston, 205–214.

[26] Sir Peter Swinnerton-Dyer, The Brauer group of cubic surfaces, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **113** (1993), 449–460.

[27] Z. Tian, Hasse principle for three classes of varieties over global function fields, Duke Math. J. **166**, no. 17 (2017), 3349–3424.

[28] Z. Tian, Local-global principle and integral Tate conjecture for certain varieties, J. Amer. Math. Soc., **38**, no. 3 (2025), 703–782.

[29] C. Voisin, Rank 2 vector bundles and degrees of points of del Pezzo surfaces, J. reine angew. Math. **836** (2026) 303–327.

[30] O. Wittenberg, Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **97.2** (2018), Amer. Math. Soc., 597–635.

Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr

Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

Email address: wittenberg@math.univ-paris13.fr