Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique
Cours au C.I.M.E., juin 1991

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématique
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex

L'objet de ce cours est de décrire certaines applications qu'a eues la K-théorie algébrique à l'étude des cycles de torsion sur les variétés algébriques, et plus particulièrement à l'obtention de théorèmes de finitude, sous diverses hypothèses arithmétiques sur la nature du corps de base. Ce domaine de recherches fut ouvert par Spencer Bloch en 1974, connut de nouveaux développements à la suite de la percée de Merkur'ev et Suslin en 1982, et a fait l'objet d'un rapport de W. Raskind en 1989 ([R1]).

Une série de travaux récents montre que le sujet est loin d'être épuisé, et il m'a donc semblé bon de faire à nouveau le point.

La première partie de mes exposés au C.I.M.E. fut consacrée aux résultats classiques, qu'on trouvera dans les paragraphes 1 à 5. Après un rappel des résultats de finitude connus sur le groupe de Picard (§ 1), on définit au § 2 les groupes de Chow et on décrit au § 3 le programme de Spencer Bloch pour contrôler la torsion dans ces groupes de Chow. Au § 4, le lecteur trouvera une démonstration simple du théorème de Roitman sur les zéro-cycles de torsion lorsque le corps de base est algébriquement clos, sans réduction au cas des surfaces. Passant au cas d'un corps de base fini, on esquisse au § 5 la démonstration simplifiée (Raskind et l'auteur) du théorème de Kato et Saito sur les extensions non ramifiées de variétés projectives et lisses sur un corps fini et le groupe de Chow en dimension zéro. On explique également le théorème de finitude (Sansuc, Soulé et l'auteur) pour la torsion en codimension deux.

Les paragraphes 6 à 9, qui développent mes deux derniers exposés au C.I.M.E., sont consacrés à des résultats récents (1989–1991) de Raskind et l'auteur [CR3], de Salberger [Sb2], et de S. Saito [S4], résultats qui portent sur la finitude de la torsion du groupe de Chow en codimension deux pour une variété projective et lisse X, définie sur un corps k arithmétique (local ou global), et satisfaisant l'hypothèse que le second groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ s'annule. Les premiers résultats de finitude pour cette torsion avaient été obtenus sous l'hypothèse additionnelle $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. C'est Salberger qui montra comment éliminer cette dernière hypothèse lorsque k est un corps de nombres.

L'approche de Raskind et de l'auteur, au-dessus d'un corps de nombres, est décrite au § 6. J'ai inclus dans ce paragraphe une brève esquisse de la méthode galoisienne, qui avait déjà permis dans le passé d'obtenir des résultats de finitude pour certaines variétés (Bloch [B4], l'auteur [C1], Gros [G], Ōkōchi, et plus récemment Coombes [Cb], sur un corps global; Raskind et l'auteur [CR1], sur un corps local). L'approche plus récente de S. Saito [S4] fait l'objet du § 7. Je me suis astreint à bien dégager les énoncés valables au-dessus d'un corps quelconque. Cette démarche permet d'obtenir certains résultats de finitude au-dessus d'un corps de type fini sur le corps des rationnels. Au § 8, je décris les résultats que cette même approche permet d'obtenir au-dessus d'un corps local. Enfin, au § 9, je donne quelques indications sur l'approche de Salberger, renvoyant à sa récente prépublication [Sb2] pour plus de détails.

J'ai arrêté là ce rapport sur les cycles de torsion. Parmi les thèmes que je ne traite pas, mais qui méritent l'intérêt du lecteur, je citerai :

– Les conjectures et résultats très précis sur le groupe de Chow des zéro-cycles sur une surface rationnelle définie sur un corps de nombres (travaux de Sansuc et l'auteur [CS], et de Salberger [Sb1]), qu'on voudrait bien voir généraliser, au moins conjecturalement, à de plus vastes classes de variétés. Dans l'immédiat, on aimerait traiter le cas de surfaces satisfaisant

$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, cas où les approches précises de Coombes [Cb] (que je ne traite pas ici) et de Saito [S4] pourraient se révéler utiles.

– Les travaux en cours de Bloch et de ses élèves sur la torsion du groupe de Chow de certaines surfaces X au-dessus d'un corps de nombres avec $H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ (sur un corps local, voir [R2]).

– Les exemples de torsion dans le groupe de Griffiths dus à C. Schoen [Sc].

Plan

Remerciements. L'influence des travaux de Spencer Bloch sur tout ce sujet est manifeste.
Pour les discussions que j'ai eues avec eux dans le passé lointain ou proche, je salue S. Bloch, S. Saito, P. Salberger, J.-J. Sansuc, C. Soulé et tout particulièrement W. Raskind.

Je remercie la Fondazione Centro Internationale Matematico Estivo de m'avoir donné l'occasion de m'éclaircir un peu plus les idées et de fouler les rues de Trento et de Verone.

Une version préliminaire de ce cours a fait l'objet d'un exposé en Septembre 1989 au Centre Culturel Européen de Delphes, que je souhaite aussi remercier pour son invitation.

Notations.

Etant donné un groupe abélien A et un entier $n > 0$, on note ${}_nA$ le sous-groupe des éléments de A annulés par n, on note A/n le quotient A/nA. On note A_{tors} le sous-groupe de torsion de A, et on pour l premier, on note A_{l-tors} le sous-groupe de torsion l-primaire, i.e. le sous-groupe formé des éléments annulés par une puissance de l.

Etant donné un anneau unitaire R, on note R^* le sous-groupe multiplicatif formé des éléments inversibles de R.

Etant donné un entier n inversible sur un schéma X, on note μ_n le faisceau étale sur X défini par le schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité. Pour j entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le produit tensoriel j fois de μ_n avec lui-même, on note $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/n$. Pour j négatif, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le faisceau étale $Hom_X(\mu_n^{\otimes -j}, \mathbf{Z}/n)$. Enfin, étant donnés un nombre premier l inversible sur X et $j \in \mathbf{Z}$, on note $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(j)$ la limite inductive des faisceaux $\mu_{l^n}^{\otimes j}$ pour n tendant vers l'infini.

Par $H^i(X, \mathcal{F})$ (sans indice) on notera le i-ième groupe de cohomologie sur le schéma X, pour la topologie de Zariski sur X, à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$. On fera cependant parfois une exception , en notant $H^i(k, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne du groupe de Galois absolu $G = Gal(\overline{k}/k)$ à valeurs dans un G-module continu discret M, ou, si l'on préfère, le i-ème groupe de cohomologie étale à valeurs dans un faisceau étale M sur le spectre Spec(k) du corps k.

§ 1. Groupe de Picard d'une variété

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats très classiques sur l'équivalence linéaire des diviseurs, que nous confronterons dans les paragraphes suivants avec la situation bien plus complexe des cycles de codimension plus grande que 1.

Soit k un corps, X une variété algébrique lisse et irréductible sur le corps k. On désignera par $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles, et par $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de X, c'est-à-dire le groupe abélien libre de générateurs les points de codimension 1 de X :

$$\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{P \in X^{(1)}} \mathbf{Z}.$$

Chaque anneau local de X en un tel point P est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $k(X)$, ce qui permet de définir un homomorphisme

$$v_P : k(X)^* \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

On définit alors alors le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de la variété X comme le conoyau de l'application *diviseur*

$$\mathrm{div} = \bigoplus_{P \in X^{(1)}} v_P : k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X),$$

c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :

$$k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0.$$

Le groupe de Picard admet plusieurs représentations. De la description ci–dessus, et de l'identification, sur une variété lisse (donc localement factorielle), des diviseurs de Weil (combinaisons linéaires à coefficients entiers de sous–variétés de codimension 1) aux diviseurs de Cartier (définis localement pour la topologie de Zariski comme diviseurs d'une fonction) on déduit facilement l'identification :

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1_{Zar}(X, \mathcal{O}_X^*) = H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m),$$

où la cohomologie est la cohomologie de Zariski.

Par ailleurs, une version du théorème 90 de Hilbert due à Grothendieck montre que sur tout schéma, il y a une identification :

$$H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1_{et}(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m),$$

avec le groupe de cohomologie étale (ou encore avec le groupe de cohomologie $fppf$) à valeurs dans le faisceau défini par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$.

Lorsque X est une courbe projective et lisse C, les points de codimension 1 sur C s'identifient aux points de dimension 0, et l'on dispose d'une application degré :

$$\deg = \bigoplus_{P \in C^{(1)}} \mathbf{Z}P \longrightarrow \mathbf{Z}$$

définie par linéarité à partir de l'application qui associe au point fermé P de C le degré $[k(P) : k]$ de P relativement à k, et une formule classique dit que cette application est triviale sur les diviseurs de fonctions, i.e. induit une application degré de $\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$.

Les énoncés suivants rassemblent les propriétés les plus importantes du groupe de Picard.

PROPOSITION 1.1. — *Supposons la variété lisse X absolument irréductible et complète (par exemple projective). Soit $k \subset F$ une inclusion de corps, et soit $X_F = X \times_k F$. Alors l'application naturelle* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_F)$ *est injective.*

Lorsque F/k est une extension galoisienne (qu'on peut supposer finie), la démonstration repose sur le théorème 90 de Hilbert : $H^1(\mathrm{Gal}(F/k), F^*) = 0$. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, puis $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On peut en fait montrer qu'on a une suite exacte fonctorielle :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow Br(k),$$

où $Br(k) = H^2(G, \overline{k}^*)$. L'image de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow Br(k)$ est annulée par tout entier $[E : k]$ pour E/k extension finie sur laquelle X acquiert un point rationnel. En particulier, la flèche $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G$ est un isomorphisme dès que X a un point k-rationnel. $\square$

THÉORÈME 1.2. — *Supposons la variété lisse X absolument irréductible et complète (par exemple projective). Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, puis $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Il existe une variété abélienne J/k (la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ de X) et un groupe abélien de type fini, le groupe de Néron–Severi $NS(\overline{X})$ de $\overline{X}$, tels que l'on ait une suite exacte*

$$0 \longrightarrow J(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow NS(\overline{X}) \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

Cette suite exacte est G-équivariante. Lorsque X est une courbe, $NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ et l'application $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ *est induite par l'application degré.* $\square$

PROPOSITION 1.3. — *Soit X une variété irréductible et lisse sur un corps k. Pour tout entier n inversible dans k, on dispose d'une application injective :*

$$\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2_{et}(X, \mu_n). \tag{1.2}$$

Pour obtenir cette injection, il suffit de prendre la suite exacte de cohomologie étale associée à la suite de Kummer

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 1 \\ & & & & x & \longmapsto & x^n\,. & & \end{array}$$

On notera qu'un bout de la suite exacte en question s'écrit :

$$k[X]^*/k[X]^{*n} \longrightarrow H^1_{et}(X, \mu_n) \longrightarrow {}_n\,\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

$\square$

PROPOSITION 1.4. — *Soit X une k-variété lisse irréductible et U un ouvert non vide de X. On dispose d'une suite exacte :*

$$k[X]^* \longrightarrow k[U]^* \longrightarrow \mathrm{Div}_{X \setminus U}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Ici $k[X]^*$, resp. $k[U]^*$, désigne le groupe des fonctions inversibles sur X, resp. sur U, et $\mathrm{Div}_{X\setminus U}(X)$ le groupe des diviseurs de X à support en dehors de U, qui est un groupe libre de type fini.

La démonstration de cette proposition de localisation est élémentaire. $\square$

Ces énoncés sont à la base des divers théorèmes de finitude pour le groupe de Picard.

PROPOSITION 1.5. — *Pour toute variété irréductible propre et lisse X sur un corps k et tout entier $n > 0$, le groupe des points de n-torsion, ${}_n\operatorname{Pic}(X)$ est fini. Ceci vaut encore pour tout ouvert U d'une telle variété.*

(D'après Hironaka, en caractéristique zéro, toute k-variété lisse est un ouvert d'une k-variété propre et lisse).

Démonstration : En utilisant la suite de localisation (1.4) et le fait que $\operatorname{Div}_{X\setminus U}(X)$ est un groupe de type fini, on voit que l'énoncé pour U résulte de l'énoncé pour X. D'après la proposition 1.1, ${}_n\operatorname{Pic}(X)$ s'injecte dans ${}_n\operatorname{Pic}(\overline{X})$. La finitude de ce dernier groupe résulte alors du théorème de structure 1.2, du fait que le groupe de Néron–Severi est de type fini, et du fait que sur un corps algébriquement clos, les points de n-torsion d'une variété abélienne forment un groupe fini. $\square$

Remarque 1.5.1. : Lorsque n est inversible dans k, en utilisant la suite (1.3), on obtient pour toute k-variété X et n inversible dans k, une surjection

$$H^1_{et}(X, \mu_n)/H^1_{et}(\operatorname{Spec}(k), \mu_n) \twoheadrightarrow {}_n\operatorname{Pic}(X).$$

Pour X absolument intègre, le groupe de gauche s'identifie à un sous-groupe de $H^1_{et}(\overline{X}, \mu_n)$. Or, de façon tout à fait générale, les groupes $H^i_{et}(\overline{X}, \mu_n)$ sont finis (en caractéristique, 0, SGA 4 XIX Springer LNM **305**; en général, Deligne, Théorèmes de finitude, in [SGA4 1/2]).

PROPOSITION 1.6. — *Si k est un corps fini, et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k, le groupe $\operatorname{Pic}(X)$ est un groupe de type fini. En particulier son sous-groupe de torsion $\operatorname{Pic}(X)_{tors} \subset \operatorname{Pic}(X)$ est fini.*

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1, qui donne une injection $\operatorname{Pic}(X) \subset \operatorname{Pic}(\overline{X})^G$ (où $G = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ (cette inclusion est en fait ici un isomorphisme), du théorème 1.2 (suite exacte G-équivariante (1.1) et engendrement fini de $NS(\overline{X})$) et de la finitude de $J(\overline{k})^G = J(k)$ qui est le groupe des points k-rationnels d'une k-variété algébrique sur le corps fini k. $\square$

PROPOSITION 1.7. — *Soient k un corps p-adique (extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$) et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k. Alors le groupe $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration : Utilisant les énoncés 1.1 et 1.2 comme ci-dessus, on est ramené à voir que le groupe $J(k)_{tors}$ est fini. Mais comme J est une k-variété abélienne et k un corps p-adique, le groupe des points k-rationnels $J(k)$ est un groupe analytique p-adique commutatif compact. Il contient donc un sous-groupe ouvert U d'indice fini isomorphe à un produit R^q, où R est le groupe (additif) des entiers de k et q est la dimension de J. La torsion de $J(k)$ s'injecte donc dans le quotient fini $J(k)/U$. $\square$

Remarque 1.7.1. : De cette proposition, on peut déduire la finitude de $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ lorsque X est une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps k de type fini sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (i.e. engendré, comme corps, par un nombre fini déléments). Choisissons en effet un nombre premier p. Comme le corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ est de degré de transcendance infini sur $\mathbb{Q}$, on peut trouver une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ et des plongements de corps $\mathbb{Q} \subset k \subset L$. D'après la proposition 1.1, on a une inclusion $\operatorname{Pic}(X) \subset \operatorname{Pic}(X_L)$, et donc aussi $\operatorname{Pic}(X)_{tors} \subset \operatorname{Pic}(X_L)_{tors}$. La finitude de $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ résulte alors de celle de $\operatorname{Pic}(X_L)_{tors}$ (proposition ci-dessus).

PROPOSITION 1.8. — *Soient k un corps p-adique (extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$) et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k. Alors pour tout entier $n > 0$, le quotient* $\mathrm{Pic}(X)/n$ *est fini.*

Démonstration : Du théorème 1.2 on déduit que le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$ s'insère dans une suite exacte :

$$J(k)/n \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n \longrightarrow T/n$$

avec T un groupe abélien de type fini. La structure de $J(k)$ rappelée dans la démonstration précédente implique immédiatement la finitude de $J(k)/n$ et donc celle de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$. On sait que le groupe de Brauer $Br(k)$ d'un corps local est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La finitude de $\mathrm{Pic}(X)/n$ résulte alors de celle de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$ et de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow {}_mBr(k),$$

où $m > 0$ est le degré d'une extension de k sur laquelle X acquiert un point rationnel. ▯

Remarque 1.8.1. : On peut donner une autre démonstration, plus générale. Soit k comme ci-dessus et X une k-variété quelconque. D'après (1.2) on a une injection

$$\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2_{et}(X, \mu_n).$$

Mais la finitude des groupes de cohomologie $H^i_{et}(\overline{X}, \mu_n)$ pour tout i rappelée plus haut, la suite spectrale de Hoschschild–Serre

$$H^p(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), H^q_{et}(\overline{X}, \mu_n)) \Longrightarrow H^*_{et}(X, \mu_n)$$

et la finitude des groupes de cohomologie galoisienne de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ à valeurs dans des modules finis (Serre, Cohomologie Galoisienne, Springer LNM **5**) assurent la finitude de tous les groupes $H^m_{et}(X, \mu_n)$ pour X une variété sur un corps p-adique k.

THÉORÈME 1.9. — *Soit k un corps de type fini sur le corps premier, et soit X une k-variété intègre propre et lisse, puis U un ouvert de X. Alors les groupes* $\mathrm{Pic}(X)$ *et* $\mathrm{Pic}(U)$ *sont des groupes de type fini. En particulier leurs sous-groupes de torsion sont des groupes finis, et pour tout entier $n > 0$, le quotient* $\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X)$ *est fini.*

"Démonstration" : La suite de localisation (1.4) permet de se ramener au cas de X, et d'après la proposition 1.1, il suffit de savoir que pour une k-variété abélienne J, le groupe $J(k)$ est de type fini. Lorsque k est un corps de nombres, c'est là précisément l'énoncé du théorème de Mordell–Weil. Le cas plus général d'un corps k de type fini sur le corps premier est traité par exemple par Lang dans son livre *Diophantine Geometry.* ▯

Remarque 1.9.1. : La démonstration complète du théorème ci-dessus représente l'un des grands succès de la géométrie diophantienne des années 30–50, et l'esquisse ci-dessus est loin d'en donner une juste représentation. En fait, il y a un théorème de Mordell–Weil *faible*, qui dit que pour un entier $n > 0$ et k de type fini sur le corps premier, le quotient $J(k)/n$ est un groupe fini. Ensuite on développe la théorie de la hauteur sur les variétés abéliennes pour déduire du théorème de Mordell–Weil faible le théorème *fort* que $J(k)$ est de type fini. Ceci du moins est le plan lorsque k est un corps de nombres. D'autres arguments sont nécessaires pour traiter le cas d'un corps de type fini sur le corps premier, et aussi pour établir le théorème de Néron–Severi affirmant que le groupe de Néron–Severi est de type fini. Au vu de l'analogie bien connue entre les arguments de Mordell–Weil et ceux de Néron–Severi, on peut se demander, déjà sur un corps de nombres, si une bonne théorie des hauteurs permettrait d'établir que $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini, directement à partir de la finitude de $\mathrm{Pic}(X)/n$, sans dévissage du groupe $\mathrm{Pic}(X)$.

Remarque 1.9.2. : Le principe de la démonstration du théorème de Mordell–Weil faible est le suivant, au moins sur un corps de nombres. On utilise l'injection

$$J(k)/nJ(k) \hookrightarrow H^1_{et}(k, {}_nJ)$$

et l'on montre en s'appuyant sur la propreté de J/k, que l'image de cette injection consiste de classes non ramifiées en dehors des places de mauvaise réduction de J et des places divisant n. On montre par ailleurs que ces classes non ramifiées forment un groupe fini.

Une autre façon de voir les choses, au moins pour n inversible dans le corps de type fini k, est d'insérer la flèche (1.2) dans un diagramme commutatif, où les flèches horizontales sont des injections,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pic}(\mathbf{X})/n\,\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & H^2_{et}(\mathbf{X}, \mu_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & H^2_{et}(X, \mu_n),
\end{array}$$

où $\mathbf{X}$ est un modèle régulier de la k–variété lisse X, modèle qui est de type fini au–dessus soit d'un corps fini si $car(k) > 0$, soit, si $car(k) = 0$, d'un ouvert non vide de Spec($\mathbf{Z}$) où n est inversible. La régularité de $\mathbf{X}$ assure la surjectivité de la flèche verticale de gauche, et la simple hypothèse que $\mathbf{X}$ est de type fini au–dessus de S assure la finitude des groupes $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mu_n)$ (voir [M2], II, 7.1, qui s'appuie d'une part sur le théorème de finitude de Deligne in [SGA41/2], d'autre part sur le calcul de la cohomologie étale des anneaux d'entiers de corps de nombres). Il convient de constater que la démonstration ci–dessus vaut sans hypothèse de propreté pour X/k.

L'avantage de cette démonstration est, comme l'a noté S. Saito ([S4]), qu'elle s'étend en partie dans l'étude des cycles de codimension supérieure (§ 7 ci–après, théorème 7.5).

§ 2. Groupes de Chow

(Référence : Fulton [F] Chapitre I)

La définition donnée au paragraphe précédent du groupe de Picard admet une généralisation naturelle aux cycles de (co)dimension quelconque.

Suivant Fulton, voici les définitions et propriétés de base. La théorie *homologique*, avec ses définitions valables pour des schémas éventuellement singuliers, est plus naturelle que l'ancienne théorie de l'équivalence rationnelle.

Soit k un corps et X une k–variété algébrique, i.e. un schéma de type fini et séparé sur k. Rappelons la bijection naturelle entre les points (au sens des schémas) du schéma X et les sous–schémas fermés intègres de X, associant à un point P son adhérence schématique $V(P)$, dont le point générique n'est autre que P. La dimension de P est alors par définition celle de $V(P)$. C'est aussi le degré de transcendance sur k du corps résiduel $k(P)$ de l'anneau local de X en P. Il sera commode de remplacer l'ancien langage des sous–variétés fermées par celui des points schématiques.

On définit le groupe des cycles de dimension i sur X comme le groupe libre $Z_i(X)$ sur les points de X de dimension i.

Tout k–morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ de tels schémas induit une application $f_* : Z_i(X) \longrightarrow Z_i(Y)$. Cette application est définie par linéarité à partir de l'application qui à un point P de X de dimension i associe le cycle 0 si le point $f(P)$ est de dimension plus petite que i, et associe le cycle $[k(P) : k(f(P))]P \in Z_i(Y)$ si $f(P)$ a même dimension que P, l'indice $[k(P) : k(f(P))]$ étant alors le degré de l'extension finie $k(P)/k(f(P))$ de corps résiduels.

Etant donnés une k–variété intègre Y de dimension d et $f \in k(Y)^*$ un élément de son corps des fonctions rationnelles, on peut définir le diviseur $\mathrm{div}(f)$ de f comme un élément de $Z_{d-1}(Y)$. Lorsque Y est normale, ses anneaux locaux réguliers aux points P de codimension 1 sont des anneaux de valuation discrète, définissant une valuation $v_P : k(Y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. On définit alors, suivant Weil, $\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in Y^{(1)}} v_p(f)P$. Pour Y intègre quelconque, il est encore possible de définir $\mathrm{div}(f) \in Z_{d-1}(Y)$, soit en ayant recours à des longueurs d'anneaux artiniens, soit en utilisant la normalisée $r : Y_n \longrightarrow Y$ de Y, et en définissant $\mathrm{div}_Y(f) = r_* \,\mathrm{div}_{Y_n}(f)$.

Une formule très utile dit que pour $p : X \longrightarrow Y$ un k–morphisme propre surjectif de variétés intègres (irréductibles et réduites) de même dimension, donc tel que l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ est finie, et $f \in k(X)^*$, on a $p_*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(N_{k(X)/k(Y)}(f))$, où N désigne la norme.

Etant donnés une k–variété algébrique X et un entier $i \geq 0$, on définit alors le groupe de Chow $CH_i(X)$ de dimension i comme le quotient de $Z_i(X)$ par le sous–groupe engendré par les $p_*(\mathrm{div}(f))$, pour tous les $p : Z \longrightarrow X$ k–morphismes propres $p : Z \longrightarrow X$ d'une k–variété intègre Z de dimension $(i+1)$ et pour toutes les fonctions rationnelles f non nulles sur un tel Z. Dans cette définition, on peut se limiter aux k–morphismes birationnels sur leur image. On peut de plus se limiter soit aux Z normales, soit aux sous–variétés fermées, mais non nécessairement normales, $Z \subset X$.

Lorsque la k–variété X est équidimensionnelle de dimension d, on considère aussi les groupes de Chow $CH^i(X) = CH_{d-i}(X)$.

Propriétés de base des groupes de Chow

1) *Fonctorialité covariante par k–morphismes propres.* Tout k–morphisme propre de k–variétés intègres $f : X \longrightarrow Y$ induit un homomorphisme $f_* : CH_i(X) \longrightarrow CH_i(Y)$. Ceci se voit en utilisant la formule ci–dessus.

2) *Fonctorialité contravariante par morphismes plats.* Si $f : X \longrightarrow Y$ est un k–morphisme plat de dimension relative n, on définit de façon naturelle des morphismes $f^* : CH_i(Y) \longrightarrow CH_{i+n}(X)$, soit, pour X et Y équidimensionnels, $f^* : CH^j(Y) \longrightarrow CH^j(X)$.

3) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini et plat de degré d, le composé

$$CH_i(Y) \xrightarrow{f^*} CH_i(X) \xrightarrow{f_*} CH_i(Y)$$

est la multiplication par d.

4) *Suite de localisation.* Si $i : Y \subset X$ est l'inclusion d'une sous–variété fermée, et $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion de l'ouvert complémentaire de X et $i \geq 0$ un entier, on a la suite exacte :

$$CH_i(Y) \xrightarrow{i_*} CH_i(X) \xrightarrow{j^*} CH_i(U) \longrightarrow 0.$$

5) *0–cycles.* Soit X une k–variété propre. Le morphisme structural $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ induit un homomorphisme $CH_0(X) \longrightarrow CH_0(\mathrm{Spec}(k)) = \mathbf{Z}$, appelé l'application degré, qui associe à (la classe d') un 0–cycle $\sum n_P P$ l'entier $\sum n_P P[k(P) : k]$. On note $A_0(X)$ le noyau de cet homomorphisme.

Le groupe $A_0(X)$ est un invariant k–birationnel des k–variétés intègres propres et lisses, comme on le voit ([F], 16.1.11) en utilisant des correspondances et le lemme de déplacement (valable pour les 0–cycles sur une variété lisse quelconque).

Sur un corps k algébriquement clos, pour toute k–variété projective et irréductible, le groupe $A_0(X)$ est un groupe divisible (ceci se voit par réduction au cas des courbes lisses projectives).

Pour X projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k, de variété d'Albanese $\underline{\mathrm{Alb}}_X$ (c'est la duale de la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$), on dispose d'une application canonique

$$\mathrm{alb} : A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$$

dans le groupe des points k–rationnels de X. Cette application a un conoyau de torsion, et est surjective lorsque k est algébriquement clos, comme on voit en se restreignant à l'application $A_0(C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ induite sur une k–courbe projective et lisse $C \subset X$ convenable.

Pour terminer ce paragraphe, citons deux difficultés fondamentales rencontrées dans l'étude des groupes de Chow en codimension plus grande que 1. Soit X une variété projective et lisse, géométriquement intègre sur un corps k.

Première difficulté. Si F est un corps contenant k, et j un entier, $j \geq 2$, l'application naturelle $CH^j(X) \longrightarrow CH^j(X_F)$ n'est pas nécessairement injective, à la différence de ce qui se passe pour $j = 1$ (§ 1, Prop. 1.1). Le noyau de cette application est de torsion, mais il peut être non nul lorsque le corps k n'est pas algébriquement clos. Par ailleurs, lorsque F/k est une extension galoisienne de groupe G, même en supposant que X possède un point k–rationnel, l'application $CH^j(X) \longrightarrow CH^j(X_F)^G$ n'est pas nécessairement surjective (on peut simplement dire que le conoyau de cette application est de torsion).

On ne peut donc utiliser ici les arguments développés au § 1.

Deuxième difficulté. Comme il fut établi pour la première fois par Mumford, une démonstration toute différente étant donnée par S. Bloch [B2], p. 1.19 (voir aussi [BS]), même dégagé de sa partie *discrète*, i.e. de son image dans par exemple la cohomologie entière de X lorsque $k = \mathbf{C}$, pour $j \geq 2$, le groupe $CH^j(X)$ est en général loin d'être représentable par une variété algébrique. Ainsi pour k algébriquement clos non dénombrable et X une surface l'application naturelle alb : $A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ mentionnée plus haut peut avoir un énorme noyau (qu'on ne peut couvrir par les cycles supportés sur une courbe de X). On se reportera à la thèse de Jannsen (*Mixed Motives and Algebraic K-Theory*, Springer LNM **1400**, §§ 9 et 10) pour une discussion complémentaire.

§ 3. K–théorie, cohomologie étale, et torsion dans les groupes de Chow (le programme de Bloch).

3.1. Corps et anneaux de valuation discrète

Etant donné un corps F, on définit le groupe K_2F comme le quotient de $F^* \otimes F^*$ par le sous–groupe engendré par les éléments $a \otimes b$ avec $a + b = 1$. Lorsque F est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète, de valuation $v : F^* \longrightarrow \mathbf{Z}$, de corps résiduel κ, on dispose du symbole modéré

$$\begin{array}{rlcl} T: & K_2F & \longrightarrow & \kappa^* = K_1\kappa, \\ & \{a,b\} & \longmapsto & (-1)^{v(a)v(b)} cl(a^{v(b)}/b^{v(a)}), \end{array}$$

où $cl(c)$ désigne la classe dans k^* d'une unité $c \in A^*$. C'est l'analogue de la flèche $K_1F = F^* \longrightarrow K_0\kappa = \mathbf{Z}$ définie par la valuation v.

On supposera le lecteur familier avec les aspects élémentaires de la cohomologie galoisienne. Etant donné un corps k, de clôture séparable k_s et $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, pour un G–module continu discret on notera $H^i_{et}(k, M)$ et parfois simplement $H^i(k, M)$ le groupe de cohomologie galoisienne $H^i(G, M)$. Pour n inversible dans k, on note μ_n le groupe des racines n–ièmes de l'unité dans k_s^*, et pour j entier > 0, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le G–module $\mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). On convient que $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/n$ avec G–action triviale.

La théorie de Kummer, c'est-à-dire la suite de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & k_s^* & \longrightarrow & k_s^* & \longrightarrow & 1, \\ & & & & x & \longmapsto & x^n & & \end{array}$$

et le théorème 90 de Hilbert $H^1(k, k_s^*) = 0$ donnent l'isomorphisme

$$k^*/k^{*n} \simeq H^1(k, \mu_n).$$

On en déduit une application par cup–produit :

$$(k^* \otimes_{\mathbf{Z}} k^*)/n \longrightarrow k^*/k^{*n} \otimes_{\mathbf{Z}} k^*/k^{*n} \simeq H^1(k, \mu_n) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(k, \mu_n) \longrightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Un calcul purement algébrique, à base de normes (voir [S]) montre que cet homomorphisme annule les éléments de la forme $x \otimes y$, avec $x + y = 1$. Ainsi elle définit un homomorphisme

$$K_2k/nK_2k \longrightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Le théorème de Merkur'ev–Suslin ([MS], [S]) assure que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme. Si k est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète comme plus haut, de corps résiduel κ, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_2k & \longrightarrow & H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa^* & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mu_n), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est le symbole modéré et la flèche verticale de droite le résidu en cohomologie galoisienne, analogue en degré supérieur de la flèche évidente $H^1(k, \mu_n) \longrightarrow H^0(\kappa, \mathbf{Z}/n)$ i.e. $k^*/k^{*n} \longrightarrow \mathbf{Z}/n$ induite par la valuation.

3.2. La méthode de Bloch

Soit X une k–variété algébrique intègre, et $n > 0$ un entier inversible dans k. On considère le diagramme commutatif suivant de complexes, où X^i désigne l'ensemble des points de X de codimension i :

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{(degrés)} & 2 & & 1 & & 0 & & \\
\mathcal{C} & \bigoplus_{x\in X^{i-2}} K_2k(x) & \to & \bigoplus_{x\in X^{i-1}} k(x)^* & \to & \bigoplus_{x\in X^i} \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & \downarrow \times n & & \downarrow \times n & & \downarrow \times n & & \\
\mathcal{C} & \bigoplus_{x\in X^{i-2}} K_2k(x) & \to & \bigoplus_{x\in X^{i-1}} k(x)^* & \to & \bigoplus_{x\in X^i} \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{D} & \bigoplus_{x\in X^{i-2}} H^2(k(x),\mu_n^{\otimes 2}) & \to & \bigoplus_{x\in X^{i-1}} H^1(k(x),\mu_n) & \to & \bigoplus_{x\in X^i} H^0(k(x),\mathbf{Z}/n) & \to & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales du diagramme $\mathcal{C}$ sont les symboles modérés, puis les flèches diviseurs (plus précisément ce sont les flèches obtenues à partir du symbole modéré et de la flèche diviseur après normalisation des variétés considérées, puis somme). Les flèches du complexe $\mathcal{D}$ sont les flèches de résidu en cohomologie galoisienne. Les flèches allant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ sont les flèches décrites au § 3.1. Les complexes verticaux sont exacts. Pour la verticale médiane, cela résulte de la théorie de Kummer. Pour la verticale de gauche, c'est le théorème de Merkur'ev/Suslin qui le garantit. Le groupe d'homologie $H_0(\mathcal{C})$ s'identifie à $CH^i(X)$. Une chasse au diagramme n'utilisant que la surjectivité dans le théorème de Merkur'ev/Suslin (on pourrait oublier le coin supérieur gauche du diagramme ci-dessus) donne alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{C})/n \longrightarrow H_1(\mathcal{D}) \longrightarrow {}_nH_0(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

soit

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{C})/n \longrightarrow H_1(\mathcal{D}) \longrightarrow {}_nCH^i(X) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

(cette présentation simplifiée de l'argument initial de Bloch est présentée dans [CSS]. Elle nous avait été signalée par T. Ekedahl).

Problème : comment contrôler les groupes $H_1(\mathcal{C})$ et $H_1(\mathcal{D})$?

Le complexe $\mathcal{C}$ est en fait une partie d'un complexe, le complexe de Gersten :

$$\bigoplus_{x\in X^0} K_ik(x) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{i-j}} K_jk(x) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^i} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

dont les termes sont définis au moyen de la K–théorie supérieure des corps. Lorsque X est *lisse sur un corps*, la *conjecture de Gersten*, établie par Quillen [Q], assure que ce complexe est le complexe des sections globales d'une résolution flasque du faisceau Zariski $\mathcal{K}_i$ sur X, défini par faisceautisation du préfaisceau $U \longrightarrow K_i(H^0(U,\mathcal{O}_X))$, le groupe $K_i(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A. Le groupe noté $H_1(\mathcal{C})$ ci-dessus s'identifie donc au groupe de cohomologie (Zariski) $H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)$.

De même, le complexe $\mathcal{D}$ est en fait une partie d'un complexe

$$\bigoplus_{x\in X^0} H^i(k(x),\mu_n^{\otimes i}) - \cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{i-j}} H^{i-j}(k(x),\mu_n^{\otimes i-j}) - \cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^i} H^0(k(x),\mathbf{Z}/n) \longrightarrow 0$$

de groupes de cohomologie étale, dont les flèches sont définies à partir d'applications résidus supérieurs. Lorsque X est *lisse*, un analogue de la conjecture de Gersten, établi par Bloch et Ogus [BO], assure que le complexe ci-dessus est le complexe des sections globales d'une résolution flasque, pour la topologie de Zariski sur X, du faisceau Zariski $\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})$ associé au préfaisceau $U \longrightarrow H^i_{et}(U,\mu_n^{\otimes i})$. On a l'énoncé analogue pour les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes j})$, i et j quelconques. Le groupe $H_1(\mathcal{D})$ considéré plus haut s'identifie donc au groupe de cohomologie (Zariski) $H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i}))$.

Mettant ensemble ces deux résultats, on voit que la suite exacte (3.1) peut se réécrire, dans le cas lisse :

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)/n \longrightarrow H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) \longrightarrow {}_nCH^i(X) \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

Notons que les résultats de Bloch–Ogus montrent également que le groupe $H^i(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i}))$ s'identifie au groupe $H_0(\mathcal{D})$, qui n'est autre que le quotient $CH^i(X)/n$.

Le dernier ingrédient dans l'approche de Bloch de la torsion des groupes de Chow est la suite spectrale de passage du local au global (cf. [BO])

$$E_2^{pq} = H^p(X,\mathcal{H}^q(\mu_n^{\otimes j})) \Longrightarrow H^n_{et}(X,\mu_n^{\otimes j}). \tag{3.3}$$

Les termes E_2^{pq} sont concentrés dans le domaine $0 \le p \le d = \dim(X)$ comme il sied à la cohomologie de Zariski, et, pour X lisse, dans le cône $p \le q$. C'est là un résultat moins trivial, résultant de l'existence, dans le cas lisse, des résolutions flasques mentionnées ci–dessus, et qui sont, pour $\mathcal{H}^q(\mu_n^{\otimes j})$, de longueur q. Dans la suite, nous appellerons souvent suite spectrale de Bloch-Ogus la suite spectrale (3.3).

En particulier, il existe des applications naturelles :

$$\gamma_i : H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) \longrightarrow H^{2i-1}_{et}(X,\mu_n^{\otimes i}) \tag{3.4}$$

et l'on a ainsi le diagramme (X lisse) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)/n & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) & \longrightarrow & {}_nCH^i(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_i} & & & & \\ & & & & H^{2i-1}_{et}(X,\mu_n^{\otimes i}). & & & & \end{array} \tag{3.5}$$

Faisant parcourir à n les puissances d'un nombre premier l fixé inversible dans k, et passant à la limite inductive, on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))) & \longrightarrow & CH^i(X)_{l-tors} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_i} & & & & \\ & & & & H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)). & & & & \end{array} \tag{3.6}$$

On peut compléter ces diagrammes de la façon suivante. Pour tout entier m inversible dans k, on dispose, sur la k–variété lisse X, d'une application cycle de Grothendieck

$$\rho : CH^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{et}(X, \mu_m^{\otimes i})$$

décrite par Deligne dans [SGA4 1/2].

Par ailleurs, de la suite exacte de faisceaux étales sur X :

$$1 \longrightarrow \mu_m^{\otimes i} \longrightarrow \mu_{nm}^{\otimes i} \longrightarrow \mu_n^{\otimes i} \longrightarrow 1$$

on déduit une application bord (*Bockstein*)

$$\beta : H^{2i-1}_{et}(X, \mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}_{et}(X, \mu_m^{\otimes i}).$$

Une vérification non triviale, effectuée dans le travail [CSS], assure qu'au signe près, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_nCH^i(X) & \xrightarrow{\ \rho\ } & H^{2i}_{et}(X, \mu_m^{\otimes i}) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \beta} \\ H^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) & \xrightarrow{\ \gamma_i\ } & H^{2i-1}_{et}(X, \mu_n^{\otimes i}) \end{array} \tag{3.7}$$

est commutatif.

Limitant n et m aux puissances de l premier inversible dans k, et passant à la limite inductive sur n et à la limite projective sur m, on obtient le diagramme commutatif au signe près :

$$\begin{array}{ccc} CH^i(X)_{l-tors} & \xrightarrow{\ \rho\ } & H^{2i}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(i))) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \beta} \\ H^{i-1}(X, \mathcal{H}^i(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) & \xrightarrow{\ \gamma_i\ } & H^{2i-1}_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)). \end{array} \tag{3.8}$$

3.3. Cycles de codimension 1 et 2

3.3.1. Cycles de codimension 1

La suite (3.2) se lit ici

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_1)/n \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}^1(\mu_n)) \longrightarrow {}_nCH^1(X) \longrightarrow 0$$

et la suite spectrale de Bloch–Ogus donne un isomorphisme

$$H^1(X, \mathcal{H}^1(\mu_n)) \simeq H^1_{et}(X, \mu_n),$$

si bien que l'on a la suite

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathbf{G}_m)/n \longrightarrow H^1_{et}(X, \mu_n) \longrightarrow {}_nCH^1(X) \longrightarrow 0,$$

dont on peut vérifier qu'elle s'identifie, au signe près, avec la suite de Kummer ([B1], Prop. 3.6).

De la suite spectrale de Bloch–Ogus à coefficients μ_n on tire aussi la suite exacte, essentiellement bien connue :

$$0 \longrightarrow CH^1(X)/n \longrightarrow H^2_{et}(X,\mu_n) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}^2(\mu_n)) \longrightarrow 0, \tag{3.9}$$

où le terme $H^0(X,\mathcal{H}^2(\mu_n))$ peut être identifié à la n–torsion ${}_nH^2_{et}(X,\mathbb{G}_m)$ du groupe de Brauer de X.

3.3.2. Cycles de codimension deux

Dans la suite spectrale de Bloch–Ogus, la flèche γ_2 est toujours injective, et de (3.5) et (3.6) on déduit le résultat important (Bloch+Merkur'ev–Suslin, cf. [CSS]) :

THÉORÈME 3.3.2. — *Pour X lisse sur un corps k, et n inversible dans k, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient du groupe de cohomologie étale $H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2})$. Pour l premier à la caractéristique de k, le groupe $CH^2(X)_{l-tors}$ est un sous-quotient du groupe $H^3_{et}(X,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.*

Une analyse attentive de l'argument présenté montre que de (3.2) il suffit de retenir la surjection $H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes i})) \longrightarrow {}_nCH^i(X) \longrightarrow 0$, laquelle résulte simplement de la surjectivité dans le théorème de Merkur'ev–Suslin (dont l'énoncé n'utilise pas la K–théorie de Quillen).

De la suite spectrale de Bloch–Ogus à coefficients $\mu_n^{\otimes 2}$ on tire la longue suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}^2(\mu_n^{\otimes 2})) \xrightarrow{\gamma_2} H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}^3(\mu_n^{\otimes 2})) \longrightarrow \\ CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour usage ultérieur (§ 7) notons tout d'abord qu'en combinant (3.5) et le début de cette suite, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}_2)/n \longrightarrow NH^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow {}_nCH^2(X) \longrightarrow 0, \tag{3.11}$$

Par ailleurs, on aimerait obtenir des cas où l'application

$$H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}^3(\mu_n^{\otimes 2}))$$

est surjective, c'est–à–dire où toute classe de cohomologie sur le corps des fonctions de X, provenant partout localement d'une classe de cohomologie, provient automatiquement d'une classe de cohomologie globale. Ceci permettrait alors de contrôler le quotient $CH^2(X)/n$ via une injection $CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2})$. Malheureusement, comme nous l'a fait observer V. Srinivas, cette dernière application n'est pas toujours injective : il suffit pour s'en rendre compte de considérer la variété lisse X complément dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^3$ d'une quartique générique (donc de groupe de Picard engendré par les sections hyperplanes). La question de savoir si l'application est injective lorsque X est projective, lisse, et possède un point k–rationnel, est ouverte.

§ 4. Variétés sur un corps séparablement clos

Lorsque le corps de base est séparablement clos, et X connexe lisse de dimension d, la dimension cohomologique des corps $k(x)$, pour x point de X, est au plus d. Ainsi tous les termes avec $q > d$ dans la suite spectrale de Bloch–Ogus s'annulent. Comme cela fut remarqué assez tard (cf. [BV] et [S3]), on en déduit simplement (i.e. sans réduction préliminaire à la dimension 2) les théorèmes de ce paragraphe, dus essentiellement à Roitman et à Bloch.

THÉORÈME 4.1. — *Soit X une variété lisse connexe de dimension d sur un corps séparablement clos k, et n inversible dans k. Alors*

(*i*) *Le groupe ${}_nCH^d(X)$ est un quotient du groupe de cohomologie étale $H^{2d-1}_{et}(X, \mu_n^{\otimes d})$.*

(*ii*) *Le groupe ${}_nCH^d(X)$ est un groupe fini.*

(*iii*) *Si X est une variété affine lisse et $d > 1$, le groupe $CH^d(X)$ est sans torsion première à $car(k)$.*

Démonstration : La suite spectrale à coefficients dans $\mu_n^{\otimes d}$ donne en effet dans ce cas un *isomorphisme*

$$\gamma_d : H^{d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mu_n^{\otimes d})) \simeq H^{2d-1}_{et}(X, \mu_n^{\otimes d}),$$

et le diagramme (3.5) donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)/n \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow {}_nCH^d(X) \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

La finitude des groupes de cohomologie étale $H^p_{et}(X, \mu_n^{\otimes j})$ est un phénomène général valable sur toute variété sur un corps algébriquement clos. Enfin, pour toute variété affine X sur un corps séparablement clos, les groupes $H^p_{et}(X, \mu_n^{\otimes j})$ sont nuls pour p plus grand que la dimension de X. $\square$

THÉORÈME 4.2 (théorème de Roitman). — *Soit k un corps séparablement clos, et X une k-variété projective lisse et connexe. L'application d'Albanese :*

$$\mathrm{alb} : A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$$

induit un isomorphisme sur la torsion première à la caractéristique de k.

Démonstration :

(*i*) Par sections hyperplanes suffisamment générales, on trouve une courbe projective lisse connexe $C \subset X$ telle que l'application induite $\underline{\mathrm{Alb}}_C \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X$ soit un épimorphisme de variétés abéliennes, et plus précisément induise une surjection au niveau des points de l^n-torsion

$${}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_C(k) \twoheadrightarrow {}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$$

pour tout l premier et n entier, $n > 0$ (ceci se ramène à voir que l'application $H^1_{et}(X, \mathbb{Z}/l^n) \longrightarrow H^1_{et}(C, \mathbb{Z}/l^n)$ est injective, ce qui résulte du théorème de connexion de Zariski, voir [B1], ou [B2]).

Dans le diagramme naturellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_0(C) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Alb}}_C(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \end{array}$$

la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Ainsi l'application ${}_{l^n}A_0(X) \longrightarrow {}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ est une *surjection.*

(*ii*) LEMME. — *Il existe un isomorphisme*

$$H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d)) \simeq \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)_{l-tors}.$$

Démonstration : La dualité de Poincaré assure que l'accouplement

$$H^{2d-1}_{et}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \times H^1_{et}(X, \mu_{l^n}) \longrightarrow H^{2d}_{et}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \simeq \mu_{l^n}$$

est une dualité parfaite. On en déduit un isomorphisme

$$H^{2d-1}_{et}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d}) \simeq \mathrm{Hom}({}_{l^n}\mathrm{Pic}(X), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1))$$

et en passant à la limite directe :

$$H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d)) \simeq \mathrm{Hom}(\varprojlim_{n>0} {}_{l^n}\mathrm{Pic}(X), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \simeq \mathrm{Hom}(\varprojlim_{n>0} {}_{l^n}\mathrm{Pic}^0(X), \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)),$$

le dernier isomorphisme provenant du passage à la limite projective en n dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{l^n}\mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow {}_{l^n}\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow {}_{l^n}NS(X) \longrightarrow 0$$

déduite de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow NS(X) \longrightarrow 0,$$

où le groupe $NS(X)$ est de type fini (voir § 1) et le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ est le groupe (divisible) des points k-rationnels de la variété de Picard de X (pour un groupe abélien A de type fini, on a toujours $\varprojlim_{n>0} {}_{l^n}A = 0$).

On sait que la variété de Picard est la variété abélienne duale de la variété d'Albanese. Plus précisément, on sait que l'accouplement de Weil

$${}_{l^n}\mathrm{Pic}^0(X) \times {}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \longrightarrow \mu_{l^n}$$

est une dualité parfaite. Via cet accouplement, l'isomorphisme ci-dessus induit donc un isomorphisme :

$$H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(d)) \simeq \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)_{l-tors}.$$

$\square$

(*iii*) Dans le diagramme (3.6), pour $i = d$, on sait que la flèche γ_d est un isomoprhisme (voir la démonstration du théorème 4.1). Compte tenu du lemme ci-dessus, ce diagramme donne donc naissance à une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)_{l-tors} \longrightarrow CH^d(X)_{l-tors} \longrightarrow 0.$$

De cette suite, et de la divisibilité de $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, on déduit que pour tout n entier, la flèche induite ${}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \longrightarrow {}_{l^n}CH^d(X)$ est surjective. Mais la torsion de $CH^d(X) = CH_0(X)$ coïncide avec la torsion de $A_0(X)$ (noyau de l'application degré sur $CH_0(X)$. D'après *(i)* on sait donc qu'il y a une application surjective de ${}_{l^n}CH^d(X)$ sur ${}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$. Mais les deux groupes ${}_{l^n}\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ et ${}_{l^n}CH^d(X)$ sont finis (c'est clair pour le premier, pour le second, cela résulte de la première surjection, ou du théorème 4.1). En comparant les ordres des groupes, on voit que les deux applications surjectives ci-dessus sont forcément bijectives, ce qui achève la démonstration du théorème de Roitman, et montre également que le groupe $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est nul. $\square$

THÉORÈME 4.3. — *Soit X une variété projective lisse connexe sur le corps séparablement clos k, et soit l premier, différent de car(k).*

(i) Dans le diagramme (3.6) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))) & \longrightarrow & CH^i(X)_{l-tors} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \gamma_i & & & & \\ & & & & H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)), & & & & \end{array}$$

la flèche γ_i se factorise par un homomorphisme

$$\lambda_i : CH^i(X)_{l-tors} \longrightarrow H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)).$$

(ii) Cet homomorphisme est bijectif pour $i=1$ et injectif pour $i=2$.

(iii) Pour $d=\dim(X)$, l'homomorphisme λ_d est un isomorphisme.

Démonstration : Il nous faut montrer que la flèche composée

$$H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow H^{i-1}(X,\mathcal{H}^i(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))) \longrightarrow H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))$$

est nulle. Pour tout élément $\zeta \in H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$, il existe un sous–corps F de k, de type fini sur le corps premier, et une F–variété projective et lisse X_0 telle que X provienne de X_0 par changement de base de F à k, et que ζ provienne d'un élément $\zeta_0 \in H^{i-1}(X_0,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ (le complexe de Gersten de $\mathcal{K}_i$ sur X étant la limite inductive des complexes de Gersten sur tous les X_0 possibles). Comme le diagramme (3.6) vaut sur un corps quelconque, et qu'il est fonctoriel par changement de corps de base, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{i-1}(X_0,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^{2i-1}_{et}(X_0,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{i-1}(X,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)). \end{array}$$

Soit alors F_s la clôture séparable de F dans k puis $G=\mathrm{Gal}(F_s/F)$ et enfin $X_{0,s}=X_0\times_F F_s$. La flèche

$$H^{2i-1}_{et}(X_0,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) \longrightarrow H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))$$

se factorise par :

$$H^{2i-1}_{et}(X_0,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) \to H^{2i-1}_{et}(X_{0,s},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))^G \subset H^{2i-1}_{et}(X_{0,s},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) \to H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)),$$

la dernière flèche étant d'ailleurs un isomorphisme.

Mais il résulte des conjectures de Weil généralisées, comme établies par Deligne, que sur un corps F de type fini sur le corps premier, les groupes $H^n_{et}(X_{0,s},\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))^G$ sont finis si $n\neq 2i$ (voir [CR1] Thm. 1.5). Ainsi l'image de $H^{i-1}(X_0,\mathcal{K}_i)\otimes\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ dans le groupe $H^{2i-1}_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))$ est finie. Mais comme le groupe $H^{i-1}(X_0,\mathcal{K}_i)\otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est divisible, cette image est forcément nulle, ce qui achève la démonstration du point (i). Que les applications γ_i soient injectives pour $i=1,2$ est une propriété générale valable sur tout corps (§ 3), ce qui établit l'injectivité de λ_i dans ces deux cas. Lorsque k est séparablement clos, comme X est propre et intègre, on a $H^0(X,\mathbf{G}_m)=k^*$, donc $H^0(X,\mathbf{G}_m)/l^n=0$, et la suite de Kummer montre que λ_1 est un isomorphisme. Lorsque k est séparablement clos, γ_d est un isomorphisme (voir la démonstration du théorème 4.1). Il en est donc de même de λ_d. $\square$

Remarque : Nous aurions pu utiliser l'énoncé *(iii)* dans la démonstration du théorème de Roitman, mais il a semblé préférable d'éviter le recours au résultat de Deligne dans la démonstration dudit théorème.

PROPOSITION 4.4. — *Soit X une variété projective lisse connexe de dimension d sur un corps séparablement clos de caractéristique $p \geq 0$. Alors le groupe $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)$ est une extension du groupe fini*

$$\bigoplus_{l \neq p} H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(d))_{tors}$$

par un groupe divisible par tout entier non nul dans k.

Démonstration : Pour tout l premier, $l \neq car(k)$, et tout entier $m > 0$, on dispose de la suite exacte (4.1) :

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)/l^m \longrightarrow H^{2d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mu_{l^m}^{\otimes d})) \longrightarrow {}_{l^m}CH^d(X) \longrightarrow 0 .$$

Par passage à la limite projective, on obtient une suite exacte (les groupes sont tous finis) et on trouve une flèche θ_l de $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)$ vers $H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(d))$, qu'un argument de *poids* analogue à celui de la démonstration ci-dessus montre avoir son image dans la torsion de $H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(d))$. Procédant comme dans [CR1], Théorème 1.5, on en déduit d'abord que le noyau de la flèche θ_l est l-divisible, puis, comme le module de Tate $T_l(CH^d(X))$ est sans torsion, que l'image de θ_l est exactement le sous-groupe de torsion $H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(d))_{tors}$. Par ailleurs, Gabber a montré que, pour i et j donnés, pour presque tout l, le groupe $H^i_{et}(X, \mathbf{Z}_l(j))$ est sans torsion. Ceci suffit à établir l'énoncé. $\square$

Sources et compléments.

Les applications λ_i furent définies par Bloch ([B1]). Suwa [Sw] les étudie sous le nom d'*applications d'Abel–Jacobi de Bloch*, et donne des conditions nécessaires pour que l'application λ_2 soit surjective (elle ne l'est pas toujours). La construction des applications λ_i donnée ci–dessus est simplifiée par rapport à celle de Bloch, grâce à l'utilisation du théorème de Merkur'ev–Suslin ([MS], 1982).

Les idées intervenant dans les démonstrations des théorèmes 4.2 et 4.3 sont pour l'essentiel dues à Bloch. Dans [B1], Bloch établissait le théorème de Roitman par un argument géométrique asez élaboré, s'appuyant en outre sur les applications λ_i, construites grâce au théorème de Deligne. Dans [B2], Bloch établissait un cas particulier de ce qui devait devenir le théorème de Merkur'ev/Suslin : il établissait la surjectivité de l'application de réciprocité $K_2k/nK_2k \longrightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2})$. lorsque k est un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. De cela il déduisait le théorème de Roitman pour les surfaces (une petite difficulté étant la commutativité d'un diagramme, difficulté que nous avons contournée grâce à l'argument de comptage à la fin de la démonstration du théorème 4.2) - sans recours au théorème de Deligne. Un argument géométrique permet alors de déduire le théorème de Roitman pour les variétés de dimension supérieure. On voit que la démonstration donnée en 4.2, est très proche de celle de [B2], à ceci près que nous évitons la réduciton au cas de surfaces. Mais le lecteur vérifiera (cf. (3.1) et (3.5)) que, même pour une variété de dimension quelconque, nous n'utilisons que le cas particulier du théorème de Merkur'ev/Suslin établi par Bloch dans [B2].

Que $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d)$ admette une surjection sur le groupe $H^{2d-1}_{et}(X, \mathbf{Z}_l(d))_{tors}$ est une remarque de Bloch [B1], mais la proposition 4.4 ci-dessus est nouvelle. Des théorèmes de structure analogues pour $H^0(X,\mathcal{K}_2)$ et $H^1(X,\mathcal{K}_2)$ apparaissent dans [CR1]. On peut se demander quelle est la généralité de telles présentations, et si l'on dispose de résultats de divisibilité analogues pour les groupes de K–théorie $K_i(X)$ $(i \geq 1)$.

Un corollaire frappant du théorème de Roitman est que la torsion (première à $car(k)$) de $A_0(X)$ ne change pas par extension de corps algébriquement clos. En étendant une méthode de Suslin, F. Lecomte [L] a montré que pour toute variété lisse sur un corps algébriquement clos k, et tout entier n premier à $car(k)$, les groupes ${}_nH^i(X,\mathcal{K}_j)$ et $H^i(X,\mathcal{K}_j)/n$ restent inchangés par extension de corps algébriquement clos.

La plupart des théorèmes discutés ici valent aussi pour la p–torsion ($p = car(k)$), sous une forme convenable (Milne, Gros, Gros–Suwa). Je renvoie le lecteur à l'article de Gros–Suwa [GS] et à sa bibliographie.

Signalons aussi que des versions du théorème de Roitman ont été données pour des variétés singulières (Collino, Levine, Srinivas (voir [Sr] et sa bibliographie), Barbieri-Viale [BV], Saito [S3]).

§ 5. Variétés sur les corps finis

THÉORÈME 5.1 [CSS]. — *Soit X une variété lisse sur un corps fini F. Alors pour tout entier n premier à la caractéristique de F, le sous-groupe de n-torsion ${}_nCH^2(X)$ est fini.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 3.3.2, selon lequel sur un corps quelconque, le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient du groupe de cohomologie étale $H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2})$. En effet, la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale

$$H^p(F, H^q_{et}(\overline{X},\mu_n^{\otimes j})) \Longrightarrow H^n_{et}(X,\mu_n^{\otimes j})$$

(où $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$) assure que tous les groupes $H^n_{et}(X,\mu_n^{\otimes j})$ sont finis, puisqu'il en est ainsi des groupes $H^q_{et}(\overline{X},\mu_n^{\otimes j})$ (cohomologie étale sur un corps séparablement clos) et que les groupes de cohomologie galoisienne d'un corps fini à valeurs dans un module fini sont des groupes finis. $\square$

(Le même résultat, avec la même démonstration, vaut sur un corps local, p-adique ou réel. Voir 8.1).

THÉORÈME 5.2 [CSS]. — *Soit X une variété projective lisse et géométriquement connexe sur un corps fini F. Alors le sous-groupe de torsion de $CH^2(X)$ est fini.*

Esquisse de démonstration : D'après le théorème (3.3.2), le groupe $CH^2(X)_{l-tors}$ est un sous-quotient du groupe de cohomologie étale $H^3_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$. Mais on déduit du théorème de Deligne (conjectures de Weil, avec coefficients tordus), par une suite spectrale de Hochschild-Serre, que pour une variété projective et lisse X sur un corps fini F, si $j \neq 2i$, $2i+1$, alors les groupes $H^j_{et}(X,\mathbf{Q}_l(i))$ sont nuls, et les groupes $H^j_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))$ sont finis ([CSS], Théorème 2 p. 780). Ainsi $H^3_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est un groupe fini, et $CH^2(X)_{l-tors}$ est donc un groupe fini.

Par ailleurs, on peut montrer que pour presque tout premier l, le groupe $H^3_{et}(X,\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est en fait nul. Ainsi, la torsion première à $p = car(F)$ de $CH^2(X)$ est finie. La partie p-primaire requiert des arguments plus délicats, qui sont développés dans [CSS], et sont essentiellement dus à O. Gabber. $\square$

Remarque 5.2.1 : L'utilisation du diagramme commutatif (3.8) (assez délicat à établir) permet même de montrer qu'on dispose d'une application injective, induite par l'application cycle :

$$\rho : CH^2(X)_{l-tors} \longrightarrow H^4_{et}(X,\mathbf{Z}_l(2))_{tors}.$$

C'est sur cette application injective qu'est fondée l'approche de [CSS] du corps de classes non ramifié de Kato–Saito pour les surfaces (théorème 5.3 ci-après).

On note $\pi_1^{ab}(X)$ le plus grand quotient abélien du groupe fondamental de X. Une autre façon de le définir est :

$$\pi_1^{ab}(X) = \mathrm{Hom}(H^1_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Le groupe fondamental abélien géométrique $\pi_1^{ab,geom}(X)$ est par définition le noyau de l'application

$$\pi_1^{ab}(X) \longrightarrow \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(F)) = \widehat{\mathbf{Z}}$$

induite par le morphisme structural (l' égalité provenant du fait que F est un corps fini). C'est aussi le dual (à valeurs dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$) du groupe

$$\mathrm{Coker}[H^1(F,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^1_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})]$$

la flèche étant définie par le morphisme structural.

Les conjectures de Weil (le résultat de Weil) impliquent que le groupe $\pi_1^{ab,geom}(X)$ est un groupe fini.

THÉORÈME 5.3 (Kato–Saito [KS]). — *Soit X une variété projective lisse et géométriquement connexe sur un corps fini F, et $d = \dim(X)$. Alors le groupe $A_0(X)$ des 0-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle est un groupe fini, isomorphe au groupe $\pi_1^{ab,geom}(X)$, groupe fondamental abélien géométrique de X.*

Esquisse de démonstration ([CR2]) : On commence par observer que le groupe $A_0(X)$ est un groupe de torsion (en se ramenant au cas des courbes par un argument de type Bertini). On définit classiquement (Lang) un homomorphisme *surjectif* (c'est un théorème de type Tchebotarev) et fonctoriel

$$\theta : A_0(X) \twoheadrightarrow \pi_1^{ab,geom}(X).$$

Nous voulons montrer que cette application est une bijection. Un argument de type Lefschetz permet de ramener cette dernière assertion au cas des surfaces ($\dim(X) = 2$). Soit l premier, $l \neq car(F)$. Le diagramme (3.6) s'écrit ici :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H^1_{zar}(X, \mathcal{H}^2(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) & \longrightarrow & A_0(X)_{l-tors} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \gamma_2 & & & & \\ & & & & H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)), & & & & \end{array}$$

la flèche γ_2 étant une injection. D'après Deligne (cf. démonstration du théorème 5.2), le groupe $H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ est fini. Comme le groupe $H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ est divisible, on conclut que l'injection γ_2 se factorise par une injection $A_0(X)_{l-tors} \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$. Ceci montre déjà que $A_0(X)_{l-tors}$ est fini, et nul pour presque tout l (résultat conjecturé par Parshin, établi par Kato–Saito). En utilisant des arguments de dualité (Poincaré au niveau de la clôture algébrique de F, plus dualité pour la cohomologie des corps finis) on identifie le groupe fini $H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$ à la partie l–primaire du groupe $\pi_1^{ab,geom}(X)$. On a donc une *injection*

$$\sigma : A_0(X)_{l-tors} \hookrightarrow \pi_1^{ab,geom}(X)_{l-tors}.$$

Il serait pénible de comparer cette injection à l'application θ de Lang. Mais nous n'avons pas besoin de le faire. Comme θ est surjective et σ injective, et que les groupes concernés sont finis, les deux applications σ et θ doivent être des bijections.

Le cas de la torsion p–primaire peut être traité par des méthodes p–adiques convenables [CR2]. $\square$

Remarque 5.4 : En utilisant le théorème ci-dessus et les diagrammes (3.5), (3.6) et (3.8), on peut aller plus loin dans l'analyse de la suite spectrale de Bloch-Ogus pour une variété projective et lisse sur un corps fini. Le lecteur intéressé pourra consulter [K] et [C2].

§ 6. Variétés sur les corps de nombres, I

Pour une variété X lisse sur un corps de nombres k (ou plus généralement sur un corps de type fini sur le corps premier), on peut se demander si les groupes de Chow $CH^i(X)$ sont des groupes de type fini (c'est une variante d'une conjecture de H. Bass). On a vu au chapitre 1 qu'il en est bien ainsi lorsque $i = 1$. On ne dispose que de très peu de résultats lorsque $i \geq 2$. Des conjectures très ambitieuses ont été énoncées ces dernières années sur les dimensions, supposée finies, des groupes $CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}$, lorsque X est projective et lisse sur un corps de nombres (par exemple, Bloch et Beilinson conjecturent un isomorphisme $A_0(X) \otimes \mathbf{Q} \simeq \underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \otimes \mathbf{Q}$), mais la finitude même de ces dimensions n'a été établie dans aucun cas non trivial.

En 1981, Bloch [B4] obtint via la K-théorie un résultat de **finitude** pour le groupe (de torsion) $A_0(X)$ de toute une classe de surfaces rationnelles définies sur un corps de nombres. Depuis, une série de travaux à permis d'étendre ce résultat de finitude de la **torsion** à d'autres variétés. Dans ce chapitre, je décrirai le résultat le plus général obtenu à ce jour :

THÉORÈME 6.1 (Colliot-Thélène/Raskind [CR3]; Salberger [Sb2]). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons le groupe $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

Attributions : Je renvoie à [CR3] pour le détail des résultats particuliers précédemment obtenus. Disons simplement que sur un corps de nombres, tous les résultats obtenus jusqu'à une date récente concernaient des variétés pour lequel le groupe de Néron–Severi (géométrique) est sans torsion. K. Coombes [Cb] fut le premier à établir un résultat de finitude pour certaines *surfaces* possédant de la torsion dans leur groupe de Néron-Severi (par exemple les surfaces d'Enriques). La méthode de Coombes [Cb] a son originalité, et j'engage le lecteur à se reporter à l'article [Cb]. Sous la forme générale ci-dessus, le théorème, obtenu fin 1989, résulte d'une combinaison de travaux de Raskind et de l'auteur, et d'une idée de Salberger (théorème 6.7 ci-dessous). Ce dernier obtint peu de temps après nous une démonstration du théorème indépendante de la nôtre, démonstration dont je ne pus prendre complète connaissance qu'en Août 1991 (voir cependant § 9). Comme on le verra au § 7, en 1990/91, S. Saito ([S4]), s'appuyant en partie sur des indications de Salberger et de l'auteur, proposa ensuite une troisième démonstration du théorème.

Notre démonstration requiert un certain nombre de résultats préliminaires. Elle utilise un modèle projectif et lisse de la variété X au-dessus d'un ouvert de l'anneau des entiers de k, et la notion de groupe de Chow dans un contexte plus général que celui décrit au chapitre 1 (voir par exemple [F], chap. 20).

Le résultat suivant, établi dans [CR3], avait été annoncé par Gillet en 1985.

THÉORÈME 6.2. — *Soit k un corps de nombres, R son anneau des entiers, $f \in R$, $f \neq 0$ et A l'anneau localisé R_f. Soit $\mathbf{X}$ un A-schéma lisse, et soit n un entier naturel inversible dans A. Alors le sous-groupe de n-torsion ${}_nCH^2(\mathbf{X})$ est fini.*

Démonstration (esquisse) :

a) Pour le schéma $\mathbf{X}$ *lisse* sur un anneau de Dedekind A, soit $\pi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, on dispose (Gillet, non publié) de l'analogue de la conjecture de Gersten en théorie de Bloch-Ogus pour les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes j})$. L'argument formel à base de complexes développé au § 3 au-dessus d'un corps (cf. (3.2)) donne une *surjection* :

$$H^1_{Zar}(\mathbf{X}, \mathcal{H}^2(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes 2})) \twoheadrightarrow {}_nCH^2(\mathbf{X}).$$

De même, la suite spectrale de Bloch–Ogus et la conjecture de Gersten pour les faisceaux $\mathcal{H}^i(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes j})$ donnent une *injection*

$$H^1_{Zar}(\mathbf{X}, \mathcal{H}^2(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes 2})) \hookrightarrow H^3_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes 2}).$$

b) De façon générale, pour $\mathbf{X}$ de type fini sur $A = R_f$, avec R l'anneau des entiers d'un corps de nombres, les groupes $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes j})$ sont finis, comme on voit en utilisant la suite spectrale

$$H^p_{et}(\mathrm{Spec}(A), R^q\pi_*\mu_n^{\otimes j}) \Longrightarrow H^*_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes j})$$

la constructibilité du faisceau $R^q\pi_*\mu_n^{\otimes j}$ (valable pour π de type fini quelconque et A de Dedekind, voir [SGA4 1/2], Théorèmes de finitude), et les théorèmes de finitude pour la cohomologie étale des faisceaux constructibles sur un ouvert d'un anneau d'entiers de corps de nombres ([M2], II, 7.1). $\square$

Je commencerai par établir des cas particuliers du théorème 6.1 de façon à bien mettre en évidence les différentes techniques concourant au résultat général. Ainsi, la démonstration du théorème suivant (qui remonte à Juillet 1989) va illustrer la **méthode de localisation**.

THÉORÈME 6.3 (Colliot–Thélène/Raskind). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons les groupes $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nuls. Soit $n > 0$ un entier naturel. Alors le sous-groupe de n-torsion ${}_nCH^2(X)$ est fini.*

Démonstration :

a) On sait que la dimension de l'espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est égale à la dimension de la variété de Picard de X. L'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ assure donc que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ coïncide avec le groupe de Néron–Severi $NS(\overline{X})$ (Théorème 1.2). Comme ce dernier est un groupe de type fini, on voit qu'il existe une extension finie de corps L/k telle que $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$. Soit $m = [L : k]$.

b) Soit R l'anneau des entiers de k. On peut trouver un localisé $A = R_f$ de R (avec $f \in R$, $f \neq 0$) et un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$ de fibre générique X/k. Quitte à restreindre A, i.e. à inverser un nouvel f, on peut supposer que m et n sont inversibles dans A, que la clôture intégrale B de A dans L est finie étale sur A, et que le groupe des classes $\mathrm{Pic}(B)$ est nul. Enfin, quitte à restreindre un peu plus A, et grâce à un théorème de semi-continuité de Grothendieck, l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ permet de supposer $H^2(\mathbf{X}_p, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_p}) = 0$ pour chacune des fibres $\mathbf{X}_p$ au-dessus d'un point fermé $p \in \mathrm{Spec}(A)$, le même énoncé valant alors aussi pour les fibres du schéma $\mathbf{X}_B/\mathrm{Spec}(B)$ aux points fermés $q \in \mathrm{Spec}(B)$.

Encore d'après Grothendieck, l'égalité $H^2(\mathbf{X}_q, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_q}) = 0$ implique qu'au niveau du complété de l'anneau local de B en un point fermé q, l'application de restriction $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_{\widehat{B}_q}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q)$ est surjective (c'est ici un point crucial de notre démonstration). Enfin, l'égalité $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ assure qu'au niveau de B, le groupe de Picard est *constant* localement. En particulier, l'application naturelle $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_{B_q}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_{\widehat{B}_q})$ est surjective, si bien qu'il en est ainsi aussi de l'application $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_{\widehat{B}_q}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q)$.

c) On dispose de la suite de localisation :

$$\bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow CH^2(\mathbf{X}_B) \longrightarrow CH^2(X_L) \longrightarrow 0.$$

De façon purement formelle, pour tout point fermé $q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}$ définissant un diviseur principal sur $\mathrm{Spec}(B)$, i.e. défini par un élément $\pi \in B$, et toute classe $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_B)$, l'application composée

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_B) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow CH^2(\mathbf{X}_B)$$

est *nulle*. Représentant en effet $\mathcal{L}$ par un diviseur D ne contenant pas le diviseur principal $\mathbf{X}_q \subset \mathbf{X}_B$, on a l'égalité

$$(D_{|\mathbf{X}_q})_{|\mathbf{X}_B} = \mathrm{div}(\pi_{|D})$$

(la flèche composée associe à D la classe du cycle de codimension deux intersection du diviseur D et du diviseur *principal* $\mathbf{X}_q$. Cette classe est donc nulle.)

Dans les conditions ci-dessus, l'anneau B est principal et chaque application $\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_B) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q)$ surjective. On conclut donc que la flèche de gauche dans la suite de localisation est nulle, et donc que la flèche de restriction

$$CH^2(\mathbf{X}_B) \longrightarrow CH^2(X_L)$$

est un isomorphisme.

c) On dispose du diagramme commutatif de flèches de restriction :

$$\begin{array}{ccc} CH^2(\mathbf{X}_B) & \longrightarrow & CH^2(X_L) \\ \uparrow & & \uparrow \\ CH^2(\mathbf{X}) & \longrightarrow & CH^2(X), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont surjectives. D'après ce qui précède, la flèche supérieure est un isomorphisme. Enfin, le noyau de la flèche $CH^2(\mathbf{X}) \longrightarrow CH^2(\mathbf{X}_B)$ est, par un argument de norme, annulé par le degré $m = [B : A] = [L : k]$. Il est donc contenu dans le groupe de m-torsion ${}_mCH^2(\mathbf{X})$, groupe fini d'après le théorème 6.2. D'aprè ce même théorème, le groupe de n-torsion ${}_nCH^2(\mathbf{X}_B)$ est aussi fini. Une chasse au diagramme que je laisserai au lecteur assure alors la finitude du groupe de n-torsion ${}_nCH^2(X)$. $\square$

Remarque 6.3.1 : En fait, sous les hypothèses du théorème 6.3, on peut conclure à la finitude de tout le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$. Il suffit en effet de combiner le précédent théorème avec le résultat plus général suivant, dont la démonstration illustre la **méthode galoisienne.**

THÉORÈME 6.4. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur le corps premier. Supposons les groupes $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ nuls. Alors le groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini.*

Démonstration : Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, puis $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$, enfin $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

a) D'après le théorème 3.3.2, on dispose d'une inclusion naturelle

$$CH^2(\overline{X})_{tors} \hookrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Passant aux points fixes sous l'action de Galois, on a l'inclusion

$$[CH^2(\overline{X})_{tors}]^G \hookrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G.$$

Mais l'hypothèse que k est un corps de fini sur le corps premier et une réduction au cas des corps finis assure, via le théorème de Deligne sur la conjecture de Weil, que le groupe de droite est un groupe fini (voir [CR1], Theorem 1.5).

b) Comme la flèche $CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})$ envoie clairement le premier groupe dans les invariants $CH^2(\overline{X})^G$, et que son noyau est de torsion (argument de transfert), pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que le groupe

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})]$$

est d'exposant fini. Or ceci vaut pour toute variété projective et lisse sur un corps k de caractéristique zéro, sous les hypothèses $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Ceci est établi dans [CR1], dont je présente maintenant brièvement les principaux arguments.

On emploie pour cela la méthode galoisienne, qui fut utilisée pour la première fois par S. Bloch [B4], et est systématisée dans [CR1]. Elle consiste à faire de la cohomologie galoisienne sur le complexe des sections globales de la résolution de Quillen du faisceau $\mathcal{K}_2$ sur $\overline{X}$, ce qui donne lieu à une suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H^1(G, K_2(\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow \mathrm{Ker}[CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})] \longrightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

Le groupe de gauche est d'exposant fini sous la simple hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et le groupe de droite est d'exposant fini sous l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Pour établir ces résultats, [CR1] utilise la version cohomologique du théorème 90 pour K_2 ([C1]), à savoir

$$H^1(G, K_2\overline{k}(X)/K_2\overline{k}) = 0$$

sous la seule hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ – sans hypothèse sur les groupes de cohomologie cohérente – ce qui permet de ramener l'étude du groupe de gauche à celle du groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, K_2\overline{k}(X))],$$

et analyse la structure des groupes $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ et $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$, en s'appuyant sur plusieurs des résultats fondamentaux de Merkur'ev et Suslin. Sous l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on montre que le groupe $H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ lui-même est d'exposant fini. Je renvoie à [CR1] et au rapport [R1] pour plus de détails. $\square$

Une version plus complète de la suite de la localisation d'une part, un résultat fondamental de Bloch développé par Kato–Saito et Somekawa d'autre part, permettent d'éliminer la restriction $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ dans le théorème 6.3.

THÉORÈME 6.5. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Soit $n > 0$ un entier naturel. Alors le sous-groupe de n-torsion ${}_nCH^2(X)$ est fini.*

Démonstration :

a) Il existe une extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$ et que l'application naturelle de groupes de type fini $NS(X_L) \longrightarrow NS(\overline{X})$ soit un isomorphisme. Soit $m = [L : k]$. Comme dans la démonstration de 6.3, on peut trouver un localisé $A = R_f$ de l'anneau R des entiers de k (avec $f \in R$, $f \neq 0$) et un A-schéma projectif et lisse $\mathbf{X}$ de fibre générique X/k, de telle sorte que m et n soient inversibles dans A, que la clôture intégrale B de A dans L soit finie étale sur A, que le groupe des classes $\mathrm{Pic}(B)$ soit nul (i.e. B est principal), et que (via le théorème de semi-continuité de Grothendieck) $H^2(\mathbf{X}_p, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_p}) = 0$ pour chacune des fibres $\mathbf{X}_p$ au-dessus d'un point fermé $p \in \mathrm{Spec}(A)$, le même énoncé valant alors aussi pour les fibres du schéma $\mathbf{X}_B/\mathrm{Spec}(B)$ aux points fermés $q \in \mathrm{Spec}(B)$.

b) La suite de localisation utilisée en 6.3 peut s'étendre à gauche en une suite exacte (qui peut d'ailleurs être prolongée à gauche [R2], Prop. 1.2) :

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow CH^2(\mathbf{X}_B) \longrightarrow CH^2(X_L) \longrightarrow 0.$$

Le cup-produit définit une application

$$\mathrm{Pic}(X_L) \otimes L^* \longrightarrow H^1(X_L, \mathcal{K}_2),$$

(facile à décrire via la résolution de Gersten-Quillen du faisceau $\mathcal{K}_2$). On dispose donc de l'application composée ρ :

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_B) \otimes L^* \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_L) \otimes L^* \longrightarrow H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q),$$

dont on vérifie aisément qu'elle envoie la classe de $\mathcal{L} \otimes \alpha \in \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_B) \otimes L^*$ sur la famille $(\mathcal{L}_{|\mathbf{X}_q})^{v_q(\alpha)}$. Un argument similaire à celui développé en 6.3, et reposant sur le théorème de relèvement de Grothendieck, montre qu'en composant ρ avec la projection

$$\bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} NS(\mathbf{X}_q)$$

on obtient une surjection.

Ainsi la flèche composée

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} NS(\mathbf{X}_q)$$

est surjective (l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ a été ici utilisée de façon cruciale). Mais pour terminer la démonstration comme dans 6.3, on a besoin de contrôler le conoyau de la flèche

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q),$$

c'est-à-dire qu'on voudrait aussi attraper les éléments du groupe

$$\bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}^0(\mathbf{X}_q)$$

comme *bords* d'éléments de $H^1(X_L, \underline{K}_2)$. C'est ici qu'intervient le résultat de Bloch, Kato-Saito et Somekawa, que je rappelle au point suivant.

c) Soit R l'anneau des entiers d'un corps p-adique K (extension finie de $\mathbf{Q}_p$), de valuation $v : K^* \longrightarrow \mathbf{Z}$, de corps résiduel F. Soit J un R-schéma abélien. L'identification $J(R) = J(K)$ permet de définir une application de spécialisation $J(K) \longrightarrow J(\mathsf{F})$, soit $x \longrightarrow \overline{x}$. On définit alors une application

$$J(K) \otimes K^* \longrightarrow J(\mathsf{F})$$

en associant à $x \otimes \lambda$ l'élément $(v(\lambda) \cdot \overline{x})$. Si M/K est une extension finie de corps, on définit une application

$$\rho_{M/K} : J(M) \otimes M^* \longrightarrow J(\mathsf{F})$$

comme l'application composée

$$J(M)\otimes M^* \longrightarrow J(\mathsf{F}_M) \xrightarrow{N} J(\mathsf{F}),$$

où N désigne la norme pour l'extension de corps résiduels F_M/F.

Si maintenant K est un corps de nombres, $R = A_f$ un localisé de son anneau A des entiers ($f \in A$, $f \neq 0$), et J un R–schéma abélien, on peut pour chaque point fermé $p \in \mathrm{Spec}(R)$, de corps résiduel F_p (ici p est un point fermé, non un nombre premier !) et toute extension finie M/K, définir une application

$$\rho_{M/K,p} : J(M)\otimes M^* \longrightarrow J(\mathsf{F}_p)$$

par addition des applications ρ_{M_q/K_p} correspondant aux diverses extensions de la place p à une place q de la clôture intégrale de R dans M. Le résultat–clé que nous utiliserons, dont l'idée est due à Bloch [B5] et les développements ultérieurs à Kato/Saito [KS] puis Somekawa [So] est :

THÉORÈME. — *Dans la situation ci–dessus, le conoyau de l'application*

$$\bigoplus_{M/K}\bigoplus_{p}\rho_{M/K,p} : \bigoplus_{M/K}(J(M)\otimes M^*) \longrightarrow \bigoplus_{p} J(\mathsf{F}_p),$$

où M/K parcourt les extensions finies de K, et p parcourt les idéaux premiers de R, est un groupe fini.

d) En utilisant la nullité des $H^2(\mathbf{X}_q, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_q}) = 0$, et quitte à restreindre un peu plus A, on peut assurer (là encore grâce à un résultat de Grothendieck) que le foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathbf{X}_B/B}$ est représentable par un B–schéma en groupes localement lisse. Sa composante neutre, soit $J = \underline{\mathrm{Pic}}^o_{\mathbf{X}_B/B}$, est un B–schéma abélien.

Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\bigoplus_{q\in\mathrm{Spec}(B)^{(1)}} NS(\mathbf{X}_q) \\
H^1(X_L,\mathcal{K}_2) \arrow[ur] \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{q\in\mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \arrow[u] \\
\displaystyle\bigoplus_{M/L}(J(M)\otimes M^*) \arrow[u] \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{q\in\mathrm{Spec}(B)^{(1)}} J(\mathsf{F}_q) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

défini comme suit. Les corps M parcourent les extensions finies de L, une par classe d'isomorphisme. La flèche horizontale médiane provient de la suite de localisation. La flèche verticale de gauche est définie par les homomorphismes composés

$$J(M)\otimes M^* \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_M)\otimes M^* \xrightarrow{\text{cup}} H^1(X_M,\mathcal{K}_2) \xrightarrow{N_{M/L}} H^1(X_L,\mathcal{K}_2).$$

La flèche oblique, par définition, fait commuter le triangle. La flèche horizontale du bas est celle décrite au point c) ci–dessus. On peut vérifier que le carré est commutatif.

D'après b), la flèche oblique est surjective, et d'après c) la flèche horizontale inférieure a un conoyau fini. Il en résulte donc que la flèche horizontale médiane a un conoyau fini.

e) De la suite de localisation (point b) ci-dessus) on conclut que la flèche

$$CH^2(\mathbf{X}_B) \longrightarrow CH^2(X_L)$$

est surjective à noyau fini. Le théorème 6.2 et une chasse au diagramme analogue à celle effectuée à la fin de la démonstration de 6.3 permettent alors de conclure à la finitude de ${}_nCH^2(X)$. $\square$

Pour établir le théorème 6.1 en toute généralité, à partir du théorème 6.5, il reste à éliminer l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ dans le théorème 6.4, autrement dit à établir :

THÉORÈME 6.6 (Salberger). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons le groupe $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ nul. Alors le groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini.*

Suivant la méthode de notre théorème 6.4, on voit que ceci résulte de l'énoncé :

THÉORÈME 6.7 (Salberger). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Le groupe*

$$\operatorname{Ker} \rho_X : H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, K_2\overline{k}(X))$$

est d'exposant fini.

Démonstration (esquisse) : L'idée–clé de Salberger est de ramener cet énoncé au cas des courbes, par sections hyperplanes lisses successives (possible, d'après Bertini). Soit $Y \subset X$ une telle section. On montre que la flèche de restriction $H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, H^0(\overline{Y}, \mathcal{K}_2))$ induit une flèche $\operatorname{Ker}(\rho_X) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\rho_Y)$. Par ailleurs, on dispose ([CT–R 1985], fondé sur des résultats de Suslin) de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow 0,$$

donc d'isomorphismes

$$H^2(G, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \simeq H^2(G, H^0(\overline{X}, \underline{K}_2)).$$

La restriction aux sous–groupes divisibles maximaux des G–modules $H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ et $H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ de la flèche de restriction, soit

$$H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o \longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o$$

est une application G–équivariante qui admet une presque rétraction, c'est-à-dire qu'il existe une flèche G–équivariante

$$H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o \longrightarrow H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o$$

qui composée avec la précédente est la multiplication par un entier strictement positif. Dans [CR3] nous établissons ce point en utilisant le théorème de complète réductibilité de Poincaré. Le sous–groupe divisible maximal de $H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))^o$ est le groupe des points de torsion de la variété de Picard de X, et on applique le dit théorème à l'homomorphisme injectif de variétés abéliennes

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}^0_{Y/k}.$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de considérer le cas des courbes, où le théorème est dû à Raskind [R3], lequel s'appuie sur des résultats de Jannsen (principe local–global en théorie du corps de classes des courbes sur un corps de nombres [J]) et de S. Saito (corps de classes pour les courbes sur un corps local). Dans le cas des courbes, on a en fait plus : sous la seule hypothèse $X(k) \neq \emptyset$, le groupe $\operatorname{Ker}(\rho_X)$ est nul. $\square$

§ 7. Variétés sur les corps de nombres, II

Dans ce chapitre, je décris l'approche de Shuji Saito [S4] des théorèmes de finitude pour la torsion décrits au chapitre précédent, approche qui permet parfois d'aller plus loin (voir le théorème 7.6 ci-dessous). Comme indiqué plus haut, l'article de Saito incorpore certaines suggestions de Salberger et de moi-même. Un des aspects intéressants de la méthode de Saito est qu'elle garantit, sous certaines hypothèses, que les applications *cycles*, à valeurs dans la cohomologie étale, sont *injectives* sur la torsion du groupe de Chow.

La présentation choisie met en relief certains points un peu cachés dans l'article [S4].

Soit X une variété lisse intègre sur un corps k de caractéristique zéro. Pour tout entier $n > 0$, on dispose de la suite exacte (3.11) :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}_2)/n \longrightarrow NH^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow {}_nCH^2(X) \longrightarrow 0,$$

où par définition,

$$NH^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^3(k(X),\mu_n^{\otimes 2})].$$

En passant à la limite inductive sur tous les entiers $n > 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow NH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow CH^2(X)_{tors} \longrightarrow 0,$$

où

$$NH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))].$$

Notons

$$D = H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \subset H^3(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

puis

$$\Theta = \mathrm{Coker}[H^1(X,\mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))].$$

On dispose donc du diagramme trivialement commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{K}_2)\otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "="] & NH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & CH^2(X)_{tors} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{K}_2)\otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \arrow[r] & H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d] & \Theta \arrow[r] \arrow[dl, "\Psi"] & 0 \\ & & D & & \end{tikzcd} \tag{7.2}$$

où la flèche Ψ est la flèche induite par la flèche verticale du bas.

Le théorème suivant dégage le contenu algébrique de l'approche de Saito. Nous verrons plus bas des conditions arithmétiques et géométriques garantissant que l'hypothèse (H) est satisfaite.

THÉORÈME 7.1. — *Soit X une variété lisse intègre sur un corps k de caractéristique zéro. Faisons l'hypothèse*

(H) *Le groupe* $\Theta = \mathrm{Coker}[H^1(X,\mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$ *est d'exposant fini, annulé par l'entier $N > 0$.*

Alors $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini, divisant N, et, pour tout entier $n > 0$ multiple de N, l'application composée

$$CH^2(X)_{tors} \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

de la projection naturelle et de l'application cycle est injective.

Démonstration :

a) Le premier énoncé, à savoir que sous l'hypothèse (H), le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est annulé par N, se lit immédiatement sur le diagramme (7.2) : de fait, $CH^2(X)_{tors}$ est un sous-groupe de Θ.

b) LEMME ([S4], Prop. 2.4). — *Pour toute k-variété lisse intègre X, et pour tout entier $n > 0$, on a une suite exacte*

$$_n\Theta \longrightarrow {}_nD \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Démonstration : On considère le diagramme commutatif suivant :

(7.3)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & H^3_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mu_n^{\otimes 2})) & \rightarrow CH^2(X)/n \rightarrow & H^4_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(X,\mathcal{K}_2)\otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \rightarrow & H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \rightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & & \\
 & & \downarrow \times n & & \downarrow \times n & & \\
 & & H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \rightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))). & &
\end{array}$$

Dans ce diagramme, la suite horizontale supérieure est la suite exacte provenant de la théorie de Bloch–Ogus (voir § 3), la suite médiane est un complexe (début du présent paragraphe), la suite verticale de gauche est exacte : c'est la suite exacte de Kummer déduite de la suite exacte de faisceaux étales

$$1 \longrightarrow \mu_n^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \xrightarrow{\times n} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2) \longrightarrow 1.$$

Montrons que la suite verticale de droite est exacte. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mu_n^{\otimes 2})) & \longrightarrow & H^3_{et}(k(X),\mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^1} H^2_{et}(k(x),\mu_n) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & \longrightarrow & H^3_{et}(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^1} H^2_{et}(k(x),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \times n & & \downarrow \times n \\
0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & \longrightarrow & H^3_{et}(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x\in X^1} H^2_{et}(k(x),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))
\end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. Les suites verticales proviennent de suites de Kummer. Elles sont donc exactes sauf peut-être en leur terme initial. Que $H^2_{et}(k(x), \mu_n)$ s'injecte dans $H^2_{et}(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$ est une conséquence du théorème 90 de Hilbert. Que $H^3_{et}(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$ s'injecte dans $H^3_{et}(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est hautement non trivial : c'est une conséquence du théorème principal de Merkur'ev–Suslin [MS].

Des propriétés d'exactitude du diagramme ci-dessus résulte alors l'exactitude de la suite verticale de droite dans le diagramme (7.3). De ce diagramme on déduit alors une suite exacte

$$H^3_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow {}_nD \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}),$$

puis, comme la première flèche se factorise par ${}_n\Theta$ (voir (7.2)), la suite exacte

$${}_n\Theta \longrightarrow {}_nD \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

annoncée. $\square$

c) On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & CH^2(X)_{tors} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
{}_n\Theta & \longrightarrow & {}_nD & \longrightarrow & CH^2(X)/n & \longrightarrow & H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Theta & \longrightarrow & D & \longrightarrow & CH^2(X) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, & &
\end{array}$$

où la suite horizontale médiane est la suite exacte décrite ci-dessus, la suite horizontale inférieure est obtenue par passage à la limite inductive sur les suites précédentes, et ρ est l'application composée. Observons :

– La suite verticale est un complexe.

– Si N divise n, donc n annule Θ, alors ${}_n\Theta \longrightarrow \Theta$ est surjectif.

– Si N divise n, alors, comme nous l'avons déjà remarqué, n annule $CH^2(X)_{tors}$. Il en résulte que l'application $CH^2(X)_{tors} \longrightarrow CH^2(X)/n$ est injective.

Fixons $n > 0$ multiple de N, et soit $z_0 \in CH^2(X)_{tors}$ tel que $\rho(z_0) = 0$. La nullité de z_0, et donc le théorème, résultent maintenant d'une chasse au diagramme que nous représenterons symboliquement, les éléments z_i étant numérotés suivant leur ordre d'apparition :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & z_0 & & \\
 & & & & \downarrow \rho & & \\
z_5 & \longrightarrow & z_6 \; z_2 & \longrightarrow & z_1 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \; \downarrow & & \downarrow & & \\
z_4 & \longrightarrow & z_3 & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

De l'injection ${}_nD \subset D$, on conclut $z_6 = z_2$, et donc $z_1 = 0$, soit finalement $z_0 = 0$. $\square$

Remarque 7.1.1 : La méthode permettant d'obtenir l'injectivité dans le théorème ci-dessus est aparue pour la première fois dans un travail en préparation de P. Salberger. Dans ce travail, Salberger s'intéresse à l'application de réciprocité sur le groupe $SK_1(X)$ d'une surface X projective et lisse sur un corps p-adique, et sous certaines hypothèses, établit une propriété d'injectivité. C'est Saito qui eut l'idée d'utiliser la même technique dans l'étude des cycles de torsion.

Le théorème 7.1 admet la variante suivante, utile lorsque le corps de base k est de dimension cohomologique plus grande que 2.

THÉORÈME 7.2. — *Soit X une variété lisse intègre sur un corps k de caractéristique zéro. Faisons l'hypothèse*

(H') Le groupe $\Theta' = \mathrm{Coker}[H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus (H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$ *est d'exposant fini, annulé par l'entier $N > 0$.*

Supposons de plus $X(k) \neq \emptyset$. Alors $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini, divisant N, et, pour tout entier $n > 0$ multiple de N, l'application composée

$$CH^2(X)_{tors} \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

de la projection naturelle et de l'application cycle est injective.

Démonstration (esquisse) : On choisit un point $P \in X(k)$. Ce point permet de réaliser une section de la flèche de changement de base $H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ utilisée dans la définition de Θ', et donc d'écrire $\Theta = \Theta' \oplus H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Via le même point P, on peut aussi décomposer $D = H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ en $D = D' \oplus H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. On obtient alors la suite exacte

$${}_n\Theta' \longrightarrow {}_nD' \longrightarrow CH^2(X)/n \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}),$$

et la démonstration se poursuit comme celle du théorème 7.1. □

Lorsque X est un variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro, on a ([CR1]) :

$$H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0.$$

On voit donc que la flèche

$$H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus (H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)),$$

dont le conoyau est Θ', se factorise alors en une flèche :

$$H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus (H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))].$$

D'exposés de Salberger (voir § 9) et de l'article de Saito on peut encore extraire le résultat suivant, valable sans hypothèse arithmétique sur k :

THÉORÈME 7.3. — *Soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro. Supposons $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le conoyau de l'application*

$$H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus (H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$$

est d'exposant fini.

Démonstration : La suite spectrale de Hochschild–Serre en cohomologie étale

$$H^p(k, H^p_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \Longrightarrow H^n_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

donne lieu à une filtration $F^0 \subset F^1 \subset F^2$ sur le groupe

$$F^2 = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))].$$

On a une surjection $H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow F^0$ qui composée avec $F^0 \subset F^2$ est la flèche naturelle $H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Le quotient F^1/F^0 est un sous-quotient du groupe $H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$. Mais sous l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, le groupe $H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est un groupe fini, et donc F^1/F^0 est un groupe d'exposant fini. Le quotient F^2/F^1 est un sous–groupe de $H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$. Pour établir le théorème, il suffira donc de montrer que le groupe

$$\mathrm{Coker}[H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))]$$

est un groupe d'exposant fini dès que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Puisqu'on veut seulement montrer que ce groupe est d'exposant fini, un argument de transfert permet de remplacer le corps k par une extension finie, que je noterai encore k, et de supposer que $X(k) \neq \emptyset$ et que le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ agit trivialement sur le groupe de Néron–Severi $NS(\overline{X})$ (on aurait pu faire cet argument de transfert dès le début de la démonstration). Ainsi $NS(X) = NS(\overline{X})$. On considère alors le diagramme (où t = torsion du groupe considéré) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \\
\downarrow = & & & & \\
\mathrm{Pic}(X) \otimes H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) & & & & \uparrow \varphi \\
\downarrow & & & & \\
(NS(X)/t) \otimes H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) & \simeq & H^0(k, (NS(\overline{X})/t) \otimes H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))) & \rightarrow & H^1(k, (NS(\overline{X})/t) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))
\end{array}$$

où la première flèche horizontale est donnée par le cup–produit, et où φ est induite par la flèche

$$NS(\overline{X}) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1) \longrightarrow H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

déduite, par torsion par $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)$, de la flèche

$$\delta : NS(\overline{X}) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$$

issue de la suite de Kummer. Selon Saito, le diagramme ci–dessus commute. Comme nous sommes en caractéristique zéro, l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ est, par la théorie de Hodge, équivalente au fait que δ a un conoyau fini. Ainsi $\mathrm{Coker}(\varphi)$ est d'exposant fini, et le théorème résulte alors du diagramme ci–dessus. □

Remarque 7.3.1 : Pour établir l'énoncé, on s'est seulement servi de l'image de $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^*$ dans $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ (après extension du corps de base). Comme l'observe Salberger, il serait très désirable de savoir fabriquer des éléments plus intéressants dans $H^1(X, \mathcal{K}_2)$.

Remarque 7.3.2 : De l'égalité

$$H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0,$$

du diagramme (7.2), et du théorème 7.3, on déduit que pour X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k de caractéristique zéro, avec $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et

$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, le groupe $\mathrm{Ker}[CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})]$ est d'exposant fini (résultat de [CR1] rappelé dans la démonstration du théorème 6.4).

Le théorème 7.3 a l'application arithmétique immédiate :

COROLLAIRE 7.4. — *Soit k un corps de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur k. Supposons $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le conoyau de l'application*

$$H^3_{et}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \oplus (H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est d'exposant fini.

Démonstration : De fait, l'image de l'application

$$H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est dans le sous-groupe $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G$ des invariants sous le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Comme on l'a déjà rappelé dans la démonstration du théorème 6.4, l'hypothèse que k est un corps de type fini sur le corps premier et une réduction au cas des corps finis assure, via le théorème de Deligne sur la conjecture de Weil, que ce groupe, comme d'ailleurs tout groupe $H^i_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j))^G$ pour $i \neq 2j$, est un groupe fini ([CR1], Theorem 1.5). L'énoncé résulte alors directement du théorème 7.3. $\square$

Le corollaire 7.4 assure que, sous ses hypothèses, la condition (H') du théorème 7.2 est satisfaite.

Or, comme annoncé en 1.9.2, on a le théorème général suivant :

THÉORÈME 7.5 ([S4]). — *Soit X une variété lisse (non nécessairement propre) sur un corps k de type fini sur $\mathbf{Q}$. Alors, pour tout entier $n > 0$, et pour tout entier naturel i, l'image de l'application cycle*

$$CH^i(X)/n \longrightarrow H^{2i}_{et}(X, \mu_n^{\otimes i})$$

est un groupe fini.

Démonstration (résumé) : On peut trouver un anneau R de corps de fractions k, de type fini et lisse sur $\mathbf{Z}$, avec n inversible dans R, et un schéma $\mathbf{X}$ lisse sur $\mathrm{Spec}(R)$ tel que $\mathbf{X} \times_R k = X$. En utilisant la lissité de $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, on obtient que les faisceaux étales $R^j p_* \mu_n^{\otimes i}$ sont constructibles sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, donc à cohomologie étale finie, ce qui, via la suite spectrale de Leray, assure la finitude des groupes $H^r_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes s})$ (voir 6.2). L'application $CH^i(\mathbf{X}) \longrightarrow CH^i(X)$ est surjective, mais l'on ne sait pas encore définir une application cycle allant de $CH^i(\mathbf{X})$ dans $H^{2i}_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes i})$ (et qui ferait commuter le diagramme évident, assurant ainsi la finitude voulue). Le point délicat de la démonstration de Saito consiste à montrer qu'à tout le moins l'image de l'application cycle $CH^i(X) \longrightarrow H^{2i}_{et}(X, \mu_n^{\otimes i})$ est contenue dans l'image de $H^{2i}_{et}(\mathbf{X}, \mu_n^{\otimes i})$ dans $H^{2i}_{et}(X, \mu_n^{\otimes i})$, ce qui assure sa finitude. $\square$

La combinaison de 7.2, 7.4 et 7.5 donne donc le théorème de finitude :

THÉORÈME 7.6. — *Soit k un corps de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et soit X une variété projective lisse et géométriquement intègre sur k. Supposons $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et $X(k) \neq \emptyset$. Alors le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ de $CH^2(X)$ est un groupe fini.* $\square$

Remarque 7.6.1 : Ce théorème généralise l'énoncé obtenu en 6.3.1 sur un corps de nombres – à la restriction $X(k) \neq \emptyset$ près, qu'on n'avait pas imposée dans 6.3.1. Sur un corps k de type fini sur $\mathbf{Q}$, un seul cas avait été jusqu'alors traité, celui des surfaces rationnelles ([C1]), là encore avec la restriction $X(k) \neq \emptyset$. De fait, il existe une surface rationnelle X sur un corps $k = \mathbf{Q}_p(T)$ de fonctions rationnelles en une variable sur un corps p-adique $\mathbf{Q}_p$, avec $X(k) = \emptyset$ et $CH^2(X)_{tors} \neq 0$ non détectable par les applications cycles (Sansuc et l'auteur, J. of Algebra 84 (1985); réinterprétation par Salberger, non publiée).

Par sa méthode, mais en s'appuyant d'une part sur le résultat de Salberger (Théorème 6.6) bornant la torsion, d'autre part sur des résultats de Jannsen proches de ceux utilisés dans la démonstration du théorème 6.7, Saito a réussi à obtenir le théorème de finitude le plus général obtenu au chapitre précédent :

THÉORÈME 7.7 (= Théorème 6.1). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons le groupe $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration : D'après 6.6, le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est d'exposant fini. Pour presque tout premier l, la partie l-primaire $CH^2(X)_{l-tors}$ de $CH^2(X)_{tors}$ est donc nulle, et pour établir le théorème, il suffit d'établir la finitude de $CH^2(X)_{l-tors}$ pour tout premier l. Comme au théorème 7.3, on considère la suite spectrale en cohomologie étale

$$H^p(k, H^q_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \Longrightarrow H^n_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)),$$

qui donne lieu à une filtration $F^0 \subset F^1 \subset F^2 \subset F^3$ sur le groupe $H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$.

Il sera très commode de travailler dans la catégorie de Serre $\mathcal{C}$ quotient de la catégorie des groupes abéliens par celle des groupes abéliens finis.

Le groupe F^0, quotient de $H^3(k, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))$, est fini, donc nul dans $\mathcal{C}$, car k est un corps de nombres. Le quotient F^3/F^2 est un sous-groupe de $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^G$, groupe fini (voir la démonstration de 7.4), donc nul dans $\mathcal{C}$. On a une injection

$$F^2/F^1 \hookrightarrow H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)).$$

Dans $\mathcal{C}$, on a une surjection

$$H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \twoheadrightarrow F^1/F^0.$$

Sous l'hypothèse que k est un corps de nombres, Jannsen ([J], Cor. 7 (b) p. 355) a établi l'existence d'un entier $r \geq 0$ (dépendant a priori de l – et qu'on peut choisir nul pour presque tout l) et d'une surjection

$$(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r \twoheadrightarrow H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^o)$$

(M^o désigne le sous-groupe divisible maximal d'un groupe M). On observera que le quotient $H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))/H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^o$ est un groupe fini, et donc que l'application

$$H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^o) \longrightarrow H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$$

a un conoyau d'exposant fini.

On a $F^2 = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))]$). Comme on l'a établi dans la démonstration du théorème 7.3, l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ implique, sur un corps k de caractéristique zéro, que l'application composée

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow F^2 \longrightarrow H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))$$

a un conoyau d'exposant fini.

On dispose donc dans $\mathcal{C}$ de l'application composée

$$(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r \longrightarrow H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^o) \longrightarrow H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)).$$

Notons ici $\Theta = \mathrm{Coker}[H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))]$. Du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \Theta & & \\
 & & \uparrow & & \\
(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r & \longrightarrow & H^3_{et}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)) & \longrightarrow & H^1(k, H^2_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))) \\
 & & \uparrow & & \\
 & & H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & &
\end{array}$$

et des considérations précédentes, on voit que sous nos hypothèses, le groupe

$$\Theta'' = \mathrm{Coker}[(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r \longrightarrow \Theta]$$

est un groupe d'exposant fini.

Soit (voir le diagramme (7.2)) :

$$D'' = \mathrm{Coker}[(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}^3(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2)))].$$

Tout quotient d'un groupe $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^a$ est de la forme $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^b$ (avec $b \leq a$). On en déduit donc que dans la catégorie $\mathcal{C}$, pour tout entier $n > 0$, les flèches naturelles induites sur la n–torsion ${}_n\Theta \longrightarrow {}_n\Theta''$ et ${}_nD \longrightarrow {}_nD''$ sont des isomorphismes, et qu'il existe un entier $n > 0$ (puissance de l) tel que l'inclusion ${}_n\Theta'' \longrightarrow \Theta''$ soit un isomorphisme. Comme en c) de la démonstration du théorème 7.1, on considère dans $\mathcal{C}$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & CH^2(X)_{l-tors} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
{}_n\Theta'' & \longrightarrow & {}_nD'' & \longrightarrow & CH^2(X)/n & \longrightarrow & H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Theta'' & \longrightarrow & D'' & \longrightarrow & CH^2(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l\ , & &
\end{array}$$

où la suite horizontale est exacte (via Merkur'ev–Suslin), la suite verticale est un complexe, et la flèche ${}_n\Theta'' \longrightarrow \Theta''$ un isomorphisme. D'après le théorème 6.6 (Salberger), $CH^2(X)(l)$ est d'exposant fini. Quitte à remplacer n par une puissance plus élevée de l, annulant $CH^2(X)_{l-tors}$, on peut donc assurer que l'application $CH^2(X)_{l-tors} \longrightarrow CH^2(X)/n$ est injective.

La même chasse au diagramme qu'au théorème 7.1 montre alors que l'application

$$CH^2(X)_{l-tors} \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

est une injection dans $\mathcal{C}$. Ainsi, dans la catégorie des groupes abéliens, l'application

$$CH^2(X)_{l-tors} \longrightarrow H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$$

a un noyau fini. Comme l'image de cette application est finie (Théorème 7.5), on conclut que le groupe $CH^2(X)_{l-tors}$ est lui-même fini. $\square$

Remarque 7.7.1 : Dans l'approche ci-dessus, on établit la finitude de $CH^2(X)_{tors}$ sans montrer d'abord, comme on l'avait fait au paragraphe 6, que pour tout entier $n > 0$ le groupe ${}_nCH^2(X)$ est fini.

§ 8. Variétés sur les corps locaux

Par *corps local*, on entendra ici une extension finie du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$. On a le résultat général suivant (cf. [CSS] Cor. 2 p. 773) :

THÉORÈME 8.1. — *Soit k un corps local, et X une k-variété lisse. Alors pour tout entier $n > 0$, le sous-groupe de n-torsion ${}_nCH^2(X)$ est un groupe fini.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 3.3.2 : le groupe ${}_nCH^2(X)$ est un sous-quotient du groupe de cohomologie étale $H^3_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2})$. Or pour une variété X sur un corps local, et tout $i \geq 0$ et j entiers, le groupe $H^i_{et}(X, \mu_n^{\otimes j})$ est fini, comme on le voit en utilisant la suite spectrale de Hochschild–Serre, la finitude des groupes de cohomologie $H^q_{et}(\overline{X}, \mu_n^{\otimes j})$ ($q \geq 0$) et celle des groupes $H^p(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), F)$ ($p \geq 0$) pour k local et F un $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$–module fini. □

Le théorème suivant avait été obtenu sous des hypothèses plus restrictives dans [CR1]. C'est l'énoncé 8.3 ci–dessous qui permet d'aller un peu plus loin, en éliminant les hypothèses du type : $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, ou X (ou $\underline{\mathrm{Alb}}_X$) a bonne réduction.

THÉORÈME 8.2. — *Soient k un corps local, extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors :*

(*a*) *Le groupe*

$$\ker[CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})]$$

est fini.

(*b*) *Si de plus l'image du groupe $NH^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ dans le groupe $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est fini, par exemple si $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G$ est fini, alors le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

(*c*) ([CR1], 3.16). *Si X a potentiellement bonne réduction sur k, la torsion première à p de $CH^2(X)$ est un groupe fini.*

(*d*) ([CR3, 6.1) *Si X est une surface, le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration : Tout d'abord, d'après le théorème 4.2, le groupe $CH^2(\overline{X})_{tors}$ est, de façon G–équivariante, un sous–groupe de $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, et un coup d'oeil au diagramme (3.6) montre que l'image de $CH^2(X)_{tors}$ dans $CH^2(\overline{X})_{tors} \subset H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ s'identifie à l'image de

$$NH^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$$

dans $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. L'énoncé ($b$) résulte donc de ($a$).

Si X a bonne réduction potentielle, des théorèmes de changement de base en cohomologie étale et du théorème de Deligne (conjecture de Weil) résulte la finitude des groupes $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(2))^G$ pour chaque l premier $\neq p$, et leur nullité pour presque tout l ([CR1], 1.5.1). Ainsi (c) résulte de (b).

Lorsque X est une surface, le G–module $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ s'identifie au groupe $\underline{\mathrm{Alb}}_X(\overline{k})_{tors}$ des points de torsion de la variété d'Albanese $\underline{\mathrm{Alb}}_X$ de X. Ainsi $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G$ s'identifie au groupe $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)_{tors}$, et ce dernier groupe est fini (voir § 1, Prop. 1.7). Ainsi (d) résulte de (b).

Etablissons (a). Comme on l'a rappelé dans la démonstration du théorème 6.4, on dispose d'une suite exacte

$$H^1(G, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow \mathrm{Ker}[CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\overline{X})] \longrightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

Sous l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et k corps local, on sait que le groupe $H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ est fini ([CR1] Prop. 3.9). En utilisant la nullité de $H^1(G, K_2\overline{k}(X)/K_2\overline{k})$ pour une variété sur un corps local ([C1]), et l'unique divisibilité du groupe $K_2\overline{k}$, on voit que le groupe de gauche s'identifie au noyau

$$\operatorname{Ker}\rho_X : H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, K_2\overline{k}(X)).$$

Or le théorème 8.3 ci-dessous dit que ce groupe est fini. Ainsi le groupe médian dans la suite exacte ci-dessus est fini. $\square$

Remarque 8.2.1 : On peut se demander si l'hypothèse de (b) n'est pas toujours satisfaite (cf. [J] Remark 5 p. 349).

Il reste donc à établir le théorème suivant ([CR3], Prop. 4.2), analogue sur un corps local du théorème 6.7 (Salberger) :

THÉORÈME 8.3. — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps local k. Le groupe*

$$H^1(G, K_2\overline{k}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) = \operatorname{Ker}\rho_X : H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, K_2\overline{k}(X))$$

est un groupe fini.

Démonstration : Elle est entièrement analogue à celle du théorème 6.7, dont nous reprenons les notations. Supposons $\dim(X) > 1$. Soit $Y \subset X$ une section hyperplane lisse. La flèche de restriction $H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, H^0(\overline{Y}, \mathcal{K}_2))$ induit une flèche $\operatorname{Ker}(\rho_X) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\rho_Y)$. Le noyau de $H^2(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G, H^0(\overline{Y}, \mathcal{K}_2))$ s'identifie à celui de

$$H^2(G, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \longrightarrow H^2(G, H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))).$$

Comme la G–cohomologie d'un G–module fini est finie (k est local), à groupes finis près, ce noyau s'identifie à celui de

$$H^2(G, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o) \longrightarrow H^2(G, H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o).$$

La flèche de restriction

$$H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o \longrightarrow H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o$$

est une application G–équivariante qui admet une presque rétraction, c'est-à-dire qu'il existe une flèche G–équivariante

$$H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o \longrightarrow H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o$$

qui composée avec la précédente est la multiplication par un entier $m > 0$. Ainsi le noyau de

$$H^2(G, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o) \longrightarrow H^2(G, H^1_{et}(\overline{Y}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o)$$

est contenu dans le groupe de m–torsion de $H^2(G, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o)$, et ce groupe est un quotient de $H^2(G, {}_m(H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o))$, groupe fini puisque k est local. On voit donc que la flèche $\operatorname{Ker}(\rho_X) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\rho_Y)$ a un noyau fini. On est donc ramené à établir le théorème pour une courbe C sur un corps local. Ceci est fait par Raskind dans [R3], dont nous rappelons brièvement les arguments. Comme on a $CH^2(C) = 0$ pour une courbe C, la méthode galoisienne montre que le groupe $H^1(G, K_2\overline{k}(C)/H^0(\overline{C}, \mathcal{K}_2))$ s'identifie au conoyau de la flèche

$$H^1(C, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^1(\overline{C}, \mathcal{K}_2)^G.$$

Notons $V(C) = \mathrm{Ker}[H^1(C,\mathcal{K}_2) \longrightarrow k^*]$ et $V(\overline{C}) = \mathrm{Ker}[H^1(\overline{C},\mathcal{K}_2) \longrightarrow \overline{k}^*]$, les flèches provenant des applications de réciprocité usuelles. Comme l'explique Raskind (op. cit. 3.5 et lemme suivant) un théorème de S. Saito en théorie du corps de classes supérieur (sur un corps local) assure que l'application $V(C) \longrightarrow V(\overline{C})^G$ est surjective. En utilisant l'unique divisibilité de $V(\overline{C})$ ([R3], Lemma 1.1) et la G–cohomologie de la suite exacte

$$0 \longrightarrow V(\overline{C}) \longrightarrow H^1(\overline{C},\mathcal{K}_2) \longrightarrow \overline{k}^* \longrightarrow 0,$$

on voit que le conoyau de $H^1(C,\mathcal{K}_2) \longrightarrow H^1(\overline{C},\mathcal{K}_2)^G$ s'identifie à celui de

$$H^1(C,\mathcal{K}_2) \longrightarrow k^*,$$

i.e. à celui de la flèche

$$N : \bigoplus_{P\in C^{(0)}} k(P)^* \longrightarrow k^*,$$

où les flèches $N_P : k(P)^* \longrightarrow k^*$ ne sont autres que les applications normes pour tout point fermé P. La flèche N est surjective si C possède un k-point. Dans ce cas, on a donc même $H^1(G, K_2\overline{k}(C)/H^0(\overline{C},\mathcal{K}_2)) = 0$. En l'absence de point rationnel, il est cependant clair que l'image de N dans k^* est d'indice fini, car c'est déjà le cas pour chaque N_P, k étant un corps local. On peut se demander si N n'est pas toujours surjective, même en l'absence de point k–rationnel. $\square$

Pour certaines surfaces, l'approche de Saito permet de contrôler le groupe $CH^2(X)_{tors} = CH_0(X)_{tors}$ au moyen d'applications cycles, et de façon peut-être plus frappante encore, au moyen du groupe de Brauer. Le théorème suivant s'applique en particulier aux surfaces avec $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$ et $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$ (cette dernière condition assurant la trivialité de la variété d'Albanese), en particulier aux surfaces d'Enriques et aux surfaces rationnelles. Seul ce dernier cas était connu ([C1]).

THÉORÈME 8.4 (Saito, [S2]). — *Soit k un corps local, et soit X une surface projective lisse et géométriquement intègre sur k. Supposons $H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$ et supposons que la variété d'Albanese $\underline{\mathrm{Alb}}_X$ de X ait potentielle bonne réduction. Alors :*

(*a*) *Il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout entier n multiple de N, l'application cycle*

$$CH_0(X)_{tors} \longrightarrow H^4_{et}(X,\mu_n^{\otimes 2})$$

soit injective.

(*b*) *L'accouplement naturel*

$$CH_0(X) \times Br(X) \longrightarrow Br(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

induit une injection

$$CH_0(X)_{tors} \longrightarrow \mathrm{Hom}(Br(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Démonstration : Pour établir (*a*), il suffit, d'après le théorème 7.1, d'établir que le conoyau de la flèche

$$H^1(X,\mathcal{K}_2)\otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est d'exposant fini. Pour cela, on reprend la démonstration du théorème 7.3. On analyse le groupe $H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ au moyen de la suite spectrale de Hochschild–Serre. Le groupe $H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est nul (k est local, donc de dimension cohomologique $cd(k) = 2$). Le groupe $H^3_{et}(\overline{X},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G$ est fini, car X est une surface sur un corps local (voir la démonstration de 8.2 (*d*) ci–dessus). Procédant comme en 7.3, on voit qu'il suffit ici de montrer que le groupe

$H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est d'exposant fini (en 7.3, l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ garantit la nullité du sous-groupe divisible maximal de $H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, ce qui assure à peu de frais que le groupe $H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est d'exposant fini).

Or le groupe $H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$ est ici fini, car l'hypothèse de bonne réduction de la variété d'Albanese, donc de la variété de Picard, sur une extension finie K de k assure que le groupe $H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o)$ est nul (cf. [CR1], p. 190/191), donc que le groupe $H^2(k, H^1_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^o)$ est fini (en fait, nul, par exemple parce que $cd(k) \leq 2$ implique que ce groupe est divisible). Ceci établit (a).

Passons à (b). La combinaison de la dualité en théorie du corps de classes local et de la dualité de Poincaré pour une variété projective et lisse sur un corps séparablement clos donne lieu pour la surface X à un accouplement non dégénéré de groupes abéliens finis

$$H^4_{et}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \times H^2_{et}(X, \mu_n) \longrightarrow H^6_{et}(X, \mu_n^{\otimes 3}) = \mathbf{Z}/n,$$

(voir [S1], 2.9; pour une dualité analogue, mais sur un corps fini, voir [CSS] démonstration de (i), p. 790/791), et la suite de Kummer donne lieu à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)/n \longrightarrow H^2_{et}(X, \mu_n) \longrightarrow {}_nBr(X) \longrightarrow 0$$

et l'on vérifie que l'accouplement

$$CH^2(X)/n \times \mathrm{Pic}(X)/n \longrightarrow H^6_{et}(X, \mu_n^{\otimes 3}) = \mathbf{Z}/n$$

induit par l'accouplement ci-dessus, l'application cycle et la flèche déduite de la suite de Kummer, est nul (l'application cycle envoie un point fermé P dans la cohomologie à support dans ce point, et tout diviseur sur X admet un représentant à support étranger à P). Choisissant alors n multiple de N comme en (a), on déduit alors de (a) une injection :

$$CH_0(X)_{tors} \hookrightarrow \mathrm{Hom}({}_nBr(X), \mathbf{Z}/n)$$

et donc a fortiori une injection $CH_0(X)_{tors} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Br(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ comme annoncé. Un petit travail permet de vérifier que cette application est bien déduite de l'accouplement naturel

$$CH_0(X) \times Br(X) \longrightarrow Br(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(pour un calcul analogue, voir [CSS] démonstration de (ii), p. 791/792). $\square$

Remarque 8.4.1 : Pour éliminer l'hypothèse (désagréable) de bonne réduction, il suffirait d'établir que l'image de $H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ dans $H^3_{et}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est finie, ou du moins d'exposant fini. Sans hypothèse de bonne réduction pour la surface X, on sait en effet que $CH^2(X)_{tors}$ est fini (Théorème 8.2). Si l'image de $H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ dans $H^3_{et}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est finie, le diagramme (7.2) montre que le groupe Θ est d'exposant fini, ce qui permet alors d'appliquer le théorème 7.1.

Remarque 8.4.2 : Sous les hypothèses de 8.4, et sous l'hypothèse supplémentaire, sans doute superfétatoire (conjecture de Bloch sur les surfaces avec $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$), que l'application d'Albanese $A_0(\overline{X}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(\overline{k})$ est un isomorphisme, Saito [S2] démontre qu'en fait l'accouplement

$$A_0(X) \times Br(X) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est non dégénéré à gauche. L'idée est de contrôler l'image de $A_0(X)$ dans $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ au moyen de la dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps locaux, qui donne un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \simeq \mathrm{Hom}(H^1(k, \underline{\mathrm{Pic}}^0_X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

L'homomorphisme composé naturel

$$H^1(k, \underline{\mathrm{Pic}}^0_X) \longrightarrow H^1(k, \underline{\mathrm{Pic}}_X) \longrightarrow Br(X),$$

donne alors lieu à un diagramme dont on vérifie la commutativité :

$$\begin{array}{ccc} A_0(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Alb}}_X(k) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Hom}(Br(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H^1(k, \underline{\mathrm{Pic}}^0_X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Ainsi le noyau de la flèche verticale de gauche est inclus dans le noyau de la flèche horizontale supérieure, qui par l'hypothèse supplémentaire est un groupe de torsion. Le théorème précédent assure que la restriction à $A_0(X)_{tors}$ de la flèche verticale de gauche est injective.

THÉORÈME 8.5. — *Soit X une surface projective et lisse, géométriquement intègre sur un corps local k. Supposons*

(i) $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et

(ii) L'application d'Albanese $A_0(\overline{X}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(\overline{k})$ est un isomorphisme (conséquence de (i) selon une conjecture de Bloch).

Alors le groupe $A_0(X)$ est une extension d'un sous-groupe ouvert de $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ par un groupe fini. En particulier, le quotient $A_0(X)/n$ est fini pour tout entier $n > 0$, et le quotient $A_0(X)/l$ est nul pour presque tout premier l.

Démonstration : D'après (*ii*), le noyau de la flèche $A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ est un groupe de torsion, donc fini sous l'hypothèse (*i*) d'après le théorème 8.2 (*d*). Etudions l'image de $A_0(X)$ dans $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$. Comme ce dernier groupe est un groupe analytique p-adique compact commutatif, ses sous-groupes ouverts ne sont autres que ses sous-groupes d'indice fini. Soit C une courbe section hyperplane lisse de X. On a un épimorphisme de variétés abéliennes $\underline{\mathrm{Alb}}_C \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X$, induisant un homomorphisme $\underline{\mathrm{Alb}}_C(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ d'image ouverte, donc d'indice fini, dans $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$. L'application $A_0(C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_C$ est un isomorphisme si $C(k) \neq \emptyset$, dans le cas général son image est un sous-groupe d'indice fini de $\underline{\mathrm{Alb}}_C(k)$ (k est local). Ainsi l'image de $A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ contient un sous-groupe d'indice fini de $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$, c'est donc un sous-groupe d'indice fini, donc ouvert. Le groupe analytique p-adique compact $\underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ est une extension d'un groupe fini par un sous-groupe isomorphe à une somme directe finie d'exemplaires de $\mathbb{Z}_p$, ce qui implique alors la dernière partie de l'énoncé. $\square$

Pour terminer, et sans démonstration, je citerai un résultat obtenu par la méthode de localisation.

THÉORÈME 8.6 ([CR3], 6.3). — *Soit k un corps local k, extension finie de $\mathbb{Q}_p$, soit R son anneau des entiers et $\mathbb{F}$ son corps résiduel. Soit $\mathbf{X}$ un R-schéma projectif et lisse à fibres géométriques intègres, de fibre générique X/k et de fibre spéciale $Y/\mathbb{F}$. Supposons $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. Alors, pour tout premier $l \neq p$, les sous-groupes de torsion l-primaire $CH^2(X)_{l-tors}$ et $CH^2(Y)_{l-tors}$ sont des groupes finis naturellement isomorphes.* $\square$

§ 9. Variétés sur les corps de nombres, III

Aux paragraphes précédents, j'ai donné des démonstrations, dues pour l'essentiel à Salberger, au moins dans le cas global, des théorèmes bornant l'exposant de la torsion de $CH^2(X)$ lorsque X satisfait $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ (Théorème 6.6 sur un corps global; théorème 8.2 (*b*) sur un corps local – avec quelques hypothèses parasites). Dans ce paragraphe, je commence par décrire la méthode originale de Salberger permettant d' établir ce résultat de torsion bornée (théorème 9.1 et début de la démonstration du théorème 9.2). La démonstration présentée ici a été reconstituée à partir d'exposés de Salberger en 1990.

J'expose ensuite comment Salberger (communication personnelle) peut modifier la technique de localisation exposée au § 6 de façon à établir le théorème de finitude 6.1, ici baptisé 9.2, sans recourir, comme Raskind et moi-même l'avions fait, au résultat fin de Bloch, Kato-Saito et Somekawa (démonstration du théorème 6.5, point c)).

La récente prépublication [Sb2] contient de nombreuses autres idées et démonstrations intéressantes, et j'engage le lecteur à la consulter.

THÉORÈME 9.1. — *Soit k un corps local (non archimédien) ou global de caractéristique zéro, et soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre. Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le conoyau de l'application*

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G \oplus H^3_{et}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$$

est d'exposant fini.

Démonstration : On procède comme au théorème 7.3. La suite spectrale de Hochschild–Serre en cohomologie étale

$$H^p(k, H^q_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \Longrightarrow H^n_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

donne lieu à une filtration $F^0_X \subset F^1_X \subset F^2_X$ sur le groupe $\mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G]$. Notons

$$N_r H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = \mathrm{Ker}[H^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G \oplus H^3_{et}(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))],$$

et considérons la filtration induite sur ce sous-groupe, soit

$$F^0_{X,r} \subset F^1_{X,r} \subset F^2_{X,r}.$$

Le groupe $F^0_{X,r}$ est un sous-groupe de F^0_X, lui-même quotient de $H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Sur un corps local, ce dernier groupe est fini. Sur un corps de nombres, il coïncide avec $(\mathbf{Z}/2)^s$, où s est le nombre de complétions réelles de k (en fait, sur k quelconque, si $X(k) \neq \emptyset$, alors $F^0_{X,r} = 0$, comme on voit par un argument de spécialisation).

Comme au théorème 7.3, l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ implique que l'application

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow F^2_X / F^1_X$$

a un conoyau d'exposant fini, a fortiori en est-il de même pour l'application

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow F^2_{X,r} / F^1_{X,r}.$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que le groupe $F^1_{X,r}$ est d'exposant fini. Pour cela on utilise la technique des sections hyperplanes déjà employée dans 6.7 et 8.3. Soit $C \subset X$ une k-courbe projective lisse géométriquement intègre obtenue par sections hyperplanes successives.

La suite spectrale de Hochschild–Serre est fonctorielle contravariante par morphismes quelconques. On obtient donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_X^0 & \longrightarrow & F_X^1 & \longrightarrow & E_{\infty,X}^{21} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_C^0 & \longrightarrow & F_C^1 & \longrightarrow & E_{\infty,C}^{21} & \longrightarrow & 0 \quad ,
\end{array}$$

où les groupes F_X^0 et F_C^0 sont finis. Par ailleurs, pour k local ou global, le groupe $H^4(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ est nul. De la fonctorialité de la suite spectrale on tire donc un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^2(k,H^1_{et}(\overline{X},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & \longrightarrow & E_{\infty,X}^{21} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^0(\overline{C},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))^G & \longrightarrow & H^2(k,H^1_{et}(\overline{C},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & \longrightarrow & E_{\infty,C}^{21} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dans ce diagramme, le groupe $H^0(\overline{C},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))^G = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)^G = \mu(k)$ est le groupe des racines de l'unité dans k ; c'est donc un groupe fini. Les arguments développés en 6.7 (cas global) et 8.3 (cas local) montrent que le noyau de la flèche verticale de gauche est d'exposant fini. Une chasse aux diagrammes montre alors que le noyau de la flèche $F_X^1 \longrightarrow F_C^1$ est aussi d'exposant fini.

Soit $Y \subset X$ est une section hyperplane lisse géométriquement intègre. Si R désigne l'anneau local de X au point générique de Y, tout élément de $NH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ a, par la théorie de Bloch–Ogus [Bl–O], une image nulle dans $H^3_{et}(R,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, donc, par passage au corps résiduel $k(Y)$ de R, une image nulle dans $H^3_{et}(k(Y),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Par induction, on voit donc que la flèche de restriction $H^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{et}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ envoie le sous-groupe $NH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ dans $NH^3_{et}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$, et aussi le groupe $N_rH^3_{et}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ dans $N_rH^3_{et}(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$.

En particulier, l'application $F^1_{X,r} \longrightarrow F^1_C$ a une image contenue dans $F^1_{C,r} = \mathrm{Ker}[F^1_C \longrightarrow H^3(k(C),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))]$.

Comparant les suites spectrales de Hochschild–Serre pour C et pour le corps des fonctions $k(C)$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_C^0 & \longrightarrow & F_C^1 & \longrightarrow & H^2(k,H^1_{et}(\overline{C},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))/im(\mu(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_{k(C)}^0 & \longrightarrow & F_{k(C)}^1 & \longrightarrow & H^2(k,H^1(\overline{k}(C),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) & \longrightarrow & 0 \quad ,
\end{array}$$

où F_C^0 et $F^0_{k(C)}$ sont des groupes finis quotients de $H^3(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$. Ainsi, à groupe fini près, $F^1_{C,r}$ coïncide avec

$$\mathrm{Ker}[H^2(k,H^1_{et}(\overline{C},\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \longrightarrow H^2(k,H^1(\overline{k}(C),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))].$$

Ce groupe n'est autre que le groupe

$$\mathrm{Ker}[H^2(G,H^0(\overline{C},\mathcal{K}_2)) \longrightarrow H^2(G,K_2\overline{k}(C))]$$

dont on a déjà dit (6.7 et 8.3) qu'il est d'exposant fini pour une courbe sur un corps local ou global – et nul lorsque cette courbe possède un point rationnel ([R3]).

Comme l'application $F^1_{X,r} \longrightarrow F^1_{C,r}$ a un noyau d'exposant fini, on conclut que $F^1_{X,r}$ est d'exposant fini, ce qui achève la démonstration.

(Comme on le vérifiera aisément, dans le cas local on peut partout dans la démonstration remplacer *d'exposant fini* par *fini.*) $\square$

THÉORÈME 9.2 (= Théorème 6.1). — *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres k. Supposons le groupe $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration : Montrons d'abord que le le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est un groupe d'exposant fini. Comparant la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow NH^3_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow CH^2(X)_{tors} \longrightarrow 0,$$

et la même suite au niveau de la clôture algébrique

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow NH^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \longrightarrow CH^2(\overline{X})_{tors} \longrightarrow 0,$$

et utilisant la nullité de $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ([CR1]) ainsi que la finitude de $H^3_{et}(\overline{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))^G$ (cf. démonstration du théorème 6.4), on déduit du théorème 9.1 ci-dessus que le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est un groupe d'exposant fini.

Ainsi $CH^2(X)_{l-tors}$ est nul pour presque tout premier l, et pour établir la finitude de $CH^2(X)_{tors}$, il suffit, pour un premier l donné arbitraire, d'établir la finitude de $CH^2(X)_{l-tors}$.

Reprenons alors la démonstration du théorème 6.5, dont je ne répéterai pas ici les notations. Reportons-nous au point b) de cette démonstration. On dispose de la suite de localisation

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow CH^2(\mathbf{X}_B) \longrightarrow CH^2(X_L) \longrightarrow 0,$$

et on a établi que l'application composée

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} NS(\mathbf{X}_q)$$

est surjective. A fortiori en est-il de même de l'application composée induite

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} NS(\mathbf{X}_q) \otimes \mathbf{Q}.$$

Mais la flèche de droite est ici un isomorphisme, car les groupes

$$J(\mathbf{F}_q) = Ker[\mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \longrightarrow NS(\mathbf{X}_q)]$$

sont de torsion (et même finis) , et donc $J(\mathbf{F}_q) \otimes \mathbf{Q} = 0$. Ainsi la flèche

$$H^1(X_L, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \bigoplus_{q \in \mathrm{Spec}(B)^{(1)}} \mathrm{Pic}(\mathbf{X}_q) \otimes \mathbf{Q}$$

est-elle surjective. De cette surjectivité et de la suite de localisation rappelée ci-dessus on déduit alors par un argument formel que l'application de restriction à la fibre générique sur les groupes de Chow, application bien sûr surjective, induit encore une application ***surjective*** $CH^2(\mathbf{X}_B)_{tors} \longrightarrow CH^2(X_L)_{tors}$ sur les groupes de torsion.

Plaçons-nous maintenant dans la situation du théorème 6.2, dont je reprends les notations. En faisant varier l'entier n parmi les puissances d'un nombre premier l, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbf{X}, \mathcal{H}^2(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \longrightarrow & CH^2(\mathbf{X})_{l-tors} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \gamma_2 & & \\ H^3_{et}(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & & \end{array}$$

où la flèche γ_2 est injective et la flèche horizontale surjective (les limites inductives filtrantes respectent surjections et injections).

Le groupe de torsion l-primaire $H^3_{et}(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$, limite directe des groupes finis $H^3_{et}(\mathbf{X}, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$, est un groupe de cotype fini, i.e. extension d'un groupe fini l-primaire par un groupe du type $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^m$, soit encore somme directe d'un groupe fini l-primaire et d'une somme finie de groupes $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$. Ceci vaut plus généralement pour tout groupe $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$. Pour le voir, on utilise les arguments classiques suivants (cf. [M1], p. 163 à 166 et [CSS], p. 773/774 et 780/781). On considère la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux étales

$$1 \longrightarrow \mu_{l^n}^{\otimes j} \longrightarrow \mu_{l^{n+m}}^{\otimes j} \longrightarrow \mu_{l^m}^{\otimes j} \longrightarrow 1$$

sur $\mathbf{X}$. On passe à la limite projective en n sur cette suite. On obtient encore une suite exacte, car les groupes $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mu_{l^n}^{\otimes j})$ sont finis (voir la démonstration du théorème 6.2 b)). On passe ensuite à la limite inductive sur m dans la longue suite exact obtenue. On obtient ainsi des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Z}_l(j)) \longrightarrow H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l(j)) \longrightarrow H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbf{X}, \mathbb{Z}_l(j))_{l-tors} \longrightarrow 0$$

où $H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l(j)) = H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Z}_l(j)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$. On observe que pour tout i et j entiers, la limite ***projective*** des groupes $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mu_{l^n}^{\otimes j})$ est un $\mathbb{Z}_l$-module de type fini. De la suite exacte ci-dessus résulte donc bien que $H^i(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ est une extension d'un groupe fini l-primaire par une somme directe de groupes $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$, et donc en fait une somme directe d'un groupe fini l-primaire et de groupes $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$.

En utilisant la dualité entre les $\mathbb{Z}_l$-modules compacts et modules de torsion l-primaires discrets, on voit que cette propriété se transmet à tout sous-quotient. Ainsi le groupe $CH^2(\mathbf{X})_{l-tors}$, sous-quotient de $H^3_{et}(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$, est-il de cotype fini, et il en est de même du groupe $CH^2(X)_{l-tors}$, dont nous avons établi qu'il est un quotient du précédent.

Mais, d'après le début de la démonstration, le groupe $CH^2(X)_{l-tors}$ est d'exposant fini. C'est donc un groupe fini. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[BV] L. Barbieri-Viale. — Cohomology theories and algebraic cycles on singular varieties, Contemp. Math. **126** (1992) 197-217; Theorie coomologiche e cicli algebrici sulle varieta' singolari, Tesi di dottorato, Universita' di Genova (1991).

[B1] S. Bloch. — Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, Comp. Math. **39** (1979) 107–127.

[B2] S. Bloch. — *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Ser. **4**, Durham, N.C. 1980.

[B3] S. Bloch. — Torsion algebraic cycles, K_2 and Brauer groups of function fields, in L.N.M. **844** (ed. M. Kervaire et M. Ojanguren) Springer 1981.

[B4] S. Bloch. — On the Chow groups of certain rational surfaces, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1981) 41–59.

[B5] S. Bloch. — Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces, Ann. of Math. **114** (1981) 229–265.

[BO] S. Bloch and A. Ogus. — Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sc. E.N.S. **7** (1974) 181–202.

[BS] S. Bloch and V. Srinivas. — Remarks on correspondences and algebraic cycles, Am. J. Math. **105** (1983) 1235–1253.

[C1] J.-L. Colliot–Thélène. — Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow group of rational surfaces, Invent. Math. **35** (1983) 1–20.

[C2] J.-L. Colliot–Thélène. — On the reciprocity sequence in higher class field theory of function fields, Prépublication d'Orsay **92-52** (1992).

[CR1] J.–L. Colliot–Thélène and W. Raskind. — K_2–cohomology and the second Chow group, Math. Ann. **270** (1985) 165–199.

[CR2] J.–L. Colliot–Thélène and W. Raskind. — On the reciprocity law for surfaces over finite fields, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. IA **33** (1986) 283–294.

[CR3] J.–L. Colliot–Thélène et W. Raskind. — Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion, Invent. Math. **105** (1991) 221–245.

[CS] J.–L. Colliot–Thélène and J.-J. Sansuc. — On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch, Duke Math. J. **48** (1981) 421–447.

[CSS] J.–L. Colliot–Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé. — Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J. **50** (1983) 763–801.

[Cb] K. Coombes. — The arithmetic of zero–cycles on surfaces with geometric genus and irregularity zero, Math. Ann. **291** (1991) 429–452.

[F] W. Fulton. — *Intersection Theory*, Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb. 3. Folge, Bd. **2**, Springer 1984.

[G] M. Gros. — 0–cycles de degré zéro sur les surfaces fibrées en coniques, J. reine und angew. Math. **373** (1987) 166–184.

[GS] M. GROS et N. SUWA. — Application d'Abel–Jacobi p–adique et cycles algébriques, Duke Math. J. **57** (1988) 579–613.

[J] U. JANNSEN. — On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, in : *Galois groups over* $\mathbb{Q}$ (ed. Y. Ihara, K. Ribert, J.–P. Serre) Springer–Verlag 1987.

[K] K. KATO. — A Hasse principle for two dimensional global fields, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986) 142–181.

[KS] K. KATO and S. SAITO. — Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Ann. of Math. **118** (1983) 241–275.

[L] F. LECOMTE. — Rigidité des groupes de Chow, Duke Math. J. **53** (1986) 405-426.

[MS] A.S. MERKUR'EV and A.A. SUSLIN. — K–cohomology of Severi–Brauer varieties and norm residue homomorphism, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982) 1011–1146 = Math. USSR Izv. **21** (1983) 307–341.

[M1] J.S. MILNE. — *Etale cohomology*, Princeton University Press, **33**, Princeton, N.J. 1980.

[M2] J.S. MILNE. — *Arithmetic Duality Theorems*, Perspect. Math. **1**, Academic Press, Boston 1986.

[Q] D. QUILLEN. — Higher algebraic K–theory I, in *Algebraic K–theory* I (H. Bass, ed.) LNM **341**, Springer–Verlag 1973.

[R1] W. RASKIND. — Algebraic K–theory, étale cohomology and torsion algebraic cycles, in *Algebraic K-theory and Algebraic Number Theory*, Honolulu 1987, Contemporary Mathematics **83** (1989) 311–341.

[R2] W. RASKIND. — Torsion algebraic cycles on varieties over local fields, in : *Algebraic K–theory : Connections with Geometry and Topology*, Lake Louise 1987, (J.F. Jardine and V.P. Snaith, ed.) Kluwer Academic Publishers 1989.

[R3] W. RASKIND. — On K_1 of curves over global fields, Math. Ann. **288** (1990) 179–193.

[S1] S. SAITO. — A global duality theorem for varieties over global fields, in : *Algebraic K–theory : Connections with Geometry and Topology*, Lake Louise 1987, (J.F. Jardine and V.P. Snaith, ed.) Kluwer Academic Publishers 1989.

[S2] S. SAITO. — A conjecture of Bloch and Brauer groups of surfaces over p–adic fields, preprint, May 1990.

[S3] S. SAITO. — Torsion zero–cycles and étale homology of singular schemes, Duke Math. J. **64** (1991) 71–83.

[S4] S. SAITO. — Cycle map on torsion algebraic cycles of codimension two, Invent. Math. **106** (1991) 443–460.

[Sb1] P. SALBERGER. — Zero–cycles on rational surfaces over number fields, Invent. Math. **91** (1988) 505–524.

[Sb2] P. SALBERGER. — Chow groups of codimension two and l-adic realizations of motivic cohomology, typescript, September 1991.

[Sc] C. SCHOEN. — Some examples of torsion in the Griffiths group, Math. Ann. **293** (1992) 651–679.

[So] M. SOMEKAWA. — On Milnor K–groups attached to semi–abelian varieties, Journal of K–theory **4** (1990) 105–119.

[S] C. SOULÉ. — K_2 et le groupe de Brauer [d'après A.S. Merkurjev et A.A. Suslin], Séminaire Bourbaki, 1982/83, n° **601**.

[Sr] V. SRINIVAS. — Rational equivalence of 0-cycles on normal varieties over **C**, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **46**, Part 2, (1987) 475-482.

[Su] A.A. SUSLIN. — Torsion in K_2 of fields, Journal of K–theory **1** (1987) 5–29.

[Sw] N. SUWA. — Sur l'image de l'application d'Abel–Jacobi de Bloch, Bull. Soc. Math. France **116** (1988) 69–101.

[SGA4 1/2] *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie SGA 4 1/2, par P. Deligne, Springer L.N.M. **569** (1977).