ZÉRO-CYCLES SUR LES SURFACES DE DEL PEZZO : ERRATUM ET COMPLÉMENTS

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. On donne des corrections et compléments pour l'article *Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)*, paru dans *L'Enseignement mathématique* en 2020.

Abstract. This note collects corrections and complements for the paper *Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)* [CT20].

Introduction

L'article [CT20], qui reprend et étend des résultats de Daniel Coray [C76], a été mentionné, et parfois utilisé, dans divers travaux récents ([Ma21] [RV22] [V26] [V25] [AS26]). Cette note regroupe divers compléments à cet l'article.

À la section 1, on signale une erreur au §2 de l'article [CT20], et on décrit les modifications à y effectuer. On établit le théorème 1.1, qui assure la validité des paragraphes suivants de l'article [CT20].

À la section 2, on montre comment la plupart des énoncés établis en caractéristique zéro dans [CT20, V26] valent sur tout corps. Ceci généralise un résultat de Qixiao Ma [Ma21].

À la section 3, on montre comment les méthodes de [CT20] donnent directement de meilleures estimations sur les résultats d'effectivité de zéro-cycles établis dans [CT20].

La section 4 est une remarque sur le dernier paragraphe de [CT20].

La section 5 répond à une remarque de [V25]. On montre que les questions d'effectivité de zéro-cycles traitées dans [CT20, V26, V25, AS26] ont une réponse simple pour les surfaces de del Pezzo de degré au moins 5 : le groupe de Chow des zéro-cycles est libre de rang 1, engendré par tout point fermé de degré minimal. Comme on ne trouve pas cet énoncé dans la littérature, dans la dernière section de cette note, je collecte les énoncés nécessaires à sa démonstration.

Remerciements Kai Huang m'a signalé l'erreur dans [CT20]. Claire Voisin m'a montré comment le théorème 3.1 se déduit des résultats de [CT20].

Date: 8 novembre 2026; MSC 2020 classification : 14G05, 14J26, 14C99. Keywords : Zero-cycles, rational points, rational surfaces, del Pezzo surfaces.

1. Une correction pour l'article [CT20]

En août 2023, Kai Huang (UST China) m'a signalé l'argument incorrect dans la démonstration des propositions 2.3 et 2.4 de [CT20]. Ces propositions sont utilisées dans la démonstration du théorème 2.9 de [CT20]. Dans ce paragraphe on donne des énoncés corrigés permettant de récupérer toutes les applications de ce théorème 2.9 dans [CT20].

1.1. **L'argument incorrect.** L'erreur se produit à la page 455, ligne 15 ("Ceci implique"). L'erreur est essentiellement la suivante. Soit L/k une extension finie de corps. Soit X/k une k-variété algébrique et $Y = R_{L/k}(X_L)$ la restriction des scalaires. Le fait que $X(L)$ soit Zariski dense dans X_L n'implique pas que $Y(k)$ (qui s'identifie à $X(L)$) est Zariski dense dans la k-variété Y.

D'après Mazur et Rubin [MR18], il existe de fait de nombreux exemples de courbes elliptiques E sur un corps de nombres k, et d'extensions cycliques L/k de degré premier telles que $E(k)$ est de rang 1 et l'inclusion naturelle $E(k) \subset E(L)$ est surjective. Dans un tel cas, $E(L)$ est Zariski dense dans E_L mais le k-plongement diagonal $f : E \to Y = R_{L/k}(E_L)$ satisfait $f(E(k)) = Y(k)$ et donc $Y(k)$ n'est pas Zariski dense dans Y.

1.2. **La correction.** Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe.

On dit dans [CT20] que la k-variété X satisfait la propriété de densité si l'on a :

(D) *Pour toute extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(L)$ est Zariski dense dans X_L.*

Disons ici que la k-variété X satisfait la propriété de densité ($D_{\rm bis}$) si l'on a

($D_{\rm bis}$) *Pour toute extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$, les k-points de la k-variété $Y = R_{L/k}(X_L)$ sont Zariski denses dans Y.*

Lemme. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété géométriquement intègre telle que pour toute extension finie L/k avec $X(L) \neq \emptyset$, la L-variété X_L est L-unirationnelle. Alors X satisfait la propriété ($D_{\rm bis}$).*

Démonstration. Une application L-rationnelle dominante de $\mathbf{P}^N_L$ vers X_L induit une application k-rationnelle dominante de $R_{L/k}(\mathbf{P}^N_L)$ vers Y, et la k-variété $R_{L/k}(\mathbf{P}^N_L)$ est k-rationnelle. Ceci implique que $Y(k)$ est Zariski dense dans Y. □

On dit dans [CT20] *que la k-variété X satisfait la propriété de R-densité si l'on a :*

(RD) Pour toute extension finie de corps L/k et tout point $P \in X(L)$, les points $Q \in X(L)$ qui sont R-équivalents à P sont Zariski denses dans X_L.

Disons ici que la k-variété X satisfait la propriété de R-densité (RD_{bis}) si l'on a

(RD_{bis}) Pour toute extension finie de corps L/k et tout k-point P de $Y = R_{L/k}(X_L)$, les k-points de la k-variété Y qui sont R-équivalents à P sont Zariski denses dans Y.

Proposition 2.1 bis. Soit k un corps de caractéristique zéro. Toute k-hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$, satisfait la propriété de R-densité (RD_{bis}).

Démonstration. Soient L/k fini, $Y = R_{L/k}(X_L)$ et $P \in Y(k) \simeq X(L)$. On procède comme dans la démonstration de la proposition 2.1 sur le corps L. On trouve un L-morphisme dominant $f : W \to X_L$ avec W ouvert d'un espace affine sur L et $P = f(Q)$ avec $Q \in W(L)$. On considère alors le k-morphisme dominant $R_{L/k}(W) \to Y = R_{L/k}(X_L)$. Les k-points de $R_{L/k}(W)$ sont Zariski denses, leur image dans $Y(k)$ est Zariski dense et consiste en des points tous R-équivalents à $P \in Y(k)$. □

Note : La proposition 2.1 bis n'est pas nécessaire dans les démonstrations des théorèmes principaux de [CT20]*. Le théorème 2.2 bis ci-après suffit.*

Théorème 2.2 bis. Soit k un corps fertile de caractéristique zéro. Si X est une k-variété projective et lisse géométriquement rationnellement connexe, alors elle satisfait la propriété de R-densité (RD_{bis}).

Démonstration. Si L/k est une extension finie de corps, la k-variété $Y = R_{L/k}(X_L)$, qui, géométriquement, est un produit d'exemplaires de X, est géométriquement rationnellement connexe. L'énoncé résulte alors d'un théorème de Kollár [CT20, Thm. 2.2] appliqué à Y. □

Proposition 2.3 bis. Dans l'énoncé de la proposition 2.3, remplacer l'hypothèse : "si X satisfait la propriété de R-densité (RD)" par "si X satisfait la propriété de R-densité (RD_{bis})".

Démonstration. Considérons le cas $t = 1$. Notons $s = [L : k]$. On utilise le k-morphisme

$$Y = R_{L/k}(X_L) \to Sym^s X.$$

Si deux k-points de Y sont R-équivalents, alors leurs images définissent des zéro-cycles rationnellement équivalents sur X. Le cas général s'obtient par produit. □

Proposition 2.4 bis. Dans l'énoncé de la proposition 2.4 de [CT20]*, remplacer l'hypothèse : "si X satisfait la propriété de densité (D)" par "si X satisfait la propriété de densité (D_{bis})".*

Théorème 2.9 bis. Dans l'énoncé du théorème 2.9 de [CT20]*, remplacer dans (a) la propriété de densité (D) par la propriété (D_{bis}), et dans (b) la propriété de R-densité (RD) par la propriété (RD_{bis}). Les conclusions sont*

inchangées. Les deux exemples donnés dans l'énoncé restent valables. Dans la démonstration, remplacer les propositions 2.3 et 2.4 de [CT20] *par les propositions 2.3 bis et 2.4 bis.*

Cet énoncé comprend en particulier l'énoncé ci-dessous, seul utilisé après le §2.2 de [CT20].

Théorème 1.1. *Soit F un corps fertile de caractéristique zéro. Soit X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_F$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_F$. Soient $P_1, \dots, P_t$ des points fermés de X de degrés respectifs s_i sur k, tels que la somme des s_i soit au plus égale à n.*

(a) Il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \dots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$.

(b) Si la variété X est géométriquement rationnellement connexe, alors il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \dots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$, chaque zéro-cycle z_i étant rationnellement équivalent à P_i sur X.

2. Relèvement en caractéristique zéro

Dans les principaux résultats des articles [C76], [CT20] et [V26], des restrictions sont apportées sur le corps de base : parfois il est supposé parfait, parfois il est supposé de caractéristique nulle. Pour certaines des propriétés concernées, ces restrictions ont été levées par Qixiao Ma [Ma21], voir aussi [AS26, §5]. On donne ici un énoncé général qui permet de lever les restrictions.

Lemme 2.1. *Soient k un corps et ℓ/k une extension finie de corps de degré d. Il existe des anneaux de valuation discrète complets A, de corps résiduel k, de corps des fractions K, et B, de corps résiduel ℓ, de corps des fractions L, avec K et L de caractéristique zéro, tels que B/A et L/K soient finis de degré d, et que l'extension de corps résiduels de B/A soit ℓ/k.*

Démonstration. Si k est de caractéristique zéro, on prend $A = k[[u]]$ et $B = \ell[[u]]$. Supposons k de caractéristique positive. Prenons pour A un anneau de Cohen. Si ℓ/k est une extension simple $\ell \simeq k[t]/f(t)$, avec $f(t) \in k[t]$ unitaire, on relève le polynôme $f(t)$ en un polynôme unitaire $\tilde{f}(t)$ dans $A[t]$ et on prend $B = A[t]/\tilde{f}(t)$. En général, on écrit l'extension ℓ/k comme une tour d'extensions simples. □

Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel. Soit $\mathbf{X}$ un A-schéma propre et plat. Soit $X = \mathbf{X}_K$, resp. $Y = \mathbf{X}_k$, la fibre générique, resp. spéciale.

On renvoie à [F84, §20.3] pour les faits suivants. On a une flèche de spécialisation

$$sp : Z_0(X) \to Z_0(Y)$$

du groupe des zéro-cycles sur X vers le groupe des zéro-cycles sur Y. Cet homomorphisme induit un homomorphisme sur les groupes de Chow de zéro-cycles

$$CH_0(X) \to CH_0(Y)$$

et respecte le degré [F84, Prop. 20.3 (a)].

Proposition 2.2. *Avec les notations ci-dessus, supposons l'anneau de valuation discrète A complet et $\mathbf{X}/A$ propre et lisse. Tout point fermé de Y de degré d sur k se relève en point fermé sur X de degré d sur K.*

Démonstration. Ceci résulte des hypothèses sur $\mathbf{X}/A$, du lemme de Hensel, et du lemme 2.1. □

Théorème 2.3. *Soit X/k une variété projective.*

Considérons les propriétés suivantes.

(a) Si l'indice $I(X)$, pgcd des degrés des points fermés sur X, est égal à 1, alors il existe un point rationnel sur X.

(b) Soit $N \geq 1$ un entier. Tout zéro-cycle sur X de degré égal ou supérieur à N est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Soient d et n des entiers naturels.

Si l'une des propriétés ci-dessus vaut pour toute hypersurface projective et lisse $X \subset \mathbf{P}^n_k$ de degré d lorsque k est de caractéristique nulle, alors elle vaut sans restriction sur la caractéristique de k.

Démonstration. Soit k un corps de caractéristique positive et A un anneau de Cohen de corps résiduel k, de corps des fractions K de caractéristique nulle. Comme $X \subset \mathbf{P}^n_k$ est une hypersurface projective lisse, elle se relève en une hypersurface projective lisse $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}^n_A$ sur A. D'après la proposition 2.2, tout point fermé de degré r sur X se relève en un point fermé de degré r sur $\mathbf{X}_K$. Les propriétés de l'application de spécialisation rappelées ci-dessus permettent de conclure. □

Remarque 2.4. Fixons un entier naturel n et des entiers naturels $d_1, \ldots, d_s$. Le théorème vaut plus généralement pour les intersections complètes lisses dans $\mathbf{P}^n_k$ de multidegré $\{d_1, \ldots, d_s\}$. L'argument vaut aussi pour les surfaces de del Pezzo lisses de degré 2 et de degré 1 sur tout corps. On relève simplement leurs équations dans des espaces projectifs à poids.

3. Compléments communiqués par C. Voisin

Pour les surfaces de del Pezzo possédant un point rationnel, Claire Voisin m'a fait remarquer en septembre 2025 (voir [V26, Thm. 1.10, Rmk. 1.11]) que les méthodes de [CT20] donnent des bornes meilleures que celles données dans [CT20].

Théorème 3.1. *Soit k un corps. Soit X/k une surface de del Pezzo de degré d.*

(1) Si $d = 3$, et $X(k) \neq \emptyset$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 3$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.
(amélioration de [CT20, Thm. 3.3 (f)] *qui donnait $r = 10$.)*

(2) Si $d = 2$ et $X(k) \neq \emptyset$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 6$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.
(amélioration de [CT20, Thm. 4.4 (d)]*, qui donnait $r = 43$.)*

(3) Si $d = 1$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 21$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.
(amélioration de [CT20, Thm. 5.1 (d)]*, qui donnait $r = 904$).*

Démonstration. Supposons d'abord k de caractéristique zéro. On utilise la proposition 2.11 (d) de [CT20]. Cela permet de supposer que le corps de base k est fertile. Soit $P \in X(k)$ (rappelons que pour $d = 1$, on a toujours $X(k) \neq \emptyset$). Soit $z = \sum_i n_i P_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, P_i points fermés de X, un zéro-cycle. Supposons $deg(z) = e \geq r$. Comme k est fertile et X projective, lisse, et géométriquement rationnellement connexe, le théorème 1.1 (b) appliqué à un grand multiple d'un faisceau très ample assure l'existence d'une courbe $\Gamma \subset X$ projective, lisse, géométriquement intègre qui contient le support d'un zéro-cycle z_1 rationnellement équivalent à z sur X et un point $Q \in X(k)$ rationnellement équivalent à P sur X. Soit $m > 0$ un entier tel que le degré $e + m$ de $z_1 + mQ$ est supérieur ou égal au genre de Γ. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe projective, lisse, géométriquement intègre Γ donne l'existence d'un zéro-cycle effectif z_2 sur Γ de degré $e + m$ rationnellement équivalent à $z_1 + mQ$ sur $\Gamma \subset X$ et donc rationnellement équivalent à $z + mP$ sur X.

D'après l'énoncé (a) des théorèmes 3.3, 4.4, 5.1 de [CT20], comme on a $e + m \geq r + m \geq r$, le zéro-cycle effectif z_2 est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle $z_3 + sP$, avec z_3 effectif de degré au plus r, et $s \geq 0$.

Ainsi z est rationnellement équivalent à $z_3 + (s - m)P$, avec z_3 effectif de degré au plus r et $s - m = deg(z) - deg(z_3) \geq 0$ (car $deg(z) \geq r$ et $0 \leq deg(z_3) \leq r$).

Ceci établit le théorème pour k de caractéristique zéro. Le résultat sur un corps quelconque résulte alors du théorème 2.3 et de la remarque 2.4. □

Remarque 3.2. 1) Une fois que l'on a établi le théorème 3.1, dans le cas où $X(k)$ est non vide, les autres énoncés des théorèmes 3.3, 4.4 et 5.1 de [CT20] suivent.

2) Au moins dans le cas où le corps k est fertile de caractéristique zéro, la démonstration établit ceci. Soit $r = 3$, resp. $r = 6$, resp. $r = 21$, dans le cas où X est une surface de del Pezzo de degré $d = 3$, resp. $d = 2$, resp. $d = 1$. Fixons un point $P \in X(k)$. Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à r est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle $z' + nP$ avec $n \geq 0$ et z' effectif de degré au plus r. En utilisant un anneau de Cohen de

corps résiduel k, dont le corps des fractions est fertile et de caractéristique zéro, puis le relèvement et la spécialisation comme au §2, on conclut que le résultat vaut sur tout corps k.

3) Des résultats d'effectivité sans hypothèse d'existence d'un point rationnel sont obtenus par C. Voisin dans son article [V26], par une méthode radicalement nouvelle. Plus précisément, pour les zéro-cycles de degré r sur une surface de del Pezzo de degré d, elle établit l'énoncé d'effectivité pour $d = 3$ avec $r \geq 18$, pour $d = 2$ avec $r \geq 13$ et pour $d = 1$ avec $r \geq 15$.

4. Sur le théorème [CT20, 7.1]

À la page 484, ligne 6, la surface W n'est pas une surface de del Pezzo de degré 1. Comme établi à la page précédente, elle est l'éclatée, en un point rationnel, d'une surface W' de del Pezzo de degré 1. La preuve montre que $W(k)$ n'est pas Zariski dense dans W. Il en résulte que $W'(k)$ n'est pas Zariski dense dans W'. Ainsi l'énoncé du théorème [CT20, 7.1] reste correct ; seule la phrase identifiant W elle-même à une surface de del Pezzo de degré 1 doit être corrigée.

Le théorème [CT20, 7.1] visait à construire des surfaces de del Pezzo de degré 1 dont les points rationnels ne sont pas Zariski denses. Il est désormais de peu d'utilité. En effet, l'hypothèse de ce théorème n'est jamais satisfaite ([V26, Thm. 1.1, Cor. 1.2] [KM17, Prop. 37]).

5. Surfaces de del Pezzo de degré au moins 5

Cette section répond à la remarque 1.9 de l'article [V25] de Claire Voisin.

Dans cette section on note k un corps parfait. Pour X une k-variété projective et lisse, on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle. On s'intéresse à l'application degré :

$$deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$$

dont on note $A_0(X)$ le noyau. On note $I(X) > 0$ l'indice de X, c'est-à-dire le générateur positif de l'image de l'application degré.

Le degré d'une surface de del Pezzo X est $d(X) = (\omega_X.\omega_X)$. En particulier, l'indice $I(X)$ divise le degré d. Une surface de del Pezzo de degré $d = d(X) \geq 3$ est plongée dans $\mathbf{P}^d$ par le faisceau anticanonique. En particulier il existe un zéro-cycle effectif de degré $d(X)$. Les propriétés des surfaces de del Pezzo de grand degré $d \geq 5$, c'est-à-dire $5 \leq d \leq 9$, sur un corps quelconque sont bien mieux comprises que celles des autres surfaces géométriquement rationnelles [P17, §9.4]. Ainsi, si une surface de del Pezzo de degré $d \geq 5$ possède un point rationnel, alors elle est k-birationnelle au plan $\mathbf{P}^2_k$. Ceci implique que l'application $deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme : deux zéro-cycles de même degré sont rationnellement équivalents.

Les surfaces de del Pezzo de degré $d = 5$ et $d = 7$ ont un point rationnel.

Les surfaces de del Pezzo de degré 9 sont les surfaces de Severi-Brauer, i.e. les formes tordues de $\mathbf{P}^2_k$.

Toute surface de del Pezzo X de degré 6 possède un ouvert qui est un espace principal homogène sous un k-tore. Il existe une extension séparable K/k de degré 1 ou 2 telle que X_K soit l'éclaté d'une K-surface de Severi-Brauer, et il existe une extension séparable L/k de degré 1 ou 3 telle que X_L soit l'éclaté d'une L-surface de del Pezzo de degré 8 tordue d'une quadrique.

Les surfaces de del Pezzo de degré 8 sont les éclatés du plan en un point k-rationnel et les formes tordues des quadriques de $\mathbf{P}^3_k$.

Proposition 5.1. *Soit X/k une surface de del Pezzo de degré $d \geq 5$ sur un corps parfait. L'application degré*

$$deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$$

est injective.

Démonstration. On peut supposer $X(k) = \emptyset$ et $d = 6, 9$ ou $d = 8$ et X forme tordue d'une surface quadrique. Le noyau de $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ pour X variété projective homogène d'un groupe linéaire connexe a été étudié par de nombreux auteurs [CM06]. Pour les espaces homogènes projectifs de dimension 2, le noyau $A_0(X)$ est nul (Panin, voir [CM06, Prop. 4.4]). Cela règle le cas des surfaces de del Pezzo de degré 9 et de degré 8.

En degré 6, la configuration des courbes exceptionnelles assure l'existence d'une extension K/k de degré divisant 3 et d'une extension L/k de degré divisant 2 telles que X_K, resp X_L, soit birationnelle sur l'extension K, resp. L, à une surface de del Pezzo de degré 8, resp. 9. Ainsi $A_0(X_K) = 0$ et $A_0(X_L) = 0$. Un argument de norme donne alors $A_0(X) = 0$. □

Proposition 5.2. *Soit X/k une surface de del Pezzo de degré $d \geq 5$ sur un corps parfait.*

(a) Si $I(X) = 1$ alors X possède un point rationnel.

(b) L'indice $I(X)$ coïncide avec le plus petit degré d'un point fermé sur X.

Démonstration. Pour établir (b), il suffit de considérer les cas $d \in \{6, 8, 9\}$ avec $X(k) = \emptyset$.

Le cas $d = 9$. Une telle surface est une surface de Severi-Brauer, elle correspond à une algèbre simple centrale de degré 3, qui est déployée par une extension cubique de k. Il existe donc un point sur une extension de degré 3. L'indice est donc 1 ou 3. La classe de l'algèbre simple centrale dans le groupe de Brauer de k est annulée par $I(X)$. Ceci établit (a). Sous l'hypothèse $X(k) = \emptyset$ on a donc $I(X) = 3$ et on établit (b).

Le cas $d = 6$.

Une surface de del Pezzo X/k de degré 6 contient un ouvert $U \subset X$ qui est un espace principal sous un k-tore T [Man86, Thm. 30.3.1]. Si l'on a $I(X) = 1$, un lemme de déplacement assure que U possède un zéro-cycle de degré 1. La classe de U dans $H^1(k, T)$ est donc nulle, c'est-à-dire que U a un k-point, donc aussi X. Ceci établit (a).

Montrons (b). L'indice divise 6. Il y a un zéro-cycle effectif de degré 6. Si l'indice est 6, ceci établit (b).

On considère l'hexagone de courbes exceptionnelles de X sur la clôture séparable. Il existe une extension triviale ou quadratique K/k et une K-contraction birationnelle de X_K sur une surface de Severi-Brauer Y/K, donc l'indice $I(X_K)$ divise 3.

Si $I(X) = 2$, alors l'indice de X_K/K divise 2 et 3, donc $I(X_K) = 1$, donc $I(Y) = 1$, donc $Y \simeq \mathbf{P}^2_K$, et donc X possède un point fermé de degré 2.

Supposons que l'indice de X est 3. Il existe une extension triviale ou cubique L/k et une L-contraction $X_L \to S$, où S/L est une surface de del Pezzo de degré 8. Son indice $I(X_L)$ divise 8 et 3, il est donc égal à 1. On sait dans ce cas que S possède un point L-rationnel. Donc X possède un point fermé de degré 3.

Le cas $d = 8$. Soit X une surface de del Pezzo de degré 8, forme tordue d'une quadrique. Si l'on a $I(X) = 1$, l'application Br $(k) \to$ Br (X) est injective. Ceci implique que la classe du faisceau anticanonique dans $\mathrm{Pic}(X)$ s'écrit comme le double de la classe d'un faisceau inversible L sur X. Les sections de ce dernier identifient X à une quadrique dans $\mathbf{P}^3_k$. Si une quadrique possède un point dans une extension de degré impair, elle possède un point rationnel (théorème de Springer). Ceci établit (a).

En général X est soit le produit de deux coniques $C_1 \times_k C_2$ soit s'écrit comme restriction à la Weil $X = R_{K/k}(C)$, où C/K est une conique et K/k une extension quadratique de corps [P17, Prop. 9.4.12]. Ainsi X possède un point dans une extension de k de degré divisant 4. L'indice $I(X)$ divise 4.

Trepalin [T23, Thm. 1.7] a montré que l'on a $I(X) = 4$ si et seulement s'il n'y a pas de point de degré 2 sur X. □

La concaténation des propositions 5.1 et 5.2 donne :

Théorème 5.3. *Soit X une surface de del Pezzo de degré $d \geq 5$ sur un corps parfait. Le groupe de Chow $CH_0(X)$ est abélien libre de rang 1, engendré par tout point fermé de X de degré minimal.*

DÉCLARATION IA

Une IA a été consultée pour la relecture finale. Elle a demandé d'ajouter des références à la littérature en certains points du paragraphe 5.

Références

[AS26] V. Alexeev, S. Schreieder, Two proofs of the Cassels–Swinnerton-Dyer conjecture for cubic surfaces, Prépublication (2026).

[CM06] V. Chernousov, A. Merkurjev, Connectedness of classes of fields and zero-cycles on projective homogeneous varieties, Compos. Math. **142** (2006), no. 6, 1522–1548.

[CT20] J.-L. Colliot-Thélène, Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray), L'Enseignement mathématique (2) **66** (2020) 447–487.

[C76] D. F. Coray, Algebraic points on cubic hypersurfaces, Acta Arith. **30** (1976) 277–296.

[F84] W. Fulton, Intersection Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer Verlag 1984.

[KM17] J. Kollár, M. Mella, Quadratic families of elliptic curves and unirationality of degree 1 conic bundles, Amer. J. Math. **139** (2017) no. 4, 915–936.

[Ma21] Qixiao Ma, Closed points on cubic hypersurfaces, Michigan Math. J. **70** (2021), no. 4, 857–868.

[Man86] Yu. I. Manin, Cubic Forms, Second edition, North-Holland Mathematical Library, vol. **4** (1986).

[MR18] B. Mazur and K. Rubin, Diophantine stability. With an appendix by Michael Larsen. Amer. J. Math. **140** (2018), no. 3, 571–616.

[P17] B. Poonen, Rational points on varieties, Graduate Studies in Mathematics **186**, Amer. Math. Soc. (2017).

[RV22] C. Rivera, B. Viray, Persistence of the Brauer–Manin obstruction on cubic surfaces, Math. Res. Lett. **29** (2022), no. 6, 1881–1889.

[T23] A. Trepalin, Birational classification of pointless del Pezzo surfaces of degree 8. Eur. J. Math. **9** (2023), no. 1, [Paper No. 2], 21 pp.

[V26] C. Voisin, Rank 2 vector bundles and degrees of points of del Pezzo surfaces, J. reine angew. Math. **836** (2026) 303–327.

[V25] C. Voisin, Unboundedness of zero-cycles on higher dimensional Fano manifolds, Prépublication (2025).

Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr