Jean-Louis Colliot-Thélène
CNRS, Université Paris-Sud

Fibres spéciales des variétés rationnellement connexes

Notes pour des exposés au CIME, Cetraro, Septembre 2007
(version 1er décembre 2007)

1. Coniques

Soit k un corps, $f(x,y,z)$ une forme homogène de degré 2 en trois variables. Soit $X \subset \mathbf{P}^2_k$ la courbe définie par $f = 0$ dans le plan projectif.
Possibilités :

- Conique lisse; si $X(k) \neq \emptyset$ alors $X \simeq \mathbf{P}^1_k$
- Réunion de deux droites distinctes définies sur k
- Réunion de deux droites conjuguées, se coupant en un unique k-point.
- Droite double

Il n'existe pas forcément un k-point sur X, mais :

(A0) Il existe une k-variété *géométriquement intègre* $Y \subset X$.

Corollaire

Si $k = \mathbf{F}$ est un corps fini de cardinal q, alors

$$X(\mathbf{F}) \neq \emptyset$$

Plus précisément l'ordre de $X(\mathbf{F})$ est 1 ou $1+q$ ou $1+2q$.

$$\text{card } X(\mathbf{F}) \equiv 1 \mod q$$

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F parfait de caractéristique $\neq 2$. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre, propre et plat, de fibre générique X/K une conique lisse. Soit $\mathcal{X}_F/F$ la fibre spéciale. Alors :

(A1) Il existe une F-variété géométriquement intègre $Y \subset \mathcal{X}_F$.

Supposons $\mathcal{X}$ régulier. La fibre spéciale $\mathcal{X}_F$ est un diviseur sur $\mathcal{X}$ qui s'écrit $\sum_i n_i D_i$ avec chaque D_i intègre et chaque $n_i > 0$ entier.
(B1) Il existe i avec $n_i = 1$.

Supposons $\mathcal{X}$ régulier et la fibre spéciale réduite à croisements normaux stricts (en particulier chaque D_i lisse sur F).
(A2) Il existe i avec D_i/F géométriquement intègre.
(A3) Il existe i avec D_i/F une conique lisse sur F.

Une façon d'établir (A2) est de passer à la clôture algébrique de F et de faire agir le groupe de Galois sur la fibre spéciale, dont le graphe des composantes est un arbre, car $\mathcal{X}_K$ est une courbe de genre zéro. Sur un arbre fini d'ordre impair, resp. pair, le groupe des automorphismes a un point fixe, resp. une arête fixe. On voit donc ici que soit il y a un point F-rationnel dans $\mathcal{X}_F$ soit il y a une composante géométriquement intègre. Si on part d'un modèle à croisements normaux stricts, alors il y a toujours une composante géométriquement intègre.

On n'a pas en général simultanément (B) et (A2).

De (A3) on tire que si F est un corps fini, alors $\mathcal{X}_0(F) \neq \emptyset$.

Si A est un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel algébriquement clos, alors $X(K) \neq \emptyset$.

Via le lemme de Hensel, ceci est essentiellement équivalent à l'énoncé (B).

Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps k algébriquement clos. Toute conique sur K possède un K-point (Max Noether).

Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Pour toute conique lisse X sur K, l'approximation faible vaut : pour tout ensemble fini I de places v de K, l'application diagonale

$$X(K) \to \prod_{v \in I} X(K_v)$$

a une image dense. Ici K_v est le complété de K en v et $X(K_v)$ est muni de la topologie induite par la topologie de la valuation sur K_v.

2. Formes en $n+1$ variables de degré $d < n+1$

Soit f une forme homogène en $n+1$ variables de degré d à coefficients dans un corps k. Elle définit une hypersurface $X \subset \mathbf{P}^n_k$.

Conjecture (Ax, 1968)
Si $d < n+1$ il existe une k-variété géométriquement intègre $Y \subset X$.

Cas connus

Théorème (Chevalley-Warning, 1936)
Si $d < n+1$ et si $k = \mathbf{F}$ est un corps fini de caractéristique p, alors $\text{card}\, X(\mathbf{F}) \equiv 1 \mod p$. *En particulier $X(\mathbf{F}) \neq \emptyset$.*

En fait (Ax, Katz) $\text{card}\, X(\mathbf{F}) \equiv 1 \mod q$, où q est l'ordre de $\mathbf{F}$.

Cas où la conjecture est établie

- k parfait contenant un corps algébriquement clos : Denef, Jarden et Lewis, 1981.
- k de caractéristique zéro : Kollár (2006) (Voir plus loin).

Conjecture
Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F parfait. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre, propre et plat, de fibre générique X/K une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n_K$ avec $d \leq n$. Soit $\mathcal{X}_F/F$ la fibre spéciale. Alors :

(A1) Il existe une F-variété géométriquement intègre $Y \subset \mathcal{X}_F$.

Supposons $\mathcal{X}$ régulier. La fibre spéciale $\mathcal{X}_F$ est un diviseur sur $\mathcal{X}$ qui s'écrit $\sum_i n_i D_i$ avec chaque D_i intègre et chaque $n_i > 0$ entier.
(B) Il existe i avec $n_i = 1$.

Supposons $\mathcal{X}$ régulier et la fibre spéciale réduite à croisements normaux stricts (en particulier chaque D_i lisse sur F).
(A2) Il existe i avec D_i/F géométriquement intègre.

L'énoncé (A) est connu si la caractéristique de F est zéro (Kollár 2006). Si F est fini, des énoncés voisins ont été établis en égale caractéristique par Fakhruddin et Rajan et en inégale caractéristique par H. Esnault. (Voir plus loin.)

L'énoncé (B) est connu. Via le lemme de Hensel, c'est essentiellement une reformulation du :

Théorème (Lang)
Si A est un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel algébriquement clos, alors $X(K) \neq \emptyset$.

A noter que le théorème de Lang vaut aussi en inégale caractéristique.

En égale caractéristique, le théorème est une conséquence du

Théorème (Tsen, 1934)
Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps k algébriquement clos. Toute forme homogène sur K en $n+1$ variables de degré $d < n+1$ possède un zéro non trivial.

Conjecture
Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_K$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$. L'approximation faible vaut : pour tout ensemble fini I de places v de K, l'application diagonale

$$X(K) \to \prod_{v \in I} X(K_v)$$

a une image dense. Ici K_v est le complété de K en v et $X(K_v)$ est muni de la topologie induite par la topologie de la valuation sur K_v.

Dans cette généralité, cette conjecture est ouverte déjà pour la surface cubique

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda t^3 = 0$$

sur le corps $K = \mathbf{C}(\lambda)$. (Voir plus loin.)

3. Au-delà des hypersurfaces de degré d en $n+1 > d$ variables

Variétés de Fano, Variétés rationnellement connexes

Nous avons vu deux grands types de résultats/conjectures sur les spécialisations de variétés projectives et lisses considérées ci-dessus.

Type (A) : Existence d'une sous-variété géométriquement intègre dans la fibre spéciale. Chevalley-Warning. Conjecture d'Ax.

Type (B) : existence d'une composante de multiplicité 1 dans la fibre spéciale. Théorème de Lang. Théorème de Tsen.

Pour quelles variétés peut-on espérer des résultats analogues ? Peut-on utiliser la géométrie de ces variétés pour établir les conjectures ?

Une généralisation immédiate concerne les variétés définies dans $\mathbf{P}^n_K$ par un système de formes homogènes $\{f_i\}_{i \in I}$ de degrés respectifs d_i lorsque $\sum_i d_i \leq n$. Pour ces variétés, la plupart des résultats ci-dessus sont établis par les mêmes méthodes que pour une hypersurface.

Lorsqu'un tel système définit une intersection complète lisse, la condition sur les degrés se traduit ainsi : le faisceau anticanonique $-K_X$ est (très) ample.

Une K-variété projective lisse (géométriquement connexe) est dite **variété de Fano** lorsque son faisceau anticanonique est ample. En dimension 2, on parle de **surface de del Pezzo**.

Les travaux des quinze dernières années ont montré qu'une classe très naturelle de variétés (projectives et lisses) est la classe des **variétés rationnellement connexes**.

Sur un corps k de caractéristique zéro, elles admettent de nombreuses définitions équivalentes.

En voici une.

Une variété projective, lisse, géométriquement connexe X sur un corps k est dite (géométriquement) **rationnellement connexe** *(ou RC) s'il existe un corps algébriquement clos Ω non dénombrable contenant k tel qu'une paire générale de points de $X(\Omega)$ soit liée par une courbe rationnelle.*

En voici une autre.

Une variété projective, lisse, géométriquement connexe X sur un corps k est dite (géométriquement) **rationnellement connexe par chaînes** *(ou RCC) s'il existe un corps algébriquement clos Ω non dénombrable contenant k tel qu'une paire générale de points de $X(\Omega)$ soit liée par une chaîne de courbes rationnelles.*

On montre qu'alors sur tout corps algébriquement clos contenant k toute paire de points est liée par une chaîne de courbes rationnelles.

En caractéristique quelconque, la bonne notion est celle de variété **séparablement rationnellement connexe**, en abrégé SRC.

La définition la plus courte :

Une k-variété projective et lisse sur un corps k est SRC si sur un corps algébriquement clos contenant k, il existe un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$ tel que l'image réciproque du fibré tangent T_X soit une somme de fibrés $O_{\mathbf{P}^1}(n_i)$ avec tous les $n_i > 0$.

SRC implique RCC.

Interlude sur la R-équivalence (Manin)

Soient k un corps et X une k-variété. Deux k-points de X sont élémentairement R-liés s'il existe un k-morphisme $U \to X$ d'un ouvert U de $\mathbf{P}^1_k$ tel que les deux points soient dans l'image de $U(k)$. La relation d'équivalence sur $X(k)$ engendrée par cette relation est appelée la R-équivalence.

Elle a été beaucoup étudiée lorsque X est un groupe algébrique linéaire.

Si k est algébriquement clos et X est RCC alors $X(k)/R = 1$.

Si k est algébriquement clos non dénombrable, $X(k)/R = 1$ entraîne X RCC.

Exemples de variétés RCC

Toute variété géométriquement unirationnelle, i.e. dominée par un espace projectif après extension du corps de base, est rationnellement connexe.

Exemple : toute compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe.

Une variété fibrée en quadriques (de dimension au moins 1) au-dessus d'une variété rationnellement connexe est rationnellement connexe par chaînes (via le théorème de Tsen).

Théorème (Kollár-Miyaoka-Mori; Campana).

Une variété de Fano est rationnellement connexe par chaînes.

Interlude sur les groupes de Chow

Soit X/k une k-variété algébrique. On note $Z_0(X)$ le groupe abélien libre sur les points fermés de X. C'est le groupe des zéro-cycles de X. Le groupe de Chow de degré zéro, noté $CH_0(X)$, est le quotient du groupe $Z_0(X)$ par le sous-groupe engendré par les zéro-cycles de la forme $\pi_*(\mathrm{div}_C(g))$, où $\pi : C \to X$ est un k-morphisme propre d'une k-courbe normale intègre C et g est une fonction rationnelle sur C.

Si X/k est propre, l'application linéaire degré $Z_0(X) \to \mathbf{Z}$ envoyant un point fermé P sur son degré $[k(P) : k]$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle ci-dessus définie. On note alors $A_0(X)$ le noyau de l'application deg : $CH_0(X) \to \mathbf{Z}$.

Si k est algébriquement clos, et si X est une variété RCC, alors $A_0(X) = 0$.

Il existe des variétés non RCC qui satisfont $A_0(X) = 0$ (exemple : surfaces d'Enriques).

Si k est quelconque et X/k est RCC, alors $A_0(X)$ est un groupe de torsion, annulé par un entier $N = N(X) > 0$.

4. Fibres spéciales des familles de variétés rationnellement connexes

Conjecture (A)

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F parfait. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre, propre et plat. Si $\mathcal{X}$ est régulier, la fibre spéciale $\mathcal{X}_F$ est un diviseur sur $\mathcal{X}$ qui s'écrit $\sum_i n_i D_i$ avec chaque D_i intègre et chaque $n_i > 0$ entier.

Supposons la fibre générique $X = \mathcal{X}_K$ RCC. Alors

(A1a) Il existe une F-variété géométriquement intègre $Y \subset \mathcal{X}_F$.

(A1b) (Kollár) Il existe une F-variété géométriquement intègre RCC Y et un f-morphisme $Y \to \mathcal{X}_F$.

Supposons de plus $\mathcal{X}$ régulier et la fibre spéciale réduite $\sum_i D_i$ est à croisements normaux stricts (en particulier chaque D_i lisse sur F). Alors

(A2a) Il existe i avec D_i/F géométriquement intègre.

(A2b) (Kollár) Il existe i avec D_i/F une F-variété RCC.

Les propriétés (A1a) et (A2a) sont invariantes birationnellement, en ce sens que si les A-schémas réguliers, intègres, propres et plats X_1/A et X_2/A ont des fibres génériques K-birationnelles, alors la propriété donnée vaut pour X_1 si et seulement si elle vaut pour X_2.

Conjecture (B)

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F parfait. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre, régulier, propre et plat, de fibre générique X/K une variété RCC. Soit $\mathcal{X}_F = \sum_i n_i D_i$ la décomposition de la fibre spéciale en diviseurs intègres. Alors il existe i avec $n_i = 1$.

La propriété (B) est invariante birationnellement, en ce sens que si si les A-schémas réguliers, intègres, propres et plats X_1/A et X_2/A ont des fibres génériques K-birationnelles, alors la propriété (B) vaut pour X_1 si et seulement si elle vaut pour X_2.

La propriété (B) peut encore s'énoncer ainsi : le morphisme $X \to \mathrm{Spec} A$ est localement scindé pour la topologie étale sur $\mathrm{Spec} A$.

Elle peut encore s'énoncer ainsi : si l'on suppose de plus A hensélien de corps résiduel algébriquement clos, alors $X(A) = X(K) \neq \emptyset$.

5. Le statut de la conjecture A

Conjectures (A1a) et (A2a) (sous-variété géométriquement intègre)

Pour F de caractéristique zéro et X/K une variété de Fano, Kollár (2006) a établi ces conjectures.

Pour F de caractéristique zéro contenant un corps algébriquement clos et X/K RCC, Starr (2006) a établi ces conjectures.

Il établit plus généralement le cas où A est d'égale caractéristique, le corps résiduel F est parfait et contient un corps algébriquement clos, et la fibre générique est SRC. Ceci généralise le résultat de Denef, Jarden et Lewis.

Conjectures (A1b) et (A2b) (sous-variété géométriquement intègre RCC)

Si F est de caractéristique nulle et contient un corps algébriquement clos, et si X est rationnellement connexe, alors il existe une sous-F-variété géométriquement intègre et F-rationnellement connexe dans la fibre spéciale. (de Jong)

Supposons F de caractéristique nulle, X_K rationnellement connexe. Alors (Hogadi et Yu, avril 2007)

(i) La fibre spéciale Y/F contient une sous F-variété géométriquement intègre rationnellement connexe.

(ii) Si X_K/K est dimension 2, la conjecture (A2b) vaut : il existe une composante de Y qui est rationnellement connexe.

Remarque (Wittenberg)

Au moins dans le cas équicaractéristique de car. zéro, on peut voir que si X_K est une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe sur K alors la fibre spéciale contient une F-variété géométriquement intègre rationnellement connexe.

La démonstration utilise la généralisation suivante du théorème de Puiseux : le groupe de Galois absolu de la réunion K' des $k((t^{1/n}))$ est le même que celui de k (thèse de M. Florence).

Ainsi par exemple si k est de dimension cohomologique 1 il en est de même de K'.

En ce qui concerne les conjectures (A1b) et (A2b), rappelons :

Une spécialisation (éventuellement singulière, éventuellement réductible) d'une variété projective et lisse RCC est RCC.

(Une générisation (lisse) d'une variété projective lisse SRC est SRC.)

Mais on peut construire (Kollár) une variété union transverse de deux variétés lisses qui soit RCC sans qu'aucune des deux variétés ne soit rationnellement connexe.

On peut se demander ce que deviennent ces théorèmes quand on est en inégale caractéristique.

Un analogue des théorèmes du type Kollár, Starr, Hogadi-Yu est fourni par des théorèmes d'H. Esnault. Avant de donner les résultats sur les dégénérescences de variétés, commençons par donner des résultats d'existence de points de variétés lisses sur un corps fini.

Théorème (Weil, 1954) *Toute surface projective lisse géométriquement rationnelle sur un corps fini possède un point rationnel.*

Théorème (formule de Woods Hole 1964, de Lefschetz-Verdier, voir Grothendieck/Illusie SGA 5 III, Katz SGA7 XXII) *Soit $X/\mathbf{F}_q$ propre. Si $H^0(X, O_X) = \mathbf{F}_q$ et tous les $H^r(X, O_X) = 0$ pour $r \geq 1$, alors le nombre de points rationnels est congru à 1 modulo p.*

Ne couvre a priori pas les variétés de Fano.

Théorème (Esnault 2003) *Pour $X/\mathbf{F}_q$ lisse, projective, géométriquement intègre, et Ω un corps algébriquement clos contenant le corps $\mathbf{F}_q(X)$, si l'on a $A_0(X_\Omega) = 0$ alors le nombre de points rationnels de X est congru à 1 modulo q.*

Cela couvre le cas des variétés de Fano, qui sont rationnellement connexes par chaînes. Cela couvre aussi le cas des surfaces d'Enriques.

L'hypothèse assure que la cohomologie l-adique de X satsifait $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) = N^1 H^i_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$ pour tout $i \geq 1$ (toute classe de cohomologie s'annule sur un ouvert de Zariski). Sous cette condition, H. Esnault utilise des résultats de Deligne pour établir la congruence annoncée.

Théorème (N. Fakhruddin and C.S. Rajan, 2004)

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre dominant de variétés lisses et géométriquement irréductibles sur un corps fini. Soit Z la fibre générique, supposée géométriquement intègre. Si l'on a $A_0(Z_{\overline{k(X)}}) = 0$, alors pour tout point $y \in Y(\mathbf{F}_q)$, le cardinal de $X_y(\mathbf{F}_q)$ est congru à 1 modulo q. Si l'hypothèse X lisse est omise mais la fibre générique Z est lisse, on a $X_y(\mathbf{F}_q) \neq \emptyset$ pour tout $y \in Y(\mathbf{F}_q)$.

Donc sur toute dégénérescence de variété RCC (lisse) il y a un $\mathbf{F}_q$-point. Ceci vaut aussi sur une dégénérescence d'une surface d'Enriques.

Théorème (Esnault 2006, 2007)

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F fini de cardinal q. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre propre et plat. Supposons la fibre générique géométriquement intègre, lisse et à cohomologie l-adique de coniveau 1. Soit Y/F la fibre spéciale. Alors

(i) $Y(F) \neq \emptyset$.

(ii) Si X est régulier, alors $\mathrm{card}(Y(F)) \equiv 1 \bmod q$.

L'hypothèse sur la cohomologie est satisfaite si $A_0((X_K)_\Omega) = 0$, où Ω est un corps algébriquement clos contenant $K(X)$, en particulier pour les variétés RCC mais aussi pour les surfaces d'Enriques.

En particulier il y a un point rationnel sur la fibre spéciale. En particulier si toutes les composantes de la fibre spéciale sont lisses, alors l'une d'entre elles est géométriquement intègre sur $\mathbf{F}_q$.

6. Le statut de la conjecture B

Rappelons l'énoncé de la conjecture. Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F parfait. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma intègre, propre et plat, de fibre générique X/K une variété RCC. Supposons $\mathcal{X}$ régulier. Soit $\mathcal{X}_F = \sum_i n_i D_i$ la décomposition de la fibre spéciale en diviseurs intègres. Alors il existe i avec $n_i = 1$.

Cette conjecture est connue si $A = F[[t]]$ est équicaractéristique de car. zéro. Lorsque A est équicaractéristique de caractéristique positive, elle est satisfaite si l'on suppose de plus X_K SRC. C'est une conséquence du théorème fondamental suivant.

Théorème (Graber-Harris-Starr 2003; de Jong-Starr 2003 en car. positive)
Sur le corps $K = F(C)$ des fonctions d'une courbe C sur un corps F-algébriquement clos, toute K-variété projective, lisse, séparablement rationnellement connexe possède un K-point.

Ceci représente une vaste généralisation du théorème de Tsen.

En caractéristique zéro, ceci implique que l'espace total d'une fibration dont la base et les fibres générales sont des variétés RCC est lui-même RCC.

Les énoncés précédents sont en défaut pour les surfaces d'Enriques. G. Lafon a donné un exemple explicite de surface d'Enriques sur $\mathbf{C}(t)$ sans point rationnel sur $\mathbf{C}((t))$. Un modèle affine, avec variables x, y, u, z est défini par le système

$$x^2 - tu^2 + t = (t^2u^2 - t)y^2$$

$$x^2 - 2tu^2 + (1/t) = t(t^2u^2 - t)z^2.$$

La conjecture B ne s'étend donc pas aux variétés à groupe de Chow géométrique trivial. Selon J. Starr, la conjecture A ne vaut pas davantage pour les variétés à groupe de Chow géométrique trivial, comme le montre un exemple à base de surfaces d'Enriques.

La conjecture B en inégale caractéristique est largement ouverte.

Toute variété rationnellement connexe sur le corps $\mathbf{Q}_p^{nr}$ possède-t-elle un point rationnel ?

Le seul résultat connu est le théorème de Lang, que le corps $\mathbf{Q}_p^{nr}$ est un corps C_1. Autrement dit, la réponse est positive pour les hypersurfaces de Fano dans l'espace projectif.

On a un théorème "réciproque" :

Théorème (Graber-Harris-Mazur-Starr)
Soit $k = \mathbf{C}$. Soit S une variété lisse sur C de dimension au moins 2. Soit $X \to S$ un morphisme projectif et lisse à fibre générique géométriquement intègre. Si la restriction de $X \to S$ à toute coube $C \subset S$ admet une section, alors il existe une $\mathbf{C}(S)$-variété Z géométriquement intègre et RC et un $\mathbf{C}(S)$-morphisme de Z dans la fibre générique de $X \to S$.

Les variétés rationnellement connexes sont donc en quelque sorte caractérisées par le fait d'avoir automatiquement un point sur le corps des fonctions d'une courbe sur les complexes.

7. Approximation faible pour les variétés rationnellement connexes

Conjecture
Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Pour toute variété rationnellement connexe X sur K, l'approximation faible vaut : pour tout ensemble fini I de places v de K, l'application diagonale

$$X(K) \to \prod_{v \in I} X(K_v)$$

a une image dense. Ici K_v est le complété de K en v et $X(K_v)$ est muni de la topologie induite par la topologie de la valuation sur K_v.

Des arguments élémentaires (CT/Gille) permettent d'établir l'approximation faible en tout ensemble fini de places pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes linéaires connexes, puis pour les variétés obtenues par fibrations en de telles variétés. On traite ainsi les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n$ pour $n \geq 4$.

Théorème (Hassett-Tschinkel)
Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X/K une K-variété projective et lisse, rationnellement connexe. Si I est un ensemble fini de places de K de bonne réduction pour X/K, alors l'approximation faible vaut pour X en ces places : l'application diagonale $X(K) \to \prod_{v \in I} X(K_v)$ a une image dense.

Ceci généralise un résultat de Kollár, Miyaoka et Mori (cas on l'on demande une réduction fixée, sans obtenir d'approximations aux jets d'ordre supérieur).

Le cas particulier des surfaces cubiques lisses avait été traité par Madore.

Hassett et Tschinkel ont aussi des résultats d'approximation en des places de mauvaise, mais pas trop mauvaise réduction.

Comme indiqué plus haut, le cas de la surface cubique $x^3 + y^3 + z^3 + \lambda t^3 = 0$ sur le corps $K = \mathbf{C}(\lambda)$ est ouvert : problème de l'approximation en $\lambda = 0$.

Théorème (Hassett-Tschinkel)
Soit K un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Il existe une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ satisfaisant la propriété suivante. Pour toute hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n$ avec $n \geq f(d)$, l'approximation faible vaut en tout ensemble fini de places de K.

Pour $d = 3$, $f(3) = 6$ convient.

Un travail en cours sur les variétés rationnellement simplement connexes (de Jong-Starr, appendice de Hassett) donne $f(d) \leq 2d^2 - d - 1$ et, si l'hypersurface est "générale", $f(d) \leq d^2$.

8. R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes

Soit k un corps non algébriquement clos et X une k-variété (séparablement) rationnellement connexe.

Que sait-on sur l'ensemble $X(k)/R$?

Théorème (Kollár)
Soit k un corps local usuel (localement compact) et soit X une k-variété projective et lisse séparablement rationnellement connexe.
Alors la R-équivalence sur $X(k)$ est une relation ouverte. L'ensemble $X(k)/R$ est fini.

Dans le cas $k = \mathbf{R}$ les classes de R-équivalence coïncident avec les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.

Conjecture
Soient $\mathbf{F}$ un corps fini et X une $\mathbf{F}$-variété projective et lisse séparablement rationnellement connexe. Alors $X(\mathbf{F})/R$ est réduit à un point.

Exemple (Swinnerton-Dyer) : c'est vrai pour les surfaces cubiques lisses.

Théorème (Kollár-Szabó)
Soient $\mathbf{F}$ un corps fini et X une $\mathbf{F}$-variété projective et lisse séparablement rationnellement connexe. Si l'ordre de $\mathbf{F}$ est plus grand qu'une certaine constante qui dépend seulement de la géométrie de X alors $X(\mathbf{F})/R$ est réduit à un point.

Théorème (Kollár-Szabó)

Soient K un corps local non archimédien de corps résiduel le corps fini $\mathbf{F}$. Soit A l'anneau de la valuation. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma régulier, intègre, projectif et plat sur A, de fibre spéciale $Y/\mathbf{F}$ une $\mathbf{F}$-variété (projective et lisse) séparablement rationnellement connexe – ce qui implique que la fibre générique $X = \mathcal{X} \times_A K$ est SRC. Si l'ordre de $\mathbf{F}$ est plus grand qu'une certaine constante qui dépend seulement de la géométrie de X alors $X(K)/R$ est réduit à un point.

Ici encore on se demande si la condition sur l'ordre du corps résiduel est nécessaire.

A tout le moins, le résultat ci-dessus implique :

Soient K un corps de nombres et X/K une K-variété projective et lisse rationnellement connexe. Alors pour presque toute place v de K, le quotient card $X(K_v)/R = 1$.

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel F. Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma lisse, intègre, propre et plat. Soit $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A F$ la fibre spéciale.

L'application de spécialisation $X(K) = \mathcal{X}(A) \to Y(F)$ induit une application

$$X(K)/R \to Y(F)/R.$$

Théorème (Kollár)

Si Y/F est SRC, et si A est complet, ou plus généralement hensélien l'application de spécialisation $X(K)/R \to Y(F)/R$ est une bijection.

On dit qu'un corps K est fertile si sur toute k-variété lisse intègre avec un K-point les K-points sont denses pour la topologie de Zariski.

Exemple : $\mathbf{R}$, corps local usuel, plus généralement corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien.

Théorème (Kollár) *Soit K un corps fertile, et X une K-variété rationnellement connexe. Si deux K-points sont R-équivalents, alors il existe un K-morphisme $\mathbf{P}^1_K \to X$ tels que ces deux points soient dans l'image de $\mathbf{P}^1(K)$.*

Corollaire

Pour K et X comme ci-dessus, pour tout ouvert de Zariski $U \subset X$, l'application $U(K)/R \to X(K)/R$ est injective.

Théorème (Kollár) *Soit K un corps local usuel, soit $f : X \to Y$ un K-morphisme projectif et lisse de variétés lisses, dont les fibres géométriques sont des variétés SRC. L'application $Y(k) \to \mathbf{N}$ qui à un point $y \in Y(k)$ associe le cardinal de $X_y(k)/R$ est semicontinue supérieurement : tout point de $Y(k)$ admet un voisinage tel que pour z dans ce voisinage le cardinal de $X_z(k)/R$ soit au plus égal à celui de $X_y(k)/R$.*

Question ouverte : le cardinal de $X_y(k)/R$ est-il localement constant ?

Question

Soit $K = \mathbf{C}(C)$ un corps de fonctions d'une variable sur les complexes. Soit X une K-variété rationnellement connexe.

A-t-on card $X(K)/R = 1$?

On peut se poser la question pour un corps k de dimension cohomologique ≤ 1, par exemple $k = \mathbf{C}((t))$.

Cas connus :

Compactification lisse d'un K-groupe linéaire connexe.

Surfaces fibrées en coniques de degré 4.

Question

Soit K un corps de nombres. Soit X une K-variété rationnellement connexe. Le quotient $X(K)/R$ est-il fini ?

Cas connus

Compactification lisse d'un K-groupe linéaire connexe (Margulis, CT-Sansuc, Gille)

Surfaces fibrées en coniques de degré 4 (dans ce cas, finitude pour tout k corps de type fini sur le corps premier) (CT-Sansuc-Swinnerton-Dyer)

Problème ouvert pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes linéaires connexes.

Problème analogue pour K un corps de fonctions de 2 variables sur les complexes.

Kollár a des exemples du type suivant.
K l'un quelconque de $\mathbf{Q}(t)$ (corps de type fini sur le corps premier), $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}((t))$, la réunion des $\mathbf{R}((t^{1/n}))$ (corps réel clos non archimédien)
X une hypersurface quartique sur K en un nombre assez grand de variables
$X(K)/R$ **infini**
Argument : Spécialisation surjective vers $E(\mathbf{Q})/R = E(\mathbf{Q})$ ou $E(\mathbf{R})/R = E(\mathbf{R})$ pour $E/\mathbf{Q}$ une courbe elliptique.
On peut faire des choses analogues sur $K = \mathbf{Q}_p(t)$.

9. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes

Rappelons :

Proposition
Soient K un corps et X une K-variété projective et lisse RCC. Il existe un entier $N > 0$ tel que $NA_0(X) = 0$.

Soient $\mathbf{F}$ un corps fini et X une $\mathbf{F}$-variété séparablement rationnellement connexe. Du théorème de Kollár et Szabó il résulte que l'on a $A_0(X) = 0$.
Mais ceci n'est qu'un cas particulier d'un théorème général en théorie du corps de classes supérieur;

Théorème (K. Kato et S. Saito, 1983)
Soient $\mathbf{F}$ un corps fini et X une $\mathbf{F}$-variété projective et lisse géométriquement intègre. Soit Alb_X la variété d'Albanese de X (c'est une variété abélienne) et μ le $\mathbf{F}$-groupe fini commutatif dual de la torsion du groupe de Néron-Severi géométrique de X. Le groupe $A_0(X)$ est fini, et l'on a une suite exacte

$$0 \to H^1(\mathbf{F}, \mu) \to A_0(X) \to Alb_X(\mathbf{F}) \to 0.$$

Soient $K = \mathbf{C}(C)$ un corps de fonctions d'une variable sur le corps de complexes et X une F-variété projective et lisse rationnellement connexe.
A-t-on $A_0(X) = 0$?

On peut se poser la question plus généralement pour tout corps K de dimension cohomologique 1, en particulier pour $K = \mathbf{C}((t))$.

Cas connus, chacun d'entre eux sous la simple hypothèse $cd(K) \leq 1$

Compactification lisse d'espace principal homogène de groupe algébrique linéaire connexe (réduction au cas des tores algébriques)

Surfaces RCC, i.e. surfaces rationnelles (méthodes de K-théorie algébrique, 1983)

Hypersurface cubique lisse avec un K-point

Théorème (CT-Ischebeck 1981)
Soit X une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse géométriquement intègre avec $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$. Soit s le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.
Le sous-groupe $2A_0(X)$ est le sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$ et le quotient $A_0(X)/2A_0(X) = (\mathbf{Z}/2)^{s-1}$.

En particulier si X est rationnellement connexe et $X(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, alors $A_0(X)$ est fini et $A_0(X) = (\mathbf{Z}/2)^{s-1}$.

Soient K un corps p-adique (extension finie de $\mathbf{Q}_p$), A l'anneau de la valuation, $\mathbf{F}$ le corps résiduel.

Soit X une K-variété rationnellement connexe. Le groupe $A_0(X)$ est-il fini ?

Note : Jusque récemment on s'est posé la question de savoir si pour toute variété projective lisse X sur un corps p-adique le sous-groupe de torsion de $A_0(X)$ est fini. M. Asakura et S. Saito ont montré récemment qu'il n'en est rien (exemples : surfaces de degré $d \geq 5$ suffisamment générales dans $\mathbf{P}^3$).

Cas connus

Si X a bonne réduction SRC, i.e. s'il existe un schéma régulier intègre lisse de fibre spéciale $Y/\mathbf{F}$ SRC, alors $A_0(X) = 0$.

Ceci est une application du résultat de Kollár-Szabó.

Théorème (CT 2005/6)
Si X est une K-compactification lisse d'un K-groupe linéaire connexe, alors $A_0(X)$ est somme d'un groupe fini et d'un groupe de torsion p-primaire (d'exposant fini).

Théorème (S. Saito et K. Sato, 2006/7)
Soit $\mathcal{X}/A$ un A-schéma régulier intègre, propre et plat, X/K sa fibre générique. Supposons la fibre spéciale réduite $Y_{red}/\mathbf{F}$ à croisements normaux stricts. Alors le groupe $A_0(X)$ est somme directe d'un groupe fini et d'un groupe divisible par tout entier premier à p.

Corollaire
Si en outre X est une variété rationnellement connexe, alors $A_0(X)$ est somme d'un groupe fini et d'un groupe de torsion p-primaire d'exposant fini.

10. Vers les variétés rationnellement simplement connexes

Les variétés rationnellement connexes sont un analogue algébrique des espaces topologiques connexes par arcs. B. Mazur a demandé s'il y a un analogue en géométrie algébrique des espaces simplement connexes. En topologie, on demande que l'espace des lacets pointés soit connexe par arcs. A la suite d'une suggestion de Mazur, Starr et de Jong proposent la définition suivante.

Soit X une variété projective et lisse sur $\mathbf{C}$, équipée d'un fibré ample H. Soit $\overline{M}_{0,2}(X,e)$ l'espace de Kontsevich paramétrisant les données suivantes :

une courbe C propre, réduite, connexe, à croisements normaux, de genre arithmétique 0,
Une paire ordonnée (p,q) de points lisses de C,
un morphisme $h : C \to X$ d'image de degré e,
tels que de plus la situation n'ait qu'un nombre fini d'automorphismes.
On dispose alors d'un morphisme d'évaluation

$$\overline{M}_{0,2}(X,e) \to X \times X.$$

La fibre générale de ce morphisme est un analogue de l'espace des chemins à points base en topologie.

La variété X est dite rationnellement simplement connexe si pour $e \geq 1$ suffisamment grand il existe une composante M de $\overline{M}_{0,2}(X,e)$ dominant $X \times X$ telle que la fibre générique de $M \to X \times X$ soit une variété rationnellement connexe.

de Jong et Starr considèrent aussi l'espace

$$\overline{M}_{0,m}(X,e)$$

où cette fois-ci l'on fixe $m \geq 2$ points lisses sur la courbe de genre zéro, et l'évaluation

$$\overline{M}_{0,m}(X,e) \to X^m.$$

Ils appellent X fortement rationnellement simplement connexe si pour tout $m \geq 2$ et tout entier e suffisamment grand (fonction de m) il existe une composante M de $\overline{M}_{0,m}(X,e)$ dominant X^m telle que la fibre générique de $M \to X^m$ soit une variété rationnellement connexe.

de Jong et Starr ont obtenu une série de résultats sur les intersections complètes lisses dans l'espace projectif. Pour simplifier, je cite leurs résultats pour les hypersurfaces.

Théorème (de Jong-Starr)
Une hypersurface lisse de degré $d \geq 2$ dans $\mathbf{P}^n$ avec

$$n \geq d^2 - 1$$

est rationnellement simplement connexe, à l'exception des quadriques dans $\mathbf{P}^3$.

Théorème (de Jong-Starr)
Une hypersurface lisse de degré $d \geq 2$ dans $\mathbf{P}^n$ avec

$$n \geq 2d^2 - d - 1$$

est fortement rationnellement simplement connexe.

Dans la définition ci-dessus on peut prendre $e \geq 4m - 6$.

Théorème (de Jong-Starr)
Pour $n \geq d^2$, il existe un ouvert de Zariski non vide de l'espace des hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^n$ tel que toute hypersurface paramétrée par un point de cet espace est fortement simplement rationnellement connexe.

Le lien avec l'approximation faible est donné par le

Théorème (Hassett)
Soit $K = \mathbf{C}(C)$ le corps des fonctions d'une courbe. Si X/K est une variété fortement simplement rationnellement connexe, alors elle satisfait l'approximation faible par rapport à tout ensemble fini de places de K.

On peut se demander s'il existe une classe naturelle de variétés qui ont automatiquement un point sur le corps des fonctions d'une surface sur les complexes.

Serait-ce la classe des variétés fortement rationnellement simplement connexes ?
D'après Tsen-Lang (ci-dessous) les hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^n$ avec $n \geq d^2$ satisfont la propriété.
Mais l'exemple de l'hypersurface cubique diagonale de coefficients

$$(1, u, u^2, v, vu, vu^2, v^2, v^2u, v^2u^2)$$

sur le corps $\mathbf{C}(u, v)$ montre que la classe cherchée ne comprend pas toute variété rationnellement simplement connexe (au sens de de Jong et Starr). Cette hypersurface n'a pas de point sur le corps $\mathbf{C}((u))((v))$.

La classe cherchée comprendrait très certainement les espaces homogènes principaux de groupes semisimples simplement connexes (conjecture II de Serre, presque complètement démontrée, les derniers cas (E_8 déployé !) étant annoncés par de Jong et Starr, via leur méthode).

de Jong et Starr ont un travail en préparation sur les variétés rationnellement simplement connexes où ils montrent que certains espaces homogènes projectifs sur un corps de deux fonctions de deux variables sur $\mathbf{C}$ ont automatiquement un point rationnel. Cela leur permet de donner une nouvelle démonstration (la troisième !) du théorème de de Jong indice=exposant pour les algèbres simples centrales sur un tel corps.

Corps C_i (Définition et théorèmes de Lang)
Un corps k est dit C_i si toute forme homogène de degré d en $n > d^i$ variables a un zéro non trivial.
Une extension finie d'un corps C_i est C_i.
Si k est C_i alors $k(t)$ est C_{i+1}.
Si k est C_i alors $k((t))$ est C_{i+1}.

En particulier : Un corps de fonctions de 2 variables sur un corps algébriquement clos est C_2.

11. Fibres spéciales des familles de variétés simplement rationnellement connexes

On peut aussi se demander s'il y a un analogue du théorème de Chevalley-Warning et des conjectures A et B dans le contexte des formes de degré d avec $n+1 > d^2$ variables.

Exemple classique

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel κ. Supposons $car(\kappa) \neq 2$. Soit X/K une quadrique lisse de dimension au moins 3. Il existe un modèle propre Z/A dont la fibre spéciale est une κ-variété géométriquement intègre (de multiplicité 1), plus précisément un cône sur une quadrique lisse de dimension ≥ 1.

Sur un corps p-adique toute forme quadratique en au moins 5 variables a un zéro non trivial.

Les corps $\mathbf{F}_p((t))$ sont C_2 mais les corps $\mathbf{Q}_p$ ne le sont pas. (Terjanian, Browkin). Cependant

Théorème (Ax-Kochen)

Pour tout entier d, il existe un ensemble fini $S(d)$ de premiers tel que pour $p \notin S(d)$, toute forme homogène en $n > d^2$ variables sur $\mathbf{Q}_p$ a un zéro non trivial.

Conjecture (Kato)

Pour tout entier d et tout premier p toute forme homogène de degré d sur un corps p-adique en $n > d^2$ variables possède un zéro non trivial dans une extension de degré premier à d.

Théorème (Kato-Kuzumaki)

Cet énoncé vaut si d est premier.

Conjecture

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K de corps résiduel F. Soit $\Phi \in A[x_0, \ldots, x_n]$ une forme homogène de degré d en $n+1 > d^2$ variables. Supposons l'hypersurface définie par $\Phi = 0$ dans $\mathbf{P}^n_K$ lisse. Pour tout modèle régulier Z/A de cette hypersurface, propre sur A, la fibre spéciale contient une composante géométriquement intègre de multiplicité 1.

Ceci donnerait (presque) une démonstration de la conjecture de Kato.

Théorème (CT, 2006)

Si F est de caractéristique nulle, la conjecture ci-dessus vaut.

Pour établir ce résultat on peut supposer $A = F[[t]]$. Le théorème de Kollár (ex-conjecture d'Ax en car. zéro) implique qu'il existe un corps (gigantesque) E contenant F tel que F soit algébriquement clos dans E et que E soit un corps C_1. Essentiellement, on prend pour E la limite inductive de tous les corps de type fini contenant F et dans lesquels F est algébriquement fermé. On remplace $F[[t]]$ par $E[[t]]$ et on utilise le fait que $E((t))$ est un corps C_2 puisque E est un corps C_1 (théorème de Lang).

On aimerait avoir une classe plus large, définie par des conditions géométriques, pour lesquelles la conjecture ci-dessus serait encore raisonnable.

Ici encore, les (compactifications lisses de) groupes semisimples simplement connexes appartiennent à cette classe.

Théorème (CT-Kunyavskiĭ 2006)

Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K de corps résiduel F de caractéristique zéro. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma régulier propre intègre de fibre générique $\mathcal{X}_K$ compactification lisse d'un espace principal homogène d'un groupe semisimple simplement connexe. Il existe alors une composante de la fibre spéciale qui est géométriquement intègre et de multiplicité 1.

Démonstration (esquisse) (idée de Gabber). On montre (facilement) que l'on peut plonger F dans un corps (gigantesque) E avec $cd(E) \leq 1$ et F algébriquement fermé dans F. On remplace F par E et on utilise le théorème de Bruhat et Tits qu'un espace principal homogène sous un tel groupe est trivial si le corps F est de dimension cohomologique 1.

Dans la recherche de la bonne définition de variétés rationnellement “supérieurement” connexes, on peut aussi penser à des conditions de trivialité de $X(k)/R$ et de $A_0(X)$ sur certains corps.

Ainsi, si K est un corps p-adique, ou K est un corps de fonctions de deux variables sur les complexes, ou $K = \mathbf{C}((u))((v))$ et si G/K est un groupe semisimple simplement connexe, on sait établir $G(K)/R = 1$ et $X(K)/R = 1$. Pour X une compactification lisse d'un tel G, ceci implique $A_0(X) = 0$.

Proposition (Madore)
Soit K un corps p-adique ou un corps C_2. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_K$ une hypersurface cubique lisse. Pour $n \geq 11$, on a card $X(K)/R = 1$ *et* $A_0(X) = 0$.

Pour $n = 3$, on sait donner des exemples avec $X(k)/R$ et $A_0(X)$ d'ordre plus grand que 1.
Sur K p-adique on ignore ce qui se passe pour $4 \leq n \leq 10$.
Sur $K = \mathbf{C}((a))((b))$, Madore a donné un exemple de non trivialité avec $n = 4$.

$$X^3 + Y^3 + aZ^3 + bU^3 + abV^3 = 0$$

(Méthode : théorie de l'intersection.)

Soit K un corps, et $X \subset \mathbf{P}^n$, avec $n \geq 4$, une intersection lisse de deux quadriques possédant un K-point.
Si K est p-adique ou C_2, et si $n \geq 7$, alors card $X(K)/R = 1$ et $A_0(X) = 0$.
Pour K p-adique, $X(K)/R$ peut être non trivial pour $n = 4$, et sans doute pour $n = 5$. Le cas $n = 6$ est ouvert.
Pour K p-adique, on $A_0(X) = 0$ pour $n \geq 7$. Si de plus $p \neq 2$ alors $A_0(X) = 0$ pour $n \geq 6$.
(CT-Sansuc-Swinnerton-Dyer, CT-Skorobogatov, Parimala-Suresh)

12. Surjectivité géométrique et surjectivité arithmétique

Le théorème d'Ax-Kochen peut se reformuler ainsi.

Fixons d et $n \geq d^2$. Soit $N + 1$ la dimension de l'espace des formes homogènes de degré d en $n + 1$ variables. Soit $F(x_0, \ldots, x_N; y_0, \ldots, y_n)$ la forme universelle de degré d en $n + 1$-variables. Son annulation définit un fermé $Z \subset \mathbf{P}^N \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{P}^n$.
Soit $\pi : Z \to \mathbf{P}^N$ la projection sur le premier facteur.
Pour presque tout premier p, la projection induite $Z(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{P}^N(\mathbf{Q}_p)$ est surjective.

On s'intéresse dans la suite à la situation suivante.

(*) On est sur un corps de nombres k, X et Y sont deux k-variétés lisses géométriquement intègres, la k-variété Y est projective, on a un k-morphisme projectif $f : X \to Y$. On note $U \subset X$ l'ouvert de lissité du morphisme f.

On demande quels sont les liens entre la géométrie du morphisme et les propriétés de surjectivité de $X(k_v) \to Y(k_v)$ pour presque toute place v, ou déjà pour une infinité de places v du corps de nombres k.

Théorème
Sous les hypothèses (*), s'il existe un ouvert $V \subset X$ tel que le morphisme induit $V \to Y$ soit lisse, surjectif, à fibres géométriquement intègres, alors pour presque toute place v de k, l'application induite $X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective. Plus généralement, pour toute extension finie K/k, pour presque toute place w de K, l'application induite $X(K_w) \to Y(K_w)$ est surjective.

Il ne suffit pas d'avoir la propriété en codimension 1 sur Y, comme le montre l'exemple suivant. Prendre $a \in \mathbf{Q}$ non carré et $X \subset \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^2$ donnée par

$$uX_0^2 - avX_1^2 + wX_2^2 - a(u + v + w)X_3^2 = 0.$$

Pour une infinité de p, la flèche $X(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}_p)$ n'est pas surjective.
Pour $a \in \mathbf{Z}_p$, a non carré dans $\mathbf{Z}_p$, et M un point $(p^{2n+1}\alpha, p^{2m+1}\beta, 1)$ avec $n, m \geq 0$, α et β in $\mathbf{Z}_p^*$ et $\alpha.\beta$ carré dans $\mathbf{Z}_p$, la fibre en M n'a pas de $\mathbf{Q}_p$-point.

En combinant le théorème ci-dessus et la conséquence du théorème de Kollár, on établit un énoncé du type Ax-Kochen pour la restriction de $Z \to \mathbf{P}^N$ au-dessus d'une droite de $\mathbf{P}^N$ (passant par un point à fibre lisse).

Mais on aimerait établir tout le théorème d'Ax-Kochen par cette méthode ! Il suffirait pour cela de démontrer le résultat suivant.

Conjecture

Soit k un corps de car. zéro, et $f : X \to Y$ un k-morphisme propre dominant de k-variétés lisses, propres, géométriquement intègres. Supposons que pour tout anneau de valuation discrète (de rang 1) A contenant k, et de corps des fractions $k(Y)$, il existe un modèle de la fibre générique $X_{k(Y)}$ au-dessus de A dont la fibre spéciale ait une composante géométriquement intègre de multiplicité 1. Il existe alors $Y' \to Y$ un morphisme propre birationnel de k-variétés géométriquement intègres, une k-variété X', un morphisme $X' \to Y' \times_Y X$ tel que $X' \to Y'$ soit lisse, surjectif, à fibres géométriquement intègres.

Wittenberg me fait observer que l'énoncé analogue où l'on remplace composante géométriquement intègre de multiplicité 1 par composante de multiplicité 1 ne vaut pas, on peut déjà trouver un contre-exemple avec $f : X \to Y$ une fibration en coniques au-dessus du plan projectif complexe. Considérer les modèles de la famille de coniques $uX^2 + vY^2 = Z^2$, paramétrées par (u, v) sur $k = \mathbf{C}$.

Théorème

Sous les hypothèses (*), si Y est une courbe et si l'application induite $U \to Y$ est surjective (ce qui équivaut à : $f : X \to Y$ est localement scindé pour la topologie étale sur Y), alors pour toute extension finie K/k, il existe une infinité de places w de K pour lesquelles l'application induite $X(K_w) \to Y(K_w)$ est surjective.

Le théorème ne s'étend pas à Y de dimension supérieure,

Considérer une fibration en coniques sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ dont le lieu de ramification est une courbe C lisse et telle que le revêtement double de C associé soit une courbe géométriquement intègre.

Exemple. Prendre C une courbe elliptique d'équation affine $v^2 = u(u-a)(u-b)$ et la famille de coniques

$$X^2 - uY^2 - (v^2 - u(u-a)(u-b))T^2 = 0.$$

On s'intéresse aux réciproques des énoncés ci-dessus.

Théorème

Plaçons-nous sous les hypothèses (*), avec Y une courbe.

(i) Si pour une infinité de places v, l'application $X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective, alors pour tout point $P \in Y(k)$ il existe une composante de mutiplicité 1 de $f^{-1}(P)$.

(ii) Si pour toute extension finie K/k, pour une infinité de places w de K, l'application $X(K_w) \to Y(K_w)$ est surjective, alors l'application induite $U \to Y$ est surjective : le morphisme $X \to Y$ est localement scindé pour la topologie étale sur Y.

Théorème

Supposons que pour presque toute place v de k l'application $X(k_v) \to Y(k_v)$ est surjective, alors

(a) L'application induite $U \to Y$ est surjective : le morphisme $X \to Y$ est localement scindé pour la topologie étale sur Y.

(b) Toute fibre connexe de $U \to Y$ est géométriquement connexe.

(c) Soit P un point fermé de Y de corps résiduel κ, soit $f^{-1}(P) = \sum_i e_i D_i$, avec D_i diviseur intègre de X de corps des fonctions κ_i. L'application

$$\{e_i.\mathrm{Res}_{\kappa/\kappa_i}\} \quad : \quad H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_i H^1(\kappa_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est injective.

On notera l'exemple suivant :

Soit k un corps de nombres, $a, b \in k^*$ avec $a, b, ab \notin k^{*2}$. Soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un modèle projectif de la situation affine suivante :

$$(x^2 - ay^2)(u^2 - bv^2)(z^2 - abw^2) = t,$$

la flèche de projection sur $\mathbf{A}^1_k$ étant donnée par la coordonnée t. Alors

a) La fibre de f en 0 ne contient aucune composante géométriquement intègre de multiplicité 1.

b) Pour toute extension finie K/k, presque toute place w de K, l'application $X(K_w) \to Y(K_w)$ est surjective.

Tout le problème est qu'un polynôme en une variable sur un corps de nombres peut avoir une solution partout localement sans en avoir sur le corps de nombres, dès qu'il est réductible.

C'est typiquement la difficulté qui empêche de passer du théorème d'Hélène Esnault au théorème de Kollár.

De même on ne peut pas partir du théorème d'Ax et Kochen pour en déduire le résultat que j'ai donné sur la réduction des formes lisses de degré d en $n > d^2$ variables.

On peut encore se poser des questions du type suivant.

Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme propre de k-variétés lisses géométriquement intègres, avec Y une courbe et k un corps de nombres.

1) Si sur toute extension finie K/k l'application $X(K) \to Y(K)$ est surjective, le morphisme admet-il une section ?

2) Si sur tout complété k_v de k la flèche $X_{k_v} \to Y_{k_v}$ a une section, la flèche admet-elle une section ?

En dimension relative 1, pour les courbes relatives de genre zéro, la réponse à ces questions est oui pour $Y = \mathbf{P}^1$ (Schinzel, Salberger, Serre, ...), elle est non pour Y une courbe de genre 1.

En dimension relative 1, pour les courbes relatives de genre 1 et $Y = \mathbf{P}^1$ la question 1) est ouverte. La question 2) a une réponse négative.

En toute dimension relative au moins 2 au-dessus de $Y = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ il y a des contre-exemples avec la fibre générique une quadrique.

Si k est un corps de nombres totalement imaginaire il y a des contre-exemples avec la fibre générique une quadrique de dimension d pour $2 \leq d \leq 6$. Pour les quadriques de dimension au moins 7 sur $k(t)$ on conjecture qu'elles ont un point rationnel.