Points rationnels sur les variétés non de type général (J.-L. Colliot-Thélène)
Résumé du cours, 13 Février 1999. Corrections mineures, 8 avril.

Dans ce texte, j'expose quels vont être les thèmes du cours. Il y a des énoncés précis, qui feront pour la plupart l'objet de démonstrations détaillées dans le cours. Il y a beaucoup de questions ouvertes. Il n'y a pas de démonstrations.

1. La classification birationnelle des variétés.

1.1 Courbes

Soient k un corps, car(k)=0, X/k une courbe projective, lisse, géométriquement intègre, et $K = K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ le faisceau canonique. Soit $g = \dim H^0(X, K)$ le genre de X.

Théorème (Hilbert, Hurwitz, Witt, Châtelet) *Supposons $g = 0$. Alors X est k-isomorphe à une conique lisse dans $\mathbf{P}^2_k$. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $X \simeq \mathbf{P}^1_k$. L'existence d'un point rationnel sur X est contrôlée par un élément de* Br(k).

Théorème *Supposons $g = 1$. Alors X est un espace principal homogène sous une courbe elliptique E/k. Il existe une extension finie K/k telle que $X(K)$ soit Zariski-dense dans X.*

Théorème (Faltings) *Supposons $g > 1$. Si k est de type fini sur le corps premier, alors $X(k)$ est fini.*

1.2. Surfaces : géométrie sur un corps quelconque

Théorème (Castelnuovo, Enriques, ..., Manin, Iskovskih, Mori) *Soient k un corps parfait, X une k-surface projective lisse k-minimale et $K = K_X \in$ Pic(X) le faisceau canonique. Alors pour X, on a l'une des propriétés suivantes :*

(i) le faisceau K est nef i.e. $(K.C) \geq 0$ pour toute courbe $C \subset X$; dans ce cas pour n suffisamment divisible, le faisceau nK est engendré par ses sections, ce qui permet de définir l'application canonique $X \to Y$.

(ii) le rang du groupe de Néron-Severi NS(X) *est 2, et X est une surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe Y projective et lisse ;*

(iii) le rang de Pic(X) *est un et le faisceau $-K$ est ample : X est une surface de del Pezzo, de degré $d = (K.K)$ compris entre 1 et 9.*

On notera que dans le cas (i), la surface $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ est minimale. Ce n'est en général pas le cas pour les surfaces (ii) ou (iii).

On a ensuite une classification plus fine des surfaces.

Pour les surfaces de type (i), on définit la dimension de Kodaira $\kappa = \kappa(X)$ de X comme la dimension de la k-variété $Y = \mathrm{Proj}(\oplus_{n\geq 0} H^0(X, nK))$. On a un k-morphisme naturel $X \to Y$. Par convention, les surfaces en (ii) et (iii) sont dites de dimension de Kodaira $-\infty$. Pour $\kappa \geq 0$, on a la classification plus fine :

(0) $\kappa = 0$. Dans ce cas $12K$ est trivial.

(0.a) X est une surface $K3$. Dans ce cas $K = 0$, $q = 0$, $p_g = 1$.

(0.b) X est une surface d'Enriques (quotient étale d'une surface $K3$ par un groupe $\mathbf{Z}/2$). Dans ce cas $2K = 0$, $q = 0$, $p_g = 0$.

(0.c) X est un espace principal homogène sous une surface abélienne. Dans ce cas, $K = 0$, $q = 2$, $p_g = 1$.

(0.d) X est une forme d'une surface bielliptique (quotient étale du produit de deux courbes elliptiques). Dans ce cas, $12K = 0$, $q = 1$, $p_g = 0$,

(1) $\kappa = 1$. Alors X est une surface proprement elliptique : la courbe Y est projective et lisse, et la fibre générique de l'application $X \to Y$ est une courbe lisse de genre un.

(2) $\kappa = 2$. Alors X est une surface de type général. L'application $X \to Y$ est birationnelle et la surface Y normale, les points singuliers (en nombre fini) sont des points doubles ordinaires.

Les surfaces de type (ii) sont, sur une extension finie de k, birationnelles au produit $Y \times_k \mathbf{P}^1_k$. Elles sont (géométriquement) rationnelles si et seulement si le genre de Y est zéro.

1.2.1. Surfaces de Del Pezzo

Les surfaces (iii) sont des surfaces géométriquement rationnelles, ce sont des formes sur k de l'éclatement du plan en au plus huit points situés en position générale. Soit $d = (K.K)$ le degré d'une telle surface, supposée k-minimale. Pour $d = 9$, on trouve les surfaces de Severi-Brauer (formes du plan projectif). Pour $d = 8$, on a une forme de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Pour $d = 6$, il existe un ouvert qui est un espace principal homogène sous un k-tore de dimension deux. Pour $d = 5$ et 7, on a toujours $X(k) \neq \emptyset$. Pour $d \geq 5$, si k est un corps de nombres, le principe de Hasse vaut.

Pour $d = 4$, on trouve les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$. Pour $d = 3$, on trouve les surfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^3_k$. Pour $d = 2$, on trouve les revêtements doubles du plan ramifiés le long d'une quartique lisse. Pour $d = 1$, on trouve les revêtements doubles d'un cône quadratique dans $\mathbf{P}^3_k$ ramifiés le long d'une sextique. Pour $d = 2, 1$ on a une description plus agréable comme surfaces plongées dans un espace multihomogène. Pour $d = 1$, il y a un point k-rationnel canonique, le point base du système linéaire $-K$.

1.2.2. Surfaces rationnelles : problèmes de k-unirationalité et de rationalité sur le corps de base

Il s'agit des surfaces du type (ii) lorsque Y est une courbe de genre zéro, et des surfaces du type (iii) (surfaces de Del Pezzo). Ce sont les modèles (projectifs, lisses) k-minimaux des k-surfaces géométriquement rationnelles. Comme pour les surfaces de Del Pezzo, on pose $d = (K.K)$. Pour X/Y une surface k-minimale fibrée en coniques au-dessus d'une courbe Y de genre zéro, on note r le nombre de fibres géométriques singulières, i.e. consistant en un couple de droites se rencontrant en un point. On a $d = (K.K) = 8 - r$.

(a) Supposons $X(k) \neq \emptyset$. La k-surface X est-elle alors k-unirationnelle ? C'est connu pour $d \geq 3$ (et essentiellement connu pour $d = 2$, aussi dans certains cas avec $2 \geq d \geq 0$.) Le problème est entièrement ouvert pour les surfaces de Del Pezzo de degré un et pour les surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$ avec $d < 0$, i.e. avec $r \geq 9$ fibres géométriques singulières.

Proposition (Yanchevskiĭ) *Soit k un corps local. Si une k-surface fibrée en coniques sur la droite projective $\mathbf{P}^1_k$ possède un point k-rationnel, alors elle est k-unirationnelle.*

L'énoncé vaut plus généralement si k est un corps "épais", c'est-à-dire un corps k tel que sur toute k-courbe lisse intègre l'ensemble des k-points est soit vide soit dense pour la topologie de Zariski.

(b) *Pour $d \geq 5$, si $X(k) \neq \emptyset$, alors X est k-rationnelle* (k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$). C'est faux en général pour $d \leq 4$. L'un des invariants utilisés pour montrer la non k-rationalité est le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$, avec $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, à addition près d'un module de permutation pour l'action du groupe de Galois. Si X est k-rationnelle, alors $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation : il existe deux modules de permutation P_1 et P_2 tels que $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \oplus P_1 \simeq P_2$: On peut utiliser cet invariant pour montrer que le théorème de Castelnuovo ne vaut pas sur un corps de base quelconque.

Question ouverte : si X est une k-surface rationnelle, $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation et $X(k) \neq \emptyset$, la k-surface est-elle stablement k-rationnelle ? C'est-à-dire, existe-t-il $\mathbf{P}^n_k$ tel que $X \times_k \mathbf{P}^n_k$ soit k-birationnel à $\mathbf{P}^{n+2}_k$? (NB : En utilisant la technique des systèmes linéaires à point base, on a pu montrer que la surface $y^2 + 3z^2 = x^3 - 2$ sur $\mathbf{Q}$ est stablement $\mathbf{Q}$-rationnelle mais non $\mathbf{Q}$-rationnelle).

1.3. Variétés de dimension supérieure : variétés rationnellement connexes

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. En dimension supérieure, la classification birationnelle (programme de Mori) est beaucoup plus élaborée, et n'a atteint un état satisfaisant que pour la dimension 3.

Des analogues naturels des surfaces de type (ii) (surfaces réglées) ont été trouvés (voir [Kollár, IV.1]), ce sont les variétés uniréglées : elles sont dominées par un produit $\mathbf{P}^1 \times Y$ avec $\dim(Y)=\dim(X)$ -1. Pour tout point d'une telle variété il existe un morphisme non constant $\mathbf{P}^1 \to X$ d'image contenant ce point.

Une bonne classe généralisant la classe des surfaces rationnelles (surfaces de type (iii) et les surfaces de type (ii) qui sont rationnelles) a été dégagée (Campana, Kollár/Miyaoka/Mori), c'est celle des variétés rationnellement connexes.

Théorème *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, non dénombrable, et soit X une k-variété projective, lisse, connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) par deux k-points "suffisamment généraux" de X, il passe une courbe de genre géométrique zéro ;

(ii) deux points de $X(k)$ peuvent être reliés par une chaîne de courbes de genre géométrique zéro ;

(iii) par deux points de $X(k)$, il passe une courbe de genre géométrique zéro ;

(iv) par tout ensemble fini de points de $X(k)$, il passe une courbe de genre géométrique zéro ;

(v) il existe un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ tel que le faisceau f^*T_X soit ample, i.e. somme directe de faisceaux inversibles $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ avec $n > 0$.

Une variété rationnellement connexe est une variété qui satisfait ces propriétés.

Toute variété unirationnelle est rationnellement connexe. Un fibré en coniques au-dessus d'un espace projectif est rationnellement connexe. Un théorème de Campana et Kollár/Miyaoka/Mori assure que toute variété de Fano (faisceau anticanonique -K ample) est rationnellement connexe. Pour X et Y projectives lisses et $f : X \to Y$ un morphisme dominant sur une variété Y rationnellement connexe, de fibre générale rationnellement connexe, c'est une question ouverte (et arithmétiquement intéressante) de savoir si X est rationnellement connexe. Ce serait le cas si toute K-variété projective, lisse, géométriquement rationnellement connexe sur le corps $K = k(t)$ avait automatiquement un K-point (connu, par inspection, pour les surfaces rationnelles).

Soit k comme ci-dessus algébriquement clos de caractéristique zéro.

Variétés unirationnelles. A partir de la dimension trois, le problème de Lüroth (une variété unirationnelle est-elle rationnelle ?) a une réponse négative : exemples de Clemens-Griffiths (structure fine des jacobiennes intermédiaires), Manin-Iskovskih (théorie des systèmes linéaires avec une partie fixe), Artin-Mumford (groupe de Brauer). On a pu pousser l'exemple d'Artin-Mumford en utilisant la cohomologie non ramifiée de degré supérieur. Etant donné un k-groupe réductif connexe G, plongé dans un GL_n, c'est une question ouverte de savoir si la variété quotient GL_n/G est (stablement) rationnelle. Le cas de $G = PGL_r$ est spécialement intéressant.

Kollár (1995) a montré que beaucoup de variétés de Fano ne sont pas réglées (une variété est réglée si elle est birationnelle à un produit $\mathbf{P}^1 \times Y$). C'est là un résultat bien plus fort que la non-rationalité. Il montre : *Soient d et n des entiers tels qu'il existe m entier avec $d/2 \geq m \geq (n+3)/3$. Soit $X \subset \mathbf{P}^{n+1}_{\mathbf{C}}$ une hypersurface lisse de degré d très générale. Alors X n'est pas réglée.* (Exemples : hypersurfaces de degré 6 dans $\mathbf{P}^6$, dans $\mathbf{P}^7$).

On pense que de nombreuses variétés rationnellement connexes ne sont pas unirationnelles, mais on n'en connaît pas d'exemple. Le cas des variétés de dimension trois fibrées en coniques au-dessus du plan projectif est largement ouvert.

Soit maintenant k un corps de caractéristique zéro quelconque. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement rationnelle. Comme pour les k-surfaces rationnelles, on peut se demander si l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ implique que X est k-unirationnelle. On sait peu de choses. On a un analogue du résultat de Yanchevskiĭ :

Proposition (Kollár 1998) *Soit k un corps local, car(k)=0. Soit X une k-variété projective et lisse, géom. connexe, possédant un point k-rationnel. S'il existe un k-morphisme dominant $X \to \mathbf{P}^1_k$ tel que la fibre générique $X_\eta/K = k(\mathbf{P}^1)$ est de l'un des types suivants :*

(i) une variété possédant un ouvert dense qui est un espace homogène d'un K-groupe algébrique linéaire connexe ;

(ii) une surface de Del Pezzo de degré au moins 2 ;

(iii) une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^n_K$ avec $n \geq 3$;

(iv) une intersection (lisse) de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_K$ avec $n \geq 4$;

alors X est k-unirationnelle.

La démonstration vaut pour k un corps "épais".

2. Densité Zariski des points rationnels sur un corps quelconque

Lemme (Lang/Nishimura) *Soient k un corps, X une k-variété lisse intègre, Y une k-variété propre, $U \subset Y$ un ouvert non vide et $f : U \to Y$ un k-morphisme. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $Y(k) \neq \emptyset$. Si X et Y sont des k-variétés propres, lisses, intègres k-birationnellement équivalente, alors $X(k) \neq \emptyset$ si et seulement si $Y(k) \neq \emptyset$.*

Questions *Soit k un corps infini. Soit X une k-variété projective, lisse, géom. connexe, de l'un des types suivants :*

(i) surface géométriquement rationnelle ;

(ii) surface d'Enriques ;

(iii) surface $K3$;

(iv) surface fibrée en courbes elliptiques d'invariant j non constant ;

(v) surface fibrée $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ telle que la fibre générique soit une courbe de genre un, d'invariant j non constant, telle que toutes les fibres géométriques de f aient une composante de multiplicité un ;

(vi) variété géométriquement rationnellement connexe (en particulier variété géométriquement unirationnelle, variété de Fano, variété fibrée en coniques au-dessus d'un espace projectif).

Si X possède un point k-rationnel, l'ensemble $X(k)$ est-il Zariski dense dans X ?

Discutons le cas des surfaces rationnelles. C'est clair si la surface est k-unirationnelle, mais on n'a pas de résultat sinon. Les cas ouverts sont donc : surfaces de Del Pezzo de degré un, et surface fibrée en coniques avec au moins 7 fibres géométriques dégénérées (le cas de 6 fibres est à clarifier). On a un résultat conditionnel : si k est un corps de nombres, et si l'on admet l'hypothèse de Schinzel, alors sur toute surface fibrée en coniques possédant un k-point, $X(k)$ est dense dans X pour la topologie de Zariski.

En ce qui concerne les surfaces $K3$, on pensera au fameux example d'Euler résolu par Elkies, la surface $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ (sur $\mathbf{Q}$). Cette surface est d'ailleurs aussi fibrée en courbes de genre un.

Pour les surfaces fibrées en courbes elliptiques sur un corps de nombres, d'invariant j non constant, la question de la densité des points k-rationnels a été considérée par B. Mazur. Il y a eu des travaux (dépendant de diverses hypothèses, comme la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer) par Rohrlich et ses élèves, Fouvry-Pomykala, Michel, Silverman, Rosen. On a quelques résultats inconditionnels "en bas degré" : Mestre, Kuwata/Wang.

Pour les surfaces fibrées en courbes lisses de genre un sur un corps de nombres, outre le travail d'Elkies mentionné ci-dessus, signalons le travail [CT/Sk/SwD98], qui dépend de la conjecture de Schinzel et de la finitude des groupes de Tate-Shafarevich. Parmi les surfaces étudiées, on en trouve de dimension de Kodaira $-\infty$, 0 et 1.

3. Densité potentielle des points rationnels.

L'objet est ici de déterminer la classe $\mathcal{C}$ la plus large possible de variétés projectives et lisses disons sur $\mathbf{C}$ telle que pour tout corps k muni d'un plongement $k \subset \mathbf{C}$, et toute k-variété X avec $X \times_k \mathbf{C}$ dans $\mathcal{C}$, il existe une extension finie K/k telle que $X(K)$ soit Zariski-dense dans X_K. Il suffit bien sûr de considérer le cas où k est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$. Dans la littérature, ce problème a été principalement considéré pour k un corps de nombres.

Cette propriété, dite de *densité potentielle*, a été considérée par divers auteurs (Geyer/Jarden, Manin, Manoil, récemment Harris, Tschinkel, Bogomolov).

Elle vaut trivialement pour les variétés géométriquement unirationnelles, elle vaut aussi pour les variétés dominées (géométriquement) par une variété abélienne.

Théorème (Harris/Tschinkel, Bogomolov/Tschinkel) *Soit k un corps de nombres. Pour toute k-variété projective et lisse X de l'un des types suivants, il existe une extension finie K/k telle que $X(K)$ soit Zariski dense dans X_K :*

(i) Surface quartique lisse dans $\mathbf{P}^3_k$ contenant une droite.

(ii) Hypersurface quartique lisse dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geq 4$.

(iii) Variété de Fano de dimension trois, sauf peut-être les revêtements doubles de $\mathbf{P}^3$ ramifiés le long d'une surface sextique lisse.

(iv) Surface $X/\mathbf{P}^1_k$ fibrée en courbes elliptiques possédant outre la section triviale une multisection $C \subset X$ qui soit une courbe géométriquement intègre de genre géométrique 0 ou 1 et telle que $C/\mathbf{P}^1$ soit ramifié au-dessus d'un point M de $\mathbf{P}^1$ à fibre X_M lisse.

(v) Surface d'Enriques.

Quelques-uns des outils : théorème de spécialisation de Silverman pour les familles de courbes elliptiques, théorème de Merel sur la borne uniforme de la torsion, le fait que pour un S-schéma abélien A/S et $n > 0$ inversible sur S, le noyau de la multiplication par n est fini étale sur S.

Examinons les surfaces projectives et lisses, que l'on peut supposer géométriquement minimales. Pour les surfaces de dimension de Kodaira $-\infty$, le propriété vaut trivialement pour une surface (géométriquement) rationnelle, et pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe (proj., lisse) Y, la propriété vaut si et seulement si la courbe Y est genre au plus un. Pour les surfaces de dimension de Kodaira 0, la propriété vaut sauf peut-être pour certaines surfaces $K3$. Les surfaces de dimension de Kodaira 1 sont des surfaces elliptiques X/Y (la fibre générique est une courbe lisse de genre un). Lorsque la base Y de la fibration est de genre au plus un et que chaque fibre géométrique possède une composante de multiplicité un, par exemple lorsque la fibration admet une section, on peut se demander si la propriété vaut. Une condition sur les multiplicités des composantes des fibres est nécessaire. Les surfaces de dimension de Kodaira 2 sont de type général. On s'attend à ce que la propriété de densité potentielle soit toujours en défaut (généralisation de la conjecture de Mordell).

En dimension quelconque, on peut se demander si la propriété de densité potentielle vaut pour les variétés projectives, lisses, géométriquement connexes de l'un des types suivants :

(a) Variétés dont le faisceau anticanonique est ample (variétés de Fano).

(b) Variétés rationnellement connexes.

(c) (Harris/Tschinkel) Variétés dont le faisceau anticanonique est nef (pour toute courbe $C \subset X$, on a $(-K.C) \geq 0$). Par exemple variétés à fibré canonique trivial, telles que les hypersurfaces lisses de degré $d+1$ dans $\mathbf{P}^d$.

(d) Variétés dont aucun revêtement non ramifié n'admet d'application rationnelle dominante vers une variété de type général.

Pour les surfaces de dimension de Kodaira $-\infty$, ou 0, l'énoncé (c) correspond exactement aux classes pour lesquelles on espère la densité potentielle (et parmi celles-ci seul le cas des surfaces $K3$ reste ouvert). Le cas des surfaces (minimales) de dimension de Kodaira 1 qui sont fibrées au-dessus de la droite projective (ou d'une courbe de genre un) et possèdent une section montre que la condition (c) n'est pas la plus large à envisager. De fait, dans ce cas, il existe un entier $n > 0$ tel que nK soit linéairement équivalent à une somme de fibres.

Sur un corps de nombres, si l'on admet l'hypothèse de Schinzel, on peut montrer que la densité potentielle vaut pour une variété fibrée en coniques (et plus généralement de fibre générique une variété de Severi-Brauer) au-dessus d'un espace projectif.

4. Questions sur les points rationnels sur un corps de nombres : regrouper les points rationnels en classes.

Définition. Soient k un corps et X une k-variété. La R-équivalence sur l'ensemble $X(k)$ des k-points de X est la relation d'équivalence engendrée par la propriété : A et B sont élémentairement liés s'il existe un k-morphisme f d'un ouvert $U \subset \mathbf{P}^1_k$ dans X et deux k-points $M, N \in U(k)$ tels que $f(M) = A$ et $f(N) = B$.

Si k est algébriquement clos et X/k projective, lisse et rationnellement connexe, alors $X(k)/R$ est réduit à un élément. C'est pour la classe des k-variétés (lisses) géométriquement rationnellement connexes qu'il a un sens d'étudier la R-équivalence.

Théorème *Soit k un corps, car.(k)=0. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Dans chacun des deux cas :*

(i) (CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer 87, ...) *X est une surface rationnelle fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ avec 4 fibres géométriques singulières.*

(ii) (CT/Sansuc 77) *X est une k-compactification lisse d'un k-tore algébrique,*

on a :

(a) Chaque classe pour la R-équivalence est paramétrée par les k-points d'une k-variété k-rationnelle.

(b) Si k est un corps de type fini sur le corps premier, alors $X(k)/R$ est fini.

(c) Si k est un corps local, alors les classes pour la R-équivalence sont ouvertes et $X(k)/R$ est fini.

(d) Si k est un corps p-adique, et X/k a bonne réduction, alors $X(k)/R$ a au plus un élément.

Théorème (Gille 93/97) *Soit G un k-groupe algébrique linéaire. Si k est un corps de nombres ou un corps local, alors $G(k)/R$ est un groupe fini. Pour toute place v de k, $G(k_v)/R$ est fini, et ce groupe est nul pour presque toute place v de k.*

(L'un des ingrédients de la preuve est un théorème de Margulis sur les sous-groupes normaux de $G(k)$ pour G/k simplement connexe.)

Pour k de type fini sur le corps premier, la finitude de $G(k)/R$ est un problème ouvert.

Sur un corps local, on dispose maintenant d'un théorème général :

Théorème (Kollár 1998) *Soit k un corps local (car.(k)=0). Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre, géométriquement rationnellement connexe. Alors les classes pour la R-équivalence sont ouvertes et $X(k)/R$ est donc fini.*

Question : Si X/k est une variété (proj., lisse, géom. intègre) sur un corps de nombres qui est géométriquement rationnellement connexe, a-t-on $X(k_v)/R$=1 pour presque toute place v de k ?

Voici une question a priori plus simple. Soit k un corps possédant la propriété que toute k-variété géométriquement intègre possède un k-point. Si X est une k-variété (proj., lisse, géom. intègre) géométriquement rationnellement connexe, $X(k)/R$ est-il réduit à un élement ?

On pourrait se demander s'il y a un espoir d'étendre une partie des théorèmes ci-dessus aux variétés rationnellement connexes définies sur un corps de nombres. Pour les surfaces rationnelles, c'est un problème ouvert. Kollár a un exemple de variété de Fano sur le corps $k = \mathbf{Q}(t)$ pour laquelle $X(k)/R$ n'est pas fini.

5. Questions sur les points rationnels sur un corps de nombres : problèmes d'existence et d'approximation faible.

Définition On dit qu'une classe de variétés algébriques satisfait le principe de Hasse si pour tout corps de nombres k et toute telle variété X définie sur k, l'hypothèse $\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v) \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$.

Définition On dit qu'une k-variété algébrique satisfait l'approximation faible si l'image diagonale de $X(k)$ dans $\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$ (ce dernier espace équipé de la topologie produit des topologies v-adiques) est dense.

Notes :

1) Avec cette définition, si une variété satisfait l'approximation faible, alors elle satisfait le principe de Hasse.

2) On a les inclusions $X(k) \hookrightarrow X(\mathbb{A}_k) \subset \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$, la deuxième inclusion étant une égalité si X/k est *propre*. Pour X/k non propre, l'étude de l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)$ est liée au problème de l'approximation forte, qui ne sera pas considérée ici.

Définition On dit qu'une k-variété algébrique satisfait l'approximation faible-faible s'il existe un ensemble fini S de places de k telles que l'image diagonale de $X(k)$ dans $\prod_{v\in\Omega_k, v\notin S} X(k_v)$ est dense.

Théorème (Hasse, Eichler, Kneser, Harder, Platonov, Tchernousov) *Soit k un corps de nombres. Les variétés suivantes satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible :*

a) (Compactifications lisses d') espaces principaux homogènes de groupes semi-simples simplement connexes.

b) Variétés projectives qui sont des espaces homogènes de groupes linéaires connexes.

c) Equations normes $c = N_{K/k}(\Xi)$ lorsque K/k est cyclique.

En dimension un, on trouve les coniques en b) et en c). Parmi les variétés en b), on trouve les quadriques lisses.

Par des transformations algébriques birationnelles, on peut fabriquer d'autres classes de variétés satisfaisant le principe de Hasse. Ainsi : les surfaces de Del Pezzo de degré au moins 5. Des surfaces de degré plus élevé s'y ramènent : surface cubique lisse dans $\mathbf{P}^3_k$ possédant un triplet k-rationnel de droites gauches deux à deux, intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ possédant un doublet k-rationnel de droites gauches, certaines surfaces cubiques singulières.

La méthode utilisée par Hasse pour passer du cas des formes quadratiques à 4 variables à celui de plus de variables peut être généralisée.

Théorème (Méthode élémentaire de fibration) *Soient k un corps de nombres et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, équipée d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ à fibre générique géométriquement intègre. Supposons :*

(i) toutes les fibres géométriques de f ont une composante de multiplicité un ;

(ii) pour tout point fermé $M \in \mathbf{A}^1_k \subset \mathbf{P}^1_k$, la fibre X_M contient une composante de multiplicité un géométriquement intègre sur le corps résiduel $k(M)$;

(iii) pour $M \in \mathbf{P}^1(k)$ à fibre lisse $X_M = f^{-1}(M)$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X_M.

Alors le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X : l'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$.

Exemple 1 Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^*$ et soit $P(t) \in k[t]$ non nul. L'équation $\sum_{i=1}^3 a_i x_i^2 = P(t)$ satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.

Exemple 2 Soit $n \geq 5$ et soient $\{a_i(t)\}_{i=1,\ldots,n}$ des polynômes non nuls. La famille de quadriques $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i^2 = 0$ satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.

Exemple 3 Soit X un modèle projectif et lisse de la variété d'équation : $\sum_{i=1}^4 a_i(t)X_i^2 = 0$ dans le produit $\mathbf{A}^1_k \times_k \mathbf{P}^3_k$, avec $a_i(t) \in k[t]$, tous les a_i non nuls, et tels que tout $p(t)$ irréductible non constant divise au plus l'un des a_i. Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.

Exemple 4 (CT/Sansuc/SwD) Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète de deux quadriques, géométriquement connexe et non conique. Supposons que X contient un point k-rationnel lisse. Pour $n \geq 6$ et, si X est lisse, pour $n \geq 5$, l'approximation faible vaut pour le lieu lisse de X.

Exemple 5 (CT/Sansuc/SwD) Soit $X \subset \mathbf{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques contenant un doublet rationnel de droites gauches. Alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible. Le théorème vaut plus généralement pour $X \subset \mathbf{P}^n_k$, avec $n \geq 4$. Si le doublet est en position suffisamment générale, la méthode de fibration élémentaire s'applique.

Exemple 6 (CT/Salberger) Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$ une hypersurface cubique géométriquement connexe non conique contenant un triplet rationnel de points singuliers en position "suffisamment générale". Alors le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour tout modèle projectif et lisse de X.

La méthode du cercle de Hardy-Littlewood permet de montrer (Davenport, Birch) que les intersections complètes lisses de multidegré $d_1, \ldots, d_r$ dans $\mathbf{P}^n$ satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible lorsque n est suffisamment grand par rapport à la somme des degrés d_i.

Pour une telle intersection complète lisse, de dimension au moins 3, on peut se demander si le principe de Hasse et l'approximation faible valent dès que $n \geq d_1 + \ldots + d_r$, c'est-à-dire lorsque le faisceau anticanonique est (très) ample (la variété est alors une variété de Fano).

Sur $\mathbf{Q}$, en degré 3, Heath-Brown a montré que toute hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ a un point rationnel pour $n \geq 9$, et Hooley a montré que le principe de Hasse vaut pour toute hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^8_{\mathbf{Q}}$.

Les questions du principe de Hasse et de l'approximation faible se posent naturellement dans d'autres contextes, pour un corps k et un ensemble de complétés k_v, $v \in \Omega$. Les cas (a priori plus simples que celui des corps de nombres) où $k = F(C)$ est le corps des fonctions d'une courbe (par exemple la droite projective), le corps F un corps algébriquement clos ou un corps réel clos et Ω est l'ensemble des places de k triviales sur F ont été considérés. Pour F algébriquement clos, des problèmes intéressants se posent sur les k-variétés géométriquement rationnellement connexes. Pour F réel clos, il y a des travaux de Witt, CT, Scheiderer, Ducros, Bayer-Parimala.

6. L'obstruction de Brauer-Manin.

6.1. Contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible

On dispose de contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible parmi les groupes linéaires connexes et leurs espaces homogènes, parmi les courbes de genre un, parmi les courbes de genre plus grand que un, parmi les surfaces rationnelles, etc.

Exemple d'Iskovskih. C'est une surface fibrée en coniques au-dessus de la droite $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$, avec 4 fibres géométriques dégénérées, de modèle affine $y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$.

La plupart de ces contre-exemples se réinterprètent au moyen de la *loi de réciprocité* de la théorie du corps de classes et du *groupe de Brauer* des variétés. Expliquons comment.

Soient k un corps de nombres et Ω_k l'ensemble de ses places. Soit X une k-variété. Soit $\mathcal{X}/O$ un modèle de X/k au-dessus d'un ouvert de l'anneau des entiers de k. Notons $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$. Soit $A \in \mathrm{Br}(X)$. Quitte à restreindre O, on peut supposer que A vient de $\mathcal{A} \in \mathrm{Br}(\mathcal{X})$. Pour toute place finie $v \in \mathrm{Spec}(O)$, et tout point $P_v \in \mathcal{X}(O_v)$, on alors $A(P_v) = 0$. On a donc un accouplement

$$\mathrm{Br}(X) \times X(\mathbb{A}_k) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

défini par

$$(A, \{P_v\}_{v \in \Omega_k}) \mapsto \sum_v \mathrm{inv}_v(A(P_v)) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

On note $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ le sous-ensemble de $X(\mathbb{A}_k)$ orthogonal à $\mathrm{Br}(X)$ pour cet accouplement. La théorie du corps de classes fournit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \oplus_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

De cette suite on déduit immédiatement la :

Proposition (Manin) *Soient k un corps de nombres et X une k-variété quelconque. L'application diagonale $X(k) \to X(\mathbb{A}_k)$ induit une inclusion*

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}.$$

Si $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \emptyset$, alors $X(k) = \emptyset$: c'est l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel.

Supposons X/k *projective*, lisse, géométriquement connexe. On a alors $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ et la topologie est simplement la topologie produit. L'adhérence $\overline{X(k)}$ de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)$ est orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$, on a :

$$\overline{X(k)} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}.$$

On définit à partir de cette remarque l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible.

On dit que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est "la seule" pour X si l'inclusion ci-dessus est une égalité $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

6.2. Cas où l'obstruction de Brauer-Manin "est la seule"

Théorème (Cassels, Manin) *Soient k un corps de nombres et X/k une courbe projective et lisse de genre un. C'est un espace principal homogène sous une courbe elliptique E/k. Si le groupe de Tate-Shafarevich de E est fini, et si $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, alors $X(k) \neq \emptyset$.*

On a des énoncés analogues pour les espaces principaux homogènes d'une variété abélienne A de dimension quelconque. On a aussi des énoncés intéressants sur l'adhérence de $A(k)$ dans $A(\mathbb{A}_k)$ (L. Wang).

Théorème (Scharaschkin) *Soient k un corps de nombres et X/k une courbe projective et lisse de genre $g > 1$. Supposons que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne J de X est fini, que $J(k)$ n'est pas Zariski-dense dans J, et que $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$. Alors $X(k) \neq \emptyset$.*

Théorème (Sansuc 1981, Borovoi 1996 ...) *Soit k un corps de nombres. Soit X une k-compactification lisse d'un espace principal homogène d'un k-groupe G linéaire affine connexe. Supposons les groupes d'isotropie géométriques connexes. Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X sont les seules : $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.*

Théorème (CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer 87, CT90) *Soit k un corps de nombres. Soit X une surface rationnelle fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ avec 4 fibres géométriques singulières. Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X sont les seules : $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.*

Théorème (CT/Sko99) *Soit X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k, soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométrique $Z = X_{\overline{\eta}}$ intègre. Supposons :*

(i) toutes les fibres géométriques ont une composante de multiplicité un ;

(ii) pour tout point fermé de $\mathbf{P}^1_k \setminus S$, la fibre X_P possède une composante de multiplicité un qui est géométriquement intègre sur le corps résiduel $k(P)$, et S consiste en deux points rationnels ou en un point fermé de degré 2 ;

(iii) pour tout k-point M dans un ensemble de Hilbert $\mathcal{H} \subset \mathbf{P}^1(k)$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pourla fibre X_M.

Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour X, on a $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

Théorème (Harari) *Soit X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k, soit $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométrique $Z = X_{\overline{\eta}}$ intègre. Supposons :*

(i) toutes les fibres géométriques ont une composante de multiplicité un ;

(ii) pour tout point fermé de $\mathbf{A}^1_k$, la fibre X_P possède une composante de multiplicité un qui est géométriquement intègre sur le corps résiduel $k(P)$.

(iii) les groupes $H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$ sont nuls pour $i = 1, 2$, et le groupe de Néron-Severi de Z est sans torsion.

(iv) pour tout k-point M dans un ensemble de Hilbert $\mathcal{H} \subset \mathbf{P}^1(k)$, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour la fibre X_M.

Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour X, on a $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

La démonstration de ces énoncés met en oeuvre trois techniques qui interagissent constamment : *fibrations*, *descente* (étude des torseurs sous des k-tores et plus généralement des k-groupes de type multiplicatif), *groupe de Brauer*.

En combinant ces diverses méthodes, on a pu établir la propriété $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ pour un certain nombres d'autres variétés :

(i) les (modèles projectifs et lisses des) hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$, géométriquement intègres et non coniques, possédant un triplet k-rationnel de points singuliers ;

(ii) les (modèles projectifs et lisses des) intersections complètes de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$, $n \geq 4$, géométriquement intègres et non coniques, possédant un doublet k-rationnel de points singuliers ;

(iii) les (modèles projectifs et lisses des) intersections complètes (géométriquement intègres et non coniques) de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geq 8$, (dans ce cas le principe de Hasse vaut) ;

(iv) certaines variétés fibrées en coniques au-dessus du plan projectif, sous des hypothèses fortes sur le degré du lieu de ramification ;

(v) les surfaces intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$, lorsque l'on sait déjà qu'elles possèdent un k-point ;

(vi) les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geq 4$, lorsqu'elles possèdent une droite rationnelle $\mathbf{P}^1_k \subset \mathbf{P}^n_k$.

(La démonstration des deux derniers énoncés utilise en outre la méthode des zéro-cycles, voir le paragraphe 8.)

On a le résultat conditionnel suivant, qui utilise l'hypothèse (H) de Schinzel (Dickson, Bouniakowsky, Hardy-Littlewood), généralisation du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans une progression arithmétique, et de la conjecture des nombres premiers jumeaux :

(H) Si $P_i(t) \in \mathbf{Z}[t]$ sont des polynômes irréductibles (primitifs) à coefficient dominant positif, et si aucun nombre premier ne divise $\prod_i P_i(n)$ pour tout n entier, alors il existe une infinité de $m \in \mathbf{N}$ tels que pour chaque i, l'entier $P_i(m)$ soit premier.

Théorème *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k, munie d'un k-morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ à fibre générique géométriquement intrègre. Supposons :*

(i) Pour chaque point fermé $M \in \mathbf{P}^1_k$, il existe une composante de multiplicité un $Y_M \subset X_M$ de la fibre $X_M = f^{-1}(M)$ telle que la clôture algébrique de $k(M)$ dans le corps des fonctions de Y_M est une extension abélienne de $k(M)$.

(ii) L'hypothèse (H) de Schinzel vaut.

(iii) Pour tout k-point M dans un ensemble de Hilbert $\mathcal{H} \subset \mathbf{P}^1(k)$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pourla fibre X_M. Alors on a $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$: l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule.

Le théorème s'applique par exemple aux familles de variétés de Severi-Brauer. Peut-on se débarrasser de la condition d'abélianité dans la condition (i) ? Cela permettrait d'étendre le résultat aux familles de variétés projectives qui sont des espaces homogènes de groupes linéaires connexes. La question surgit également lorsqu'on essaye d'omettre l'hypothèse (ii) dans le théorème d'Harari cité plus haut, quitte à supposer vraie l'hypothèse (H). Par exemple, même sous l'hypothèse (H), pour K/k une extension biquadratique, nous ne savons pas si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour une variété d'équation $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$.

Dans une série de trois travaux récents (SwD95, CT/Skoro/SwD98, SwD98), pour certaines surfaces fibrées en courbes de genre un au-dessus de la droite projective (parmi lesquelles des surfaces de dimension de Kodaira $-\infty$, 0 et 1), on a établi un énoncé analogue au théorème conditionnel ci-dessus. Les fibres étant des courbes de genre un, on n'a bien sûr pas le principe de Hasse pour elles. En sus de l'hypothèse de Schinzel, on est donc amené à introduire l'hypothèse (plus raisonnable) que les groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques sont finis – ce qui garantit que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule dans les fibres. Comme exemples de surfaces on trouve d'une part certaines surfaces de Del Pezzo de degré 4, définies dans $\mathbf{P}^4$ par l'annulation de deux formes quadratiques *simultanément diagonales*, d'autre part certaines quartiques diagonales dans $\mathbf{P}^3$.

Heath-Brown a récemment obtenu plusieurs résultats conditionnels sur les surfaces et hypersurfaces cubiques diagonales sur $\mathbf{Q}$. Il utilise systématiquement la conjecture de parité de Selmer, qui est une conséquence de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich. L'un de ses énoncés sur les surfaces cubiques suppose en outre une forme de l'hypothèse de Riemann. Un autre de ses énoncés, sur les hypersurfaces cubiques, utilise comme second ingrédient l'hypothèse de Schinzel.

Conjecture *Soient k un corps de nombres et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Soit $p : X \to \mathbf{P}^1_k$ un k-morphisme dominant à fibre générique géométriquement intègre. Supposons :*

(i) la fibre générique est birationnelle à un espace homogène Y d'un groupe algébrique connexe G sur $k(\mathbf{P}^1)$, et le stabilisateur géométrique de l'action de G est connexe ;

(ii) pour tout point fermé $M \in \mathbf{P}^1_k$, la fibre $X_M = p^{-1}(M)$ contient une composante de multiplicité un (hypothèse automatiquement satisfaite si G est linéaire).

Alors $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$. Si en outre G est linéaire, $\overline{X(k)} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

On peut se demander si l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les classes de variétés (projectives, lisses, géométriquement connexes) suivantes (classes ordonnées par inclusion) : surfaces géométriquement rationnelles, variétés géométriquement rationnelles, variétés géométriquement unirationnelles, variétés géométriquement rationnellement connexes (en particulier variétés de Fano).

Pour les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^n_k$ avec $n \geq 4$, la conjecture est que le principe de Hasse vaut. Ceci est connu pour $n \geq 8$ (méthode du cercle, Heath-Brown, Hooley). De même, l'énoncé (iii) (principe de Hasse pour les intersections de deux quadriques) devrait valoir pour $n \geq 6$ et, pour une intersection lisse, pour $n \geq 5$.

Si l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour une variété X, si le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini, alors X satisfait l'approximation faible-faible. S'il en est ainsi, et si le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est nul, alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.

Ces hypothèses sur $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ ne sont pas satisfaites par les courbes de genre un, mais elles sont satisfaites par de nombreuses variétés intéressantes. Soit k un corps, car(k)=0. Soit X/k une variété projective, lisse et géométriquement connexe.

(i) Si $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i = 1, 2$, et si le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est sans torsion, alors $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini.

(ii) Si en outre le groupe de Néron-Severi géométrique $\mathrm{NS}(\overline{X})$ est un module de permutation (par exemple s'il est égal à $\mathbf{Z}$), alors $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est nul.

La condition (i) est satisfaite par les variétés rationnellement connexes, par exemple les variétés de Fano et les variétés géométriquement unirationnelles. La condition (ii) est satisfaite par les intersections complètes lisses (de multidegré quelconque) de dimension au moins 3 dans l'espace projectif.

Soit G un groupe fini. Soit $\mathbf{A}^n_k$ un espace affine sur lequel G agit génériquement librement. Soit X un k-modèle projectif et lisse du quotient. C'est clairement une k-variété unirationnelle. Si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible sur X était la seule, l'approximation faible-faible vaudrait pour X. Ceci impliquerait que G est un groupe de Galois sur le corps de nombres k.

6.3. Au-delà de l'obstruction de Brauer-Manin

Pour quelles classes de variétés (projectives, lisses, géométriquement connexes) sur un corps de nombres k peut-on espérer que l'obstruction au principe de Hasse et/ou à l'approximation faible est la seule ?

Dans la mesure où l'on pense que les points rationnels ne sont pas Zariski denses sur les variétés de type général définies sur k, et où parmi celles-ci on en connaît pour lesquelles le groupe de Brauer est trivial, i.e. réduit à l'image du groupe de Brauer du corps k (hypersurfaces lisses de degré au moins $n+1$ dans $\mathbf{P}^n$ pour $n \geq 4$), il était peu vraisemblable que cela fût toujours le cas.

Sarnak et Wang montrèrent sur un exemple que si l'obstruction au principe de Hasse était toujours la seule, alors la conjecture de Lang que toute k-variété "hyperbolique" n'a qu'un nombre fini de points rationnels sur k serait en défaut. Poonen (non publié) a montré : s'il existe une intersection complète lisse X de dimension $d \geq 2, d < n$ dans $\mathbf{P}^n_k$ telle que l'adhérence Zariski des points k-rationnels soit non vide et de dimension au plus un, alors il existe une intersection complète lisse Y de dimension d dans $\mathbf{P}^n_k$ telle que $Y(k) = \emptyset$ et $Y(\mathbb{A}_k) = \emptyset$. (Pour $n = 3$ et X une hypersurface lisse de degré au moins 5 possédant un point rationnel, on s'attend à ce que l'hypothèse sur les points rationnels soit satisfaite.) Sarnak et Wang utilisaient la méthode des fibrations élémentaires, Poonen utilise des revêtements ramifiés.

Le premier (et jusqu'à présent le seul) exemple inconditionnel de k-variété projective lisse X avec $X(k) = \emptyset$ et $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ est dû à Skorobogatov : il s'agit d'une surface bielliptique.

Des exemples avec $X(k) \neq \emptyset$ mais $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \overline{X(k)}$ ont été par la suite donnés par Harari. Les exemples de Skorobogatov et d'Harari sont des variétés dont le groupe fondamental géométrique n'est pas abélien. Skrobogatov et Harari interprètent leurs contre-exemples en termes de torseurs sous des groupes finis non abéliens.

Par ailleurs Borovoi et Kunyavskiĭ ont donné des exemples de variétés lisses ouvertes U qui sont des espaces homogènes sous un groupe linéaire connexe, à stabilisateur géométrique un groupe fini non abélien (mais nilpotent de longueur 2), avec $U(k) = \emptyset$. Dans leurs exemples, on ne sait pas si une k-compactification lisse X de U possède un k-point. Comme le remarque Harari, de leur article on doit déduire $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$. Borovoi et Kunyavskiĭ ont des exemples analogues où l'approximation faible est en défaut. Il serait intéressant d'analyser ces exemples plus avant.

7. Zéro-cycles

Soit X une k-variété projective et liise, géométriquement connexe. On appelle zéro-cycle une combinaison linéaire à coefficients entiers de points fermés de X. On note $Z_0(X)$ le groupe des zéro-cycles. Etant donné un zéro-cycle $\sum_P n_P P$, son degré (sur k) est l'entier $\sum_P n_P[k(P):k]$, où $k(P)$ est le corps résiduel en P. Le quotient du groupe $Z_0(X)$ par l'équivalence rationnelle est le groupe de Chow $CH_0(X)$. L'application degré passe au quotient par l'équivalence rationnelle, on note $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le noyau. On dispose d'une application naturelle

$$\mathrm{alb}: \ A_0(X) \to \mathrm{Alb}_X(k)$$

dans le groupe des points k-rationnels de la variété d'Albanese de X.

Questions (Bass, Beilinson/Bloch) *Si k est un corps de nombres, le groupe $CH_0(X)$ est-il un groupe de type fini ? L'application* alb *est-elle un isomorphisme modulo torsion ?*

Pour X de dimension un, il en est ainsi, par le théorème de Mordell-Weil. En dimension supérieure, on ne connaît aucun résultat de finitude (génération finie) non trivial sur $CH_0(X)\otimes \mathbf{Q}$. On a quelques résultats de finitude sur la torsion de $CH_0(X)$.

Pour k un corps de nombres, on sait que $A_0(X)$ est fini si X est une surface rationnelle, ou si X est fibrée en variétés de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré au-dessus de la droite projective (sous l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$, l'énoncé vaut pour k de type fini sur $\mathbf{Q}$).

Pour k un corps de nombres, et X/C une variété fibrée en variétés de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré au-dessus d'une courbe projective et lisse C, le noyau de l'application de projection $CH_0(X) \to CH_0(C)$ est un groupe fini. Le groupe $CH_0(X)$ est donc de type fini. (Il serait intéressant d'étudier ce problème lorsque la courbe C est remplacée par une surface.)

Pour k un corps de nombres, et X/k une surface telle que $p_g = H^0(X, K_X) = 0$, le sous-groupe de torsion de $A_0(X)$ est fini. On a quelques résultats analogues pour des surfaces du type $E \times_{\mathbf{Q}} E$, avec $E/\mathbf{Q}$ une courbe elliptique.

Soit k un corps, X une k-variété. Soit $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer de X et $\alpha(P) \in \mathrm{Br}(k(P))$ l'évaluation en P d'un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$. Notons $(\alpha, P) = \mathrm{Cores}_{k(P)/k}(\alpha(P)) \in \mathrm{Br}(k)$. L'accouplement $\mathrm{Br}(X) \times Z_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$ envoyant le couple $(\alpha, \sum_P n_P P)$ sur $\sum_P n_P(\alpha, P) \in \mathrm{Br}(k)$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle et définit un accouplement blilinéaire $\mathrm{Br}(X)\times CH_0(X) \to \mathrm{Br}(k)$. Soit k un corps de nombres, Ω l'ensemble de ses places. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Procédant comme au §6.1, on définit un accouplement

$$\mathrm{Br}(X) \times \prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \tag{8.1}$$

envoyant le couple $(\alpha, \{z_v\}_{v\in\Omega})$ sur $\sum_{v\in\Omega}(\alpha, z_v)$. La loi de réciprocité du corps de classes global assure que l'image diagonale de $CH_0(X)$ dans $\prod_{v\in\Omega} CH_0(X_v)$ est dans le noyau de cet accouplement. On a les conjectures suivantes :

Conjecture 1 *Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. S'il existe une famille $\{z_v\}_{v\in\Omega}$ de zéro-cycles de degré un qui est orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$ par l'accouplement (8.1), alors il existe un zéro-cycle de degré un sur X.*

Conjecture 2 *Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Le complexe*

$$\varprojlim_n A_0(X)/n \to \prod_{v\in\Omega} \varprojlim_n A_0(X_v)/n \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \tag{0.2}$$

est exact.

Lorsque X est une courbe dont la jacobienne a un groupe de Tate-Shafarevich fini, ces conjectures sont connues. Elles sont des réinterprétations (Manin, Saito, CT) de résultats classiques ("suite duale" de Cassels-Tate).

Pour les surfaces rationnelles (surfaces birationnelles au plan projectif après extension finie du corps de base), ces conjectures avaient été proposées par Sansuc et l'auteur dans [CT/S81]. Les conjectures originales de [CT/S81] furent établies par Salberger [Sal88] pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective $\mathbf{P}^1_k$.

On peut voir la méthode de Salberger comme un substitut à l'hypothèse de Schinzel. Le slogan est : quitte à passer dans une extension finie bien choisie de $\mathbf{Q}$, on peut trouver des nombres premiers jumeaux. Plus précisément :

Proposition *Pour tout entier $N \geq 2$, il existe une infinité d'extensions de corps $K/\mathbf{Q}$ de degré N pour lesquelles il existe un entier algébrique $\theta \in K$, des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ dans l'anneau des entiers O_K de K, et des idéaux premiers $\mathfrak{p}_2$ et $\mathfrak{q}_2$ de O_K au-dessus de l'idéal premier (2), tels que l'on ait dans O_K les décompositions d'idéaux premiers*

$$(\theta) = \mathfrak{p}.\mathfrak{p}_2, \quad (\theta+2) = \mathfrak{q}.\mathfrak{q}_2.$$

La méthode de Salberger peut s'appliquer à d'autres variétés fibrées au-dessus de la droite projective. Ainsi, dans [CT/SwD94], nous avons étudié les conjectures 1 et 2 sur les variétés de dimension quelconque fibrées au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, la fibre générique étant une variété de Severi-Brauer "généralisée", et dans [CT/Sk/SwD97] nous avons obtenu des résultats sous des hypothèses plus générales sur la fibre générique et les fibres spéciales de la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$.

Récemment, j'ai établi une partie des conjectures ci-dessus pour les surfaces réglées X/C au-dessus d'une courbe C de genre quelconque, sous l'hypothèse que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de C est fini.

Il serait temps de déterminer si la surface de Skorobogatov (exemple où l'obstruction de Brauer-Manin ne suffit pas à rendre compte de l'absence d'un point rationnel) possède un point dans une extension de degré impair, comme prédit par la conjecture 1 ci-dessus.

Par ailleurs il conviendrait d'étudier les conjectures 1 et et 2 pour les surfaces fibrées en courbes de genre un considérées dans [CT/Sko/SwD98Inv] : il n'est pas clair comment y remplacer l'hypothèse de Schinzel par l'astuce de Salberger.