# RETOUR SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INTERSECTIONS DE DEUX QUADRIQUES, AVEC UN APPENDICE PAR A. KUZNETSOV

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. Soit $k$ un corps $p$-adique. On montre que toute intersection de deux quadriques dans l'espace projectif $\mathbb{P}^4_k$ contient un point sur une extension quadratique, ce qui généralise un résultat de Creutz et Viray pour le cas lisse. La preuve utilise un théorème de Lichtenbaum sur les courbes de genre 1 sur un corps $p$-adique. On déduit de ce résultat que toute intersection lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^5_k$ sur un corps de nombres $k$ possède un point sur une extension quadratique. On déduit aussi de ce résultat une démonstration relativement courte d'un théorème de Heath-Brown : le principe de Hasse vaut pour les intersections complètes lisses $X \subset \mathbb{P}^7_k$ de deux quadriques sur un corps de nombres. On donne aussi une démonstration alternative d'un principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$, dû à Iyer et Parimala.

Lichtenbaum proved that index and period coincide for a curve of genus one over a $p$-adic field. Salberger proved that the Hasse principle holds for a smooth complete intersection of two quadrics $X \subset \mathbb{P}^n$ over a number field, if $n \geq 5$ and $X$ contains a conic. Building upon these two results, we extend recent results of Creutz and Viray (2021) on the existence of a quadratic point on intersections of two quadrics over $p$-adic fields and over number fields. We then recover Heath-Brown's theorem (2018) that the Hasse principle holds for smooth complete intersections of two quadrics in $\mathbb{P}^7$. We also give an alternate proof of a theorem of Iyer and Parimala (2022) on the local-global principle in the case $n = 5$.

## Introduction

0.1. **Le contexte.** Une conjecture générale (2000) postule que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour les points rationnels des variétés projectives, lisses, géométriquement rationnellement connexes sur un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions d'une variable sur un corps fini). Cette conjecture fut faite par Sansuc et moi (1979) dans le cas des surfaces.

Dans cet article, on s'intéresse au cas particulier des intersections complètes lisses de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 4$ et $k$ un corps de nombres. Pour $n \geq 5$, la conjecture prédit simplement que *le principe de Hasse vaut pour de telles variétés* [CTSaSD, §16]. On sait montrer (voir [Ha94]) que si la conjecture générale vaut pour un entier $m \geq 4$ et toute telle $X \subset \mathbb{P}^m_k$, alors elle vaut pour $n \geq m$ et toute telle $X \subset \mathbb{P}^n_k$. Pour $m \geq 5$, ceci dit simplement que si le principe de Hasse vaut pour $X \subset \mathbb{P}^m_k$ avec un $m \geq 5$, alors il vaut pour tout $n \geq m$.

En 1987, l'article [CTSaSD] a établi la conjecture pour $n \geq 8$, et pour $n \geq 4$ sous l'hypothèse que $X$ contient un couple de droites conjuguées. L'article [CTSaSD]

*Date*: 8 août 2022.

contient des énoncés plus généraux pour les intersections complètes géométriquement intègres non coniques mais non nécessairement lisses. Il établit aussi la conjecture pour les surfaces de Châtelet.

En 1988 et 1989, on montra, par deux méthodes distinctes [CT88, Sal88, Sal89, SalSk91], que la conjecture principale vaut pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$ contenant une conique, ou, en d'autres termes, pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$ admettant une fibration en coniques sur la droite projective.

En 1993, Salberger a établi la conjecture pour $n \geq 5$, lorsque $X$ contient une conique [Sal93, Ha94].

En 2006, O. Wittenberg [W] a montré comment sous la combinaison de deux conjectures classiques mais pour l'instant hors d'atteinte, à savoir la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques et la conjecture de Schinzel, le principe de Hasse vaut pour $X \subset \mathbb{P}^n_k$ et $n \geq 5$.

En 2017, sur tout corps global $k$ de caractéristique $p > 2$, par des méthodes géométriques, Zhiyu Tian [ZT] a établi le principe de Hasse pour $n \geq 5$.

En 2018, R. Heath-Brown [HB] a établi le principe de Hasse pour $n = 7$ sur un corps de nombres. Par rapport à [CTSaSD], le point nouveau essentiel dans son travail est la démonstration que, sur un corps local, toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^7_k$ qui contient un point rationnel contient une conique.

Le présent article a été suscité par deux articles récents.

D'une part B. Creutz et B. Viray [CV] ont étudié l'existence de points quadratiques sur $X \subset \mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 4$ et $k$ local ou global. Sur un corps local, ils montrent qu'il existe un point fermé de degré au plus 2. Sur un corps global, ils montrent que le pgcd des degrés des points fermés divise 2.

D'autre part J. Iyer et R. Parimala [IP] ont établi un cas particulier de la conjecture pour $X \subset \mathbb{P}^5_k$, sous la combinaison de deux hypothèses supplémentaires, l'une étant l'existence de droites sur $X$ sur tout complété de $k$.

Ces travaux amènent à s'interroger à nouveau sur les intersections de deux quadriques lisses $X \subset \mathbb{P}^n_k$ définies sur un corps local ou sur un corps global, sur l'existence de droites définies sur le corps de base ou sur une extension quadratique, et sur l'existence de coniques, dans le but d'utiliser ces courbes pour établir le principe de Hasse pour les points rationnels dans le cas global.

0.2. **Structure de l'article.** Au §1, on fait un certain nombre de rappels sur l'algèbre, la géométrie et l'arithmétique des intersections de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$. On rappelle en particulier le théorème de Salberger sur les intersections qui contiennent une conique (théorème 1.19 ci-dessous).

Au §2, on donne quelques rappels sur le cas $X \subset \mathbb{P}^3_k$, ce qui correspond à des courbes de genre 1, et on rappelle le théorème de Roquette et Lichtenbaum que, pour de telles courbes sur un corps local, exposant et indice coïncident. On décrit une famille de tels $X \subset \mathbb{P}^3_k$ qui possèdent des points dans une extension quadratique.

Au §3, on revient sur les résultats de Creutz et Viray. Ceux-ci ont montré [CV, Thm. 1.2 (1)] que sur tout corps $p$-adique $k$ toute intersection complète *lisse* $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$ possède un point dans une extension quadratique. On généralise ce résultat aux intersections quelconques :

**Théorème 0.1.** *Sur un corps $p$-adique $k$, sur toute intersection $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, il existe un point dans une extension quadratique de $k$.*

C'est le théorème 3.1. Pour l'établir, on utilise une variante de la démonstration du cas lisse, $n = 4$, donnée dans [CV, Prop. 4.7], laquelle repose sur le théorème de Lichtenbaum pour les courbes de genre 1.

Aux §4, 5, 6, 7, pour $4 \leq n \leq 7$, pour $k$ local et $k$ global, et $X$ intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, on étudie la dimension des sous-espaces linéaires $\mathbb{P}^r_k \subset \mathbb{P}^n_k$ sur lesquels une forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau de quadriques contenant $X$ peut s'annuler. On étudie l'existence de points quadratiques, de droites, de coniques sur $X \subset \mathbb{P}^n_k$.

Au §5, on établit :

**Théorème 0.2.** *Sur un corps de nombres, toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 5$ possède un point quadratique.*

C'est le théorème 5.2. Ceci répond à l'une des questions de [CV].

Au §5, on donne aussi *une démonstration d'un théorème local-global de Iyer et Parimala pour $X \subset \mathbb{P}^5_k$*. Cette démonstration utilise le théorème de Salberger [Sal93].

Au §6, on considère le cas $X \subset \mathbb{P}^6_k$. Ce cas reste mystérieux.

Au §7, on donne *une démonstration des théorèmes de Heath-Brown* [HB] *pour $X$ lisse dans $\mathbb{P}^7_k$*. On établit en particulier que le principe de Hasse vaut pour $X \subset \mathbb{P}^7_k$. Cette démonstration relativement courte repose sur la généralisation du théorème de Creutz et Viray sur les points quadratiques sur un corps local, et sur le théorème de Salberger [Sal93].

Au §8, on donne des compléments sur le cas $X \subset \mathbb{P}^5_k$. Cela fournit une seconde démonstration du théorème d'Iyer et Parimala, reposant aussi sur le théorème de Salberger [Sal93].

Dans l'appendice, Aleksandr Kuznetsov établit des propriétés des schémas de Hilbert paramétrant les espaces linéaires et les quadriques contenus dans une intersection complète lisse de deux quadriques.

Étant donné un corps $k$, on note $k^s$ une clôture séparable et $\overline{k}$ une clôture algébrique. On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k^s/k)$ le groupe de Galois absolu. Pour une $k$-variété algébrique $X$, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

Pour $X$ une variété algébrique sur un corps $k$ et $L/k$ une extension de corps, on note $X(L)$ l'ensemble des points de $X$ à valeurs dans $L$.

Un corps $k$ est dit fertile si pour toute $k$-variété lisse intègre $X$ sur $k$, de dimension au moins 1, l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ implique $X(k)$ Zariski dense. Un corps $p$-adique est fertile. Le corps des réels est fertile. Soit $p$ un nombre premier. Tout corps dont le groupe de Galois absolu est un pro-$p$-groupe est fertile.

Pour $k$ un corps de nombres, et $v$ une place de $k$, on note $k_v$ le complété. On note $\mathbb{A}_k$ l'anneau des adèles de $k$.

On suppose le lecteur familier avec la théorie des formes quadratiques [Lam, K]. Soit $r \geq 1$ un entier. Une forme quadratique non dégénérée sur un corps $k$ ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) est dite contenir $rH$ si elle contient en facteur direct orthogonal la somme directe orthogonale de $r$ plans hyperboliques $H =< 1, -1 >$.

Soit $n \geq 2$. Une quadrique $C \subset \mathbb{P}^n_k$ de dimension $r-1$ est par définition une sous-variété d'un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k \subset \mathbb{P}^n_k$ définie par l'annulation d'un polynôme homogène de degré 2 dans $\mathbb{P}^r_k$.

**Remerciements.** Je remercie Aleksandr Kuznetsov d'avoir bien voulu établir et rédiger les résultats rassemblés dans l'appendice.

## 1. Rappels et préliminaires

**Proposition 1.1.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $q(x_0,\dots,x_n)$, $n \geq 1$ une forme quadratique non dégénérée sur $k$. Soit $Q \subset \mathbb{P}^n_k$ la quadrique qu'elle définit. Pour un entier $r \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(i) La forme $q$ contient $r+1$ plans hyperboliques.*

*(ii) Il existe un $\mathbb{P}^r_k$ contenu dans $Q$.*

Le cas $r = 0$ du théorème suivant fut établi indépendamment par A. Brumer.

**Proposition 1.2.** *(Amer)* [Leep] *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection quelconque de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f$ et $g$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(a) Il existe un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$ contenu dans $X$.*

*(b) La forme quadratique générique $f+tg$ sur le corps $k(t)$ s'annule sur un espace linéaire $\mathbb{P}^r_{k(t)}$.*

*Si la forme quadratique générique $f+tg$ sur le corps $k(t)$ est non dégénérée, ces conditions sont encore équivalentes à :*

*(c) La forme quadratique $f+tg$ contient $(r+1)H$ en facteur direct, où $H$ désigne l'espace hyperbolique $<1,-1>$.*

En combinant avec le théorème bien connu de T. A. Springer sur les formes quadratiques, ceci donne :

**Proposition 1.3.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $K/k$ une extension finie de corps de degré impair. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f$ et $g$. Si les conditions (a) ou (b) de la proposition 1.2 valent après extension de $k$ à $K$, alors elles valent sur $k$.*

**Proposition 1.4.** [Reid, Prop. 2.1] *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soient $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 2$, une intersection complète de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f(x_0,\dots,x_n)$ et $g(x_0,\dots,x_n)$. La $k$-variété est lisse si et seulement si le polynôme homogène $det(\lambda f + \mu g)$ est non nul et est séparable, i.e. a toutes ses racines simples dans $\overline{k}$.*

**Proposition 1.5.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$, une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par un sytème $f = g = 0$. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Pour $n = 3$, supposons $k$ fertile. Alors il existe une forme non dégénérée $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire qui contient deux hyperboliques, et l'ensemble des $(\lambda,\mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ avec cette propriété est Zariski dense dans $\mathbb{P}^1_k$.*

*Démonstration.* Il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset X \times_k X$ tel que, pour tout couple de points géométriques $(A,B) \in U$, on ait $A \neq B$ et la droite $AB$ n'est pas contenue dans $X$. Ce dernier point est clair, car pour tout point géométrique $A \in X$ il existe un point géométrique $B$ de $X$ tel que la droite $AB$ ne soit pas contenue dans $X$, sinon $X$ serait un cône de sommet $A$. On dispose alors d'un $k$-morphisme $\varphi : U \to \mathbb{P}^1_k$ envoyant $(A,B) \in U$ sur le paramètre $(\lambda,\mu)$ de l'unique quadrique du pinceau contenant la droite $AB$. Pour $n \geq 4$ et $X(k) \neq \emptyset$, $X(k)$ est Zariski dense dans $X$, car $X$ est $k$-unirationnelle [CTSaSD, Prop. 2.3]. Pour $n = 3$ et $k$ fertile, $X(k) \neq \emptyset$ implique $X(k)$ Zariski dense dans $X$. On voit alors que $U(k)$ est Zariski dense dans $U$, et donc son image par $\varphi$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ est Zariski dense. Ceci vaut encore si $n = 3$ et $k$ est fertile. Comme l'ensemble des points

$(\lambda,\mu)\in\mathbb{P}^1$ tels que la forme quadratique $\lambda f+\mu g$ est singulière est fini, ceci établit la proposition. □

**Proposition 1.6.** *Soit $k$ un corps, $\mathrm{car}(k)=0$. Soit $X\subset\mathbb{P}^n_k$, une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f=g=0$. Supposons $n\geq 4$, ou $n\geq 3$ et le corps $k$ fertile, par exemple $p$-adique. Il y a équivalence entre :*

*(a) Il existe un point de degré au plus 2 sur $X$.*

*(b) Il existe une forme $\lambda f+\mu g=0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$.*

*(c) Il existe une forme non dégénérée $\lambda f+\mu g=0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire qui contient deux hyperboliques.*

*L'ensemble des $(\lambda,\mu)\in\mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant cette propriété est Zariski dense dans $\mathbb{P}^1_k$.*

*Démonstration.* Que (c) implique (b) qui implique (a) est clair. Montrons que (a) implique (c). Si $X(k)\neq\emptyset$, il suffit d'appliquer la proposition 1.5. Soit $K/k$ une extension quadratique de corps, avec $X(K)\neq\emptyset$. Dans la démonstration de la proposition 1.5, on peut remplacer $X\times_k X$ par $R_{K/k}(X_K)$. On obtient un ouvert $U\subset R_{K/k}(X_K)$ et un $k$-morphisme $\varphi: U\to\mathbb{P}^1_k$. La $k$-variété lisse $R_{K/k}(X_K)$ contient un $k$-point. Pour $n\geq 3$ et $k$ fertile, cela conclut la démonstration. Pour $n\geq 4$, l'intersection lisse de deux quadriques $X_K$ contient un $K$-point, donc est $K$-unirationnelle. Ceci implique que la $k$-variété $R_{K/k}(X_K)$ est $k$-unirationnelle, et on conclut comme dans la démonstration de la proposition 1.5. □

Soit $X\subset\mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse $f=g=0$ de deux quadriques donnée par un système $f=g=0$. Soit $G_r(X)\subset\mathrm{Gr}(r,n)\times\mathbb{P}^1_k$ la sous-variété formée des couples $(L,m)$ avec $L\subset\mathbb{P}^n$ espace linéaire de dimension $r$ contenu dans la quadrique $\lambda f+\mu g=0$, où $m=(\lambda,\mu)\in\mathbb{P}^1_k$. Soit $S_r(X)$ le schéma de Hilbert des quadriques de dimension $r-1$ contenues dans $X$.

Les deux propositions suivantes (Prop. 1.7 et Prop. 1.8) ne seront pas utilisées avant le paragraphe 8.

**Proposition 1.7.** *Soit $k$ un corps, $\mathrm{car}(k)\neq 2$. Supposons $2r+1\leq n$. Avec les notations ci-desssus :*

*(1) La variété $G_r(X)$ est lisse et géométriquement connexe, et le morphisme $G_r(X)\to\mathbb{P}^1_k$ dominant.*

*(2) La variété $S_r(X)$ des quadriques de dimension $r-1$ contenues dans $X$ est lisse et géométriquement intègre. La sous-variété des quadriques non lisses est un fermé propre de $S_r(X)$.*

*(3) À un espace linéaire $L\simeq\mathbb{P}^r_k$ contenu dans une quadrique du pinceau et non contenu dans $X$, on associe $X\cap L$. Inversement, étant donnée une quadrique (généralisée) de dimension $r-1$ contenue dans $X$, engendrant un espace linéaire $L$ de dimension $r$ non contenu dans $X$, on lui associe le couple formé de l'espace linéaire $L$ et du paramètre $(\lambda,\mu)$ de l'unique quadrique du pinceau $\lambda f+\mu g$ contenant $L$. Ceci définit des applications rationnelles birationnelles inverses l'une de l'autre entre $G_r(X)$ et $S_r(X)$.*

*(3) Si $X$ ne contient pas d'espace linéaire de dimension $r$ (sur la clôture algébrique de $k$), c'est-à-dire si l'on a $n\leq 2r+1$, les $k$-variétés $G_r(X)$ et $S_r(X)$ sont isomorphes.*

*Démonstration.* Pour les espaces linéaires de dimension $r$ maximale contenus dans une quadrique lisse du pinceau, les énoncés sur $G_r(X)$ sont établis par M. Reid

[Reid, Thm. 1.10]. Les autres énoncés sont établis par A. Kuznetsov dans l'appendice du présent article. □

**Proposition 1.8.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$ *et $n \geq 4$. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$. Il y a équivalence entre :*

*(a) Il existe une conique $C \subset X$.*

*(b) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$.*

*Si de plus le corps $k$ est fertile, alors ces propriétés sont équivalentes à chacune des propriétés :*

*(c) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ non dégénérée dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$, c'est-à-dire qui contient 3 hyperboliques.*

*(d) Il existe une conique lisse $C \subset X$.*

*(e) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ non dégénérée dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$ non contenu dans $X$, et telle que $X \cap L$ soit une conique lisse.*

*Démonstration.* Sous l'hypothèse (a), soit $L \subset \mathbb{P}^n_k$ le plan de la conique, et $P \in L(k)$ un point non situé sur la conique. Il existe une forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau qui s'annule en $P$. Elle s'annule alors sur le plan $L$. Sous l'hypothèse (b), soit on a $L \subset X$, et alors on a clairement des coniques lisses contenues dans $X$, soit toute quadrique du pinceau différente de $\lambda f + \mu g = 0$ découpe sur le plan $L$ une conique contenue dans $X$.

On utilise maintenant la proposition 1.7.

Sous l'hypothèse (b), il existe un $k$-point sur $G_2(X)$, qui est une $k$-variété lisse géométriquement intègre. Si $k$ est fertile, les $k$-points sont Zariski denses sur $G_2(X)$. Le $k$-morphisme $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ est dominant, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $\lambda f + \mu g$ soit de rang maximal et s'annule sur un plan $L$. Ceci établit (c).

Sous l'hypothèse (a), comme la variété $S_2(X)$ est lisse et géométriquement intègre, et que le lieu des coniques singulières est un fermé propre de $S_2(X)$, si $k$ est fertile, alors il existe une conique lisse dans $X$.

Pour obtenir (e), on utilise le fait que $G_2(X)$ et $S_2(X)$ sont géométriquement intègres et $k$-birationnelles entre elles, et que le lieu des coniques non lisses est un fermé propre de $S_2(X)$. □

*Remarque* 1.9. Pour $k$ de caractéristique zéro quelconque, les hypothèses (a) ou (b) impliquent l'existence d'une extension finie de corps $K/k$ de degré impair sur laquelle les énoncés (c), (d), (e) valent. Le corps fixe d'un pro-2-Sylow du groupe de Galois absolu de $k$ est en effet un corps fertile.

**Lemme 1.10.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Soit $n \geq 3$ un entier. Soient $f$ et $g$ deux formes quadratiques sur $k$ en $n+1$ variables, et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ la variété définie par $f = g = 0$. Si $X$ ne possède pas de point dans une extension de degré 1 ou 2 de $k$, alors :*

*(i) La $k$-variété $X$ est non conique et purement de codimension 2 dans $\mathbb{P}^n_k$.*

*(ii) Le polynôme $det(\lambda f + \mu g)$ est non nul.*

*(iii) Toute forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau sur $k$ est de rang au moins 3.*

*(iv) Si $n \geq 4$, la $k$-variété $X$ est géométriquement intègre.*

*(v) Si $n = 3$ et $X$ n'est pas une courbe lisse géométriquement intègre, alors $\overline{X}$ est la réunion de 4 droites transitivement permutées par l'action du groupe de Galois,*

*l'ensemble des 4 droites formant un cycle. De plus dans ce cas il n'existe pas de forme de rang 3 dans le pinceau sur* $\overline{k}$.

*Démonstration.* Si $X$ est conique, le sommet du cône est un espace linéaire défini sur $k$.

Si $f$ et $g$ ont un facteur commun, on peut le supposer défini sur $k$, il est de degré 1 ou 2, donc $X$ possède un point dans une extension $K/k$ avec $[K:k] \leq 2$.

Supposons désormais $f$ et $g$ sans facteur commun. Alors $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est purement de codimension 2 [CTSaSD, Lemma 1.1].

Si le polynôme homogène $det(\lambda f + \mu g)$ s'annule identiquement, alors $X$ possède un point singulier rationnel [CTSaSD, Lemma 1.14].

S'il existe une forme de rang au plus 2 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, elle s'annule sur un espace linéaire $\mathbb{P}^{n-2}_k \subset \mathbb{P}^n_k$, et $X$ contient la trace de toute autre forme du pinceau, donc une quadrique de dimension $n-3 \geq 0$, donc un point dans une extension au plus quadratique de $k$.

On est ramené à étudier le cas où $f$ et $g$ n'ont pas de facteur commun, où il existe une forme de rang au moins $n+1$ dans le pinceau, et où toute forme non nulle dans le pinceau est de rang au moins 3.

Pour $n \geq 4$, [CTSaSD, Lemma 1.11] assure que la $k$-variété $X$ est géométriquement intègre.

Soit $n = 3$. Si la courbe $X$ est singulière mais géométriquement intègre, comme c'est une courbe de genre arithmétique 1, elle possède exactement un point singulier, qui est donc rationnel. Supposons $\overline{X}$ non intègre. Si $X$ contient une droite définie sur $k$ ou une extension quadratique de $k$, ou si $X$ contient une conique lisse, l'énoncé est clair. En combinant [CTSaSD, Lemmas 1.7, 1.10] et le fait que toute forme dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ sur $k$ est de rang au moins 3, on voit qu'on est réduit au cas où $\overline{X}$ est l'union de 4 droites distinctes transitivement permutées par l'action du groupe de Galois. Soit $Q \subset \mathbb{P}^3_k$ une quadrique lisse définie par une forme du pinceau. On a $\mathrm{Pic}(\overline{Q}) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, les classes $e_1$ et $e_2$ sont permutées par l'action du groupe de Galois, deux droites sont dans la classe $e_1$, deux dans la classe $e_2$. Chaque droite rencontre exactement deux autres des 4 droites. S'il existe une forme de rang exactement 3 dans le pinceau sur $\overline{k}$, alors les 4 droites sont contenues dans un cône sur une conique lisse. Toute droite de $\mathbb{P}^3$ contenue dans ce cône est une génératrice, i.e. passe par le sommet du cône. Mais alors les 4 droites sont concourantes, contradiction. □

**Proposition 1.11.** *Soit $k$ un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète de deux quadriques, géométriquement intègre et non conique. Si $X$ est singulière, alors soit il existe une extension $K/k$ de degré $[K:k] \leq 2$ telle que $X_K$ est $K$-birationnelle à $\mathbb{P}^2_K$, soit $X$ est $k$-birationnelle à une surface $R_{K/k}(C)$ pour $K/k$ une extension quadratique de corps et $C$ une conique lisse sur $K$.*

*Démonstration.* Si $C \subset X$ est une courbe (non nécessairement géométriquement intègre) contenue dans le lieu singulier de $X$, alors $C$ est une droite $\mathbb{P}^1_k \subset \mathbb{P}^4_k$ [CTSaSD, Lemma 3.15.1]. Dans ce cas, $X$ est $k$-birationnelle au produit d'un espace projectif et d'une quadrique lisse de dimension au moins 1 [CTSaSD, Prop. 2.2]. On peut donc supposer que les singularités de $X$ sont isolées. Ces singularités sont discutées par Coray et Tsfasman, en particulier du point de vue de l'action du groupe de Galois. Notons qu'une surface dite d'Iskovkikh devient $K$-rationnelle sur l'extension quadratique $K/k$ sur laquelle sont définis ses points doubles. Il ressort de [CoTs, §6, 7] en particulier de [CoTs, Lemma 7.4] que sauf peut-être dans le cas où $X$ possède 4 points singuliers de type $4A_1$, il existe une extension $K/k$ au plus quadratique telle que $X_K$ soit $k$-birationnelle à $\mathbb{P}^2_K$. Dans le cas $4A_1$, la surface est $k$-birationnelle à une surface de del Pezzo de degré 8, c'est-à-dire à une variété $R_{K/k}(C)$ pour $K/k$ extension quadratique séparable et $C$ conique lisse sur $K$. □

*Remarque* 1.12. Pour $k$ $p$-adique, on peut éliminer le cas où $X$ est $k$-birationnelle à $Y = R_{K/k}(C)$, avec $C/K$ conique lisse sur un corps extension quadratique de $k$. Comme $k$ est un corps $p$-adique, il existe une extension quadratique $L/k$ de corps telle que $K \otimes L/K$ soit une extension quadratique de corps $KL/K$. On a $R_{K/k}(C)(L) = C(K \otimes_k L) = C(KL)$. Mais toute conique sur un corps $p$-adique acquiert un point rationnel dans toute extension de corps quadratique. Donc $C(KL) \neq \emptyset$ et $R_{K/k}(C)$ possède un point dans $L$, donc est $L$-birationnel à $\mathbb{P}^2_L$, et les points $L$-rationnels sont denses sur $X_L$.

*Remarque* 1.13. Il y a une certaine analogie entre la proposition 1.11 et la première démonstration de [CV, Thm. 2.1], qui repose sur une discussion des dégénérescences possibles d'une surface de del Pezzo de degré 4.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k, n \geq 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit $P \in X(k)$. On peut suppose $X$ donnée par un système $f = x_0x_1+q_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $g = x_0x_2 + q_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$, Le point $P$ étant donné par $(1, 0, \ldots, 0)$ et l'espace tangent $T_P$ à $X$ en $P$ étant donné par $x_1 = x_2 = 0$. Soit $H \subset \mathbb{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension $n-3$ donné par $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Soit $Y \subset H \simeq \mathbb{P}^{n-3}$ l'intersection de deux quadriques donnée par le système

$$q_1(0, 0, x_3, \ldots, x_n) = q_2(0, 0, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

**Proposition 1.14.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Avec les notations ci-dessus, l'intersection $X \cap T_P \subset \mathbb{P}^n_k$ est le cône de sommet $P$ sur $Y$. Les droites de $X \subset \mathbb{P}^n_k$ qui passent par $P$ sont les génératrices de ce cône.*

*Démonstration.* Voir [CTSaSD, §3, Proof of Thm. 3.2]. □

Donnons maintenant quelques rappels sur les variétés $F_r(X)$ des espaces linéaires de dimension $r$ contenus dans une intersection complète lisse $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$.

**Proposition 1.15.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit $F_r(X)$ la variété des espaces linéaires de dimension $r$ contenus dans $X$.*

*Si l'on a $n \leq 2r+1$, alors $F_r(X)$ est vide. Si l'on a $n \geq 2r+2$, alors $F_r(X)$ est non vide, projectif et lisse, de dimension $(r+1)(n-2r-2)$, géométriquement connexe si $n > 2r+2$.*

*(a) Pour $n = 5$, la variété $F_1(X)$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 2.*

*(b) Pour $n = 6$, la variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 4, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 8.*

*(c) Pour $n = 7$, la variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 6, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 1.*

*(d) Pour $n = 7$, la variété $F_2(X)$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 3.*

*(e) Soit $n \geq 5$. Soit $Z \subset X \times_k F_1(X)$ la variété d'incidence des couples $(x, L)$ formée d'un point de $X$ et d'une droite $L \subset X$ avec $x \in L$. La projection $Z \to F_1(X)$ est un fibré projectif en $\mathbb{P}^1$ localement trivial. La $k$-variété $Z$ est lisse et géométriquement connexe, de dimension $2n - 7$. Pour $n \geq 5$, les fibres générales géométriques de la projection $Z \to X$ sont des intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$. Pour $n \geq 6$, ces fibres sont géométriquement connexes.*

*Démonstration.* Pour établir ces énoncés, on peut supposer le corps $k$ algébriquement clos. Voici des références pour ces résultats, et des précisions sur les cas où les résultats sont disponibles en caractéristique positive.

Dans sa thèse, M. Reid [Reid, Thm. 2.6] établit : Sous l'hypothèse $\mathrm{car}(k) \neq 2$, pour tout entier $r$, la variété $F_r(X)$ est non vide si et seulement si $2r \leq \dim(X) = n - 2$. Si $2r \leq n - 2$, la variété $F_r(X)$ est projective, lisse, purement de dimension $(n - 2(r + 1))(r + 1)$, et est géométriquement connexe si et seulement si $2r < n - 2$. Une démonstration détaillée est donnée par A. Kuznetsov au §9.

Xiaoheng Wang [XW] étudie les propriétés des variétés d'espaces linéaires de dimension maximale contenus dans une intersection complète lisse $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$ et tout corps $k$ avec $\mathrm{car.}(k) \neq 2$. Pour $X$ de dimension impaire sur un tel corps, il montre que cette variété est un espace principal homogène d'une variété abélienne. Ceci vaut en particulier pour $F_1(X)$ et $n = 5$ et pour $F_2(X)$ et $n = 7$.

Sur un corps $k$ avec $\mathrm{car.}(k) = 0$, Debarre-Manivel [DM] étudient les variétés des sous-espaces linéaires des intersections complètes *générales*. Certains de leurs résultats valent en caractéristique positive.

En caractéristique zéro, Araujo-Casagrande [AC17] étudient la variété des espaces linéaires de dimension $m - 1$ contenus dans une intersection complète lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^{2m+2}$ pour $m \geq 2$. C'est une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension $2m$. C'est une variété de Fano qui est géométriquement rationnelle. Pour $m = 1$, il s'agit des surfaces de del Pezzo de degré 4. Le cas qui nous intéresse ici est $m = 2$, c'est-à-dire la variété $F_1(X)$ pour $X \subset \mathbb{P}^6$. Le groupe de Picard géométrique dans ce cas est $\mathbb{Z}^8$.

En caractéristique zéro, la variété $F_1(X)$ des $\mathbb{P}^1$ dans $X \subset \mathbb{P}^7$ est une variété projective, lisse, géométriquement connexe, de Fano [DM, Rem. 3.2, Rem. 3.6.1], géométriquement rationnelle [N75] [DM, Rem. 7.3], et le groupe de Picard géométrique est $\mathbb{Z}$ [DM, Cor. 3.5].

Établissons le point (e). L'espace total $Z$ est lisse de dimension $2n - 7$. Pour $n \geq 5$, par tout point de $X$ il passe une droite, le morphisme propre $q : Z \to X$ est donc dominant, la fibre générique de $q$ est de dimension $n - 5$. Comme le corps $k$ est de caractéristique zéro, la fibre générique de $q$ est lisse. Pour tout point de $X$, d'après la proposition 1.14, la fibre est une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$. Ainsi la fibre générique de $Z \to X$ est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$, elle est donc géométriquement intègre si l'on a $n \geq 6$. Il en est donc de même des fibres en tout point schématique d'un ouvert de Zariski non vide de $X$. □

**Proposition 1.16.** *(Mordell) Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ une intersection complète lisse de deux quadriques $f = g = 0$. Dans le pinceau de formes quadratiques $\lambda f + \mu g$ il existe* *une forme non singulière de signature* 0 *ou* 1 *: il existe une forme non singulière dans le pinceau contenant* $[(n+1)/2]$ *hyperboliques.*

*Démonstration.* On fait varier $(\lambda, \mu)$ dans le cercle $S^1$ d'équation $\lambda^2+\mu^2=1$. Pour $\lambda f+\mu g$ non singulière, la signature de $-\lambda f-\mu g$ dans $\mathbb{Z}$ est l'opposée de la signature de $\lambda f+\mu g$. Par ailleurs au passage d'un point $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}$ où la forme $\lambda_0 f+\mu_0 g$ est singulière, la signature varie par addition ou soustraction de 2. Voir [CTSaSD, §10, Proof of Thm. 10.1, (e) p. 114] et [HB, Lemma 12.1]. □

Dans cet article, on utilisera aussi le théorème suivant (Hasse 1924 [H]) :

**Théorème 1.17.** *Soient* $k$ *un corps de nombres,* $1 \leq n \leq m$ *des entiers et* $\varphi$ *et* $\psi$ *deux formes quadratiques non dégénérées de rangs respectifs* $n$ *et* $m$*. Si sur tout complété* $k_v$ *de* $k$*, la forme* $\varphi$ *est une sous-forme de* $\psi$*, alors sur* $k$ *c'est une sous-forme de* $\psi$*.*

Les cas classiques sont $n=1$ et $n=m$. Le cas général se déduit du cas $n=1$ par le théorème de simplification de Witt.

L'énoncé suivant reformule un résultat établi indépendamment dans [CT88] et [Sal89].

**Théorème 1.18.** *Soit* $k$ *un corps de nombres. Soit* $X \subset \mathbb{P}^4_k$ *une intersection lisse de deux quadriques. Si* $X$ *contient une conique lisse* $C \subset \mathbb{P}^4_k$*, et si* $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$*, alors* $X(k)$ *est non vide et dense dans* $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$*.*

*Démonstration.* Soit $K \in \operatorname{Pic}(X)$ la classe du faisceau canonique. C'est l'opposé de la classe d'une section hyperplane. On a $(K.K)=4$ et le genre arithmétique de $C$ est donné par la formule $p_a(C)=(C.C+K)/2+1$, donc $(C.C)=0$. Le théorème de Riemann-Roch donne $h^0(C) \geq 2$, et donc $h^0(C)=2$. Le système linéaire associé à $C$ définit alors un morphisme $X \to \mathbb{P}^1_k$ dont les fibres générales sont des coniques. Un calcul classique montre que sur la clôture algébrique il y a exactement 4 fibres géométriques singulières, chacune formée d'un couple de droites se recontrant en un point. Sur un corps de nombres, il a été établi par Salberger [Sal88] [Sal89] et aussi dans [CT88] que pour une telle surface $X$ fibrée en coniques avec au plus 4 fibres géométriques non lisses, l'hypothèse $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$. Plus précisément, $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. □

Le théorème suivant a été établi par Salberger [Sal93] (non publié). Dans son travail [Ha94] sur la méthode des fibrations, Harari en esquisse une démonstration [Ha94, Prop. 5.2.6]. Pour la commodité du lecteur, je donne ci-dessous les détails de l'argument.

**Théorème 1.19.** *(Salberger 1993) Soit* $k$ *un corps de nombres. Pour tout entier* $n \geq 5$ *et toute intersection complète lisse de deux quadriques* $X \subset \mathbb{P}^n_k$ *contenant une conique* $C \subset \mathbb{P}^n_k$*, le principe de Hasse vaut.*

*Démonstration.* Soit $n \geq 5$. Si la conique est géométriquement réductible, alors elle contient un point rationnel. Supposons donc que $X$ contient une conique lisse $C$. Celle-ci est contenue dans un plan $\Pi := \mathbb{P}^2_k \subset \mathbb{P}^n_k$ bien défini. Si le plan $\Pi$ est contenu dans $X$, alors $X(k) \neq \emptyset$. On suppose donc que $\Pi$ n'est pas contenu dans $X$. L'intersection $\Pi \cap X$ est une courbe quartique dans $\Pi$, contenue dans $X$, et contenant la conique $C$.

Un théorème de Zak assure que pour tout hyperplan $H$ de $\mathbb{P}^n$, l'intersection complète $X \cap H$ n'a qu'un nombre fini de singularités et est géométriquement intègre (cf. [Ha94, Prop. 5.2.1]).

Pour $n \geq 5$, une version du théorème de Bertini assure que l'hyperplan général $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$ contenant $\Pi$, qui est paramétré par un espace $\mathbb{P}^{n-3}$, avec donc $n-3 \geq 2$, découpe sur $X$ une variété $H \cap X$ lisse et géométriquement connexe (contenant la conique $C$).

On choisit deux tels hyperplans, et on considère l'application rationnelle de $X$ vers $\mathbb{P}^1_k$ associée. C'est un morphisme hors de $X \cap \Pi$ (union dans $\Pi$ de $C$ et d'une conique). Soit $Z \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ le graphe de ce morphisme. D'après ce qui précède, les fibres de $\pi : Z \to \mathbb{P}^1_k$ sont géométriquement intègres, donc $Z$ est géométriquement intègre. La projection $Z \to X$ est un morphisme $k$-birationnel. Au-dessus d'un ouvert non vide $U \subset \mathbb{P}^1_k$, la fibration $Z_U \to U$ est projective et lisse, à fibres des intersections complètes de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$, géométriquement intègres, contenant $C$.

Soit $W$ une $k$-variété projective, lisse, géométriquement intègre équipée d'un $k$-morphisme $W \to Z$ birationnel qui induit un isomorphisme $W_U \to Z_U$ (possible par résolution des singularités). Les fibres $W_m$ du morphisme composé $W \to Z \to \mathbb{P}^1_k$ contiennent toutes une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre sur le corps $k(m)$.

Supposons $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Pour $n \geq 5$, on a $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$. La méthode des fibrations, sous la forme donnée par Harari dans [Ha94, Thm. 4.2.1], et sous une forme encore plus générale dans [HWW, Thm. 1.3], donne l'existence d'un $m \in U(k)$ tel que la fibre $W_m$ satisfasse $\mathrm{Br}(W_m)/\mathrm{Br}(k) = 0$ et $W_m(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$.

Par récurrence sur $n \geq 5$, le principe de Hasse pour $X$ se ramène donc au théorème 1.18. □

La méthode montre aussi que $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$, mais sous l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$, c'est un énoncé facile à établir directement [CTSaSD, Thm. 3.11] pour toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ avec $n \geq 5$.

*Remarque* 1.20. Dans son manuscrit [Sal93], pour $n \geq 6$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète de deux quadriques, géométriquement intègre et non conique, mais non nécessairement lisse, sous l'hypothèse que $X$ contient une conique lisse, Salberger établit le principe de Hasse pour les modèles projectifs et lisses de $X$.

## 2. Courbes de genre 1

Soient $k$ un corps parfait, $\overline{k}$ une clôture algébrique, et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit $X$ une courbe projective et lisse de genre 1 sur le corps $k$. C'est un espace principal homogène de sa jacobienne $J$. On appelle période de $X$ l'exposant de la classe $[X] \in H^1(k, J)$. On vérifie que cet entier est le générateur positif de l'image de l'application degré $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{Z}$. On appelle indice de $X$ le générateur positif de l'image de l'application degré $\mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$. C'est le pgcd des degrés des points fermés sur $X$. Puisque $X$ est une courbe de genre 1, c'est aussi le plus petit degré d'un tel point fermé. L'exposant divise l'indice. L'énoncé suivant est [L1, Thm. 3] [L2, Thm. 7]. La démonstration utilise le théorème de dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps locaux.

**Théorème 2.1.** *(Roquette, Lichtenbaum) Soit $X$ une courbe de genre 1 sur un corps $p$-adique $k$. L'exposant et l'indice de $X$ coïncident.*

Cet entier est aussi égal à l'ordre du noyau (fini) de la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ (Roquette, Lichtenbaum).

La proposition suivante est un cas particulier, sans doute classique, d'un récent théorème de Xiaoheng Wang [XW] sur les sous-espaces linéaires de dimension maximale des intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+1}$. Une variante antérieure est utilisée par Creutz et Viray dans la démonstration de [CV, Prop. 4.7].

**Proposition 2.2.** *Soit $k$ un corps de caractéristique différente de 2, et soit $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques $f = g = 0$. C'est une courbe de genre 1. Notons $J = J_X = \mathrm{Pic}^0_{X/k}$. On a $X = \mathrm{Pic}^1_{X/k}$. Soit $C/k$ la courbe projective lisse d'équation $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$. C'est une courbe de genre 1. On a les propriétés suivantes :*

*(a) Les jacobiennes $J_X$ et $J_C$ sont isomorphes.*

*(b) On a $C \simeq \mathrm{Pic}^2_{X/k}$.*

*(c) Dans $H^1(k, J_X)$, on a $[C] = 2[X]$ et $2[C] = 0$.*

*(d) Si $C(k) \neq \emptyset$, alors la période de $X$ divise 2.*

*(e) Si $k$ est un corps $p$-adique, et $C(k) \neq \emptyset$, alors $X$ possède un point dans une extension quadratique de $k$.*

*Démonstration.* Pour les points (a) à (d), voir Wang [XW, §2.2. Theorem 2.25. p. 372.]. Le point (e) résulte de (d) et du théorème 2.1. □

*Remarque* 2.3. On peut montrer qu'il existe un morphisme $X \to C$ fini étale qui est une forme tordue de la multiplication par 2 sur $J_X$ : voir [XW, p. 361] et la référence dans la démonstration de [CV, Prop. 4.7].

*Remarque* 2.4. Sur tout corps, comme $[C] = 2[X]$, si $X$ possède un point quadratique, alors $C$ possède un point rationnel. Ceci peut se voir facilement. S'il y a un point quadratique, on prend la droite qui passe par ce point et son conjugué. Puis un autre $k$-point dessus. Il y a une forme $\lambda f + \mu g$ qui s'annule là-dessus donc aussi sur la droite. Cette forme $\lambda f + \mu g$ est constituée de 2 hyperboliques, donc son déterminant est un carré. On a trouvé un point rationnel sur $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$.

**Corollaire 2.5.** *Soient $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3)$ deux formes quadratiques sur un corps $p$-adique. La $k$-variété $X \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $f = g = 0$ possède un point dans une extension quadratique de $k$.*

*Démonstration.* Comme le rang de la forme quadratique $g$ est au plus 3, le lemme 1.10, qui vaut sur tout corps, réduit la démonstration au cas où $g$ est de rang exactement 3 et $X$ est une intersection complète lisse, donc une courbe géométriquement intègre. Comme $g$ est de rang 3, le polynôme séparable $det(\lambda f + \mu g)$ a un zéro sur $k$, donc la courbe lisse $C$ définie par $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$ a un point rationnel. Comme $k$ est $p$-adique, la proposition 2.2(e), qui repose sur le théorème 2.1, assure que $X$ possède un point dans une extension au plus quadratique de $k$. □

*Remarque* 2.6. Voici une variante de la démonstration, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est une intersection complète lisse. Soit $C \subset \mathbb{P}^2_k$ la conique lisse définie par $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. On a la projection $p : X \to C$ qui est un morphisme fini de degré 2. L'application degré sur les groupes de Picard géométriques induit des homomorphismes $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Pic}(\overline{C}) \to \mathbb{Z}$, et l'application $p^* : \mathrm{Pic}(\overline{C}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ induit la multiplication par 2 sur $\mathbb{Z}$. Comme $C$ est une conique, la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{C}) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Prenant les invariants sous l'action du groupe de Galois $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on voit que 2 est dans l'image de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{Z}$. Ainsi la période de $X$ divise 2. Comme $k$ est un corps $p$-adique, le théorème 2.1 donne que l'indice de $X$ divise2, et donc $X$, qui est une courbe de genre 1, possède un point dans une extension quadratique de $k$.

*Remarque* 2.7. Soit $k$ $p$-adique. Supposons que $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est une courbe lisse. Si dans le pinceau il existe une forme $g$ de rang 3, alors la courbe $C$ d'équation $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$ a un point rationnel, donc d'après le théorème 2.2(e) la courbe $X$ a un point quadratique, donc d'après la proposition 1.6 il existe une forme de rang 4 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ qui est somme de 2 hyperboliques. Peut-on voir cela facilement ?

## 3. Points quadratiques sur un corps local

Pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, le théorème suivant a été démontré par Creutz et Viray [CV, Thm. 1.2 (1)].

**Théorème 3.1.** *Soit $k$ un corps $p$-adique. Soient $n \geq 4$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une variété définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f = g = 0$. Alors $X$ possède un point dans une extension quadratique de $k$.*

*Démonstration.* Par intersection avec un espace linéaire $\mathbb{P}^4_k \subset \mathbb{P}^n_k$ *quelconque*, il suffit de considérer le cas $n = 4$, ce qu'on suppose désormais. Si toute forme dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ est de rang au plus 4, alors $det(\lambda f + \mu g)$ est identiquement nul. Dans ce cas, le lemme 1.10 (ii) assure qu'il existe un point dans une extension quadratique Supposons donc qu'il existe une forme de rang 5 dans le pinceau. Comme $k$ est un corps $p$-adique, toute forme quadratique en 5 variables est isotrope. On est donc ramené à un système

$$f(x_0, x_1, x_2) + x_3 x_4 = 0, \quad g(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

On coupe par $x_4 = 0$. Notons $h(x_0, x_1, x_2, x_3) = g(x_0, x_1, x_2, x_3, 0)$. Le corollaire 2.5 assure que la variété $Y \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $f(x_0, x_1, x_2) = h(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ possède un point quadratique. Il en est donc de même pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$. □

*Remarque* 3.2. Le cas $n \geq 6$ est facile : toute forme quadratique en $n + 1 \geq 7$ variables s'annule sur une droite définie sur $k$. L'intersection d'une telle droite avec une seconde quadrique définit un point au plus quadratique sur l'intersection. Pour $n \geq 6$, on peut donner cet argument sur tout corps $C_2$, ou sur un corps de nombres totalement imaginaire,

*Remarque* 3.3. La démonstration de [CV, Thm. 2.1] passe par une étude détaillée à la Hensel. Les auteurs donnent une seconde démonstration [CV, Prop. 4.7], via des résultats sur les courbes de genre 1. Leur seconde démonstration fournit un résultat un peu plus faible lorsque $p = 2$ : le pgcd des degrés des points fermés divise 2. La démonstration que nous avons donnée est une variante de cette seconde démonstration. Elle vaut aussi pour $p = 2$.

*Remarque* 3.4. Des exemples de surfaces de del Pezzo de degré 4 sans point quadratique (et même d'indice 4) ont été construits par Wittenberg et par Creutz-Viray [CV, Thm. 7.6] sur des corps $C_4$. Sur des corps $C_3$, des exemples ont été construits par Kollár et par Ottem. La question de savoir si une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps $C_2$, ou sur un corps de nombres possède un point dans une extension quadratique reste ouverte. La question de savoir si une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps $C_2$ a son indice qui divise 2 est aussi ouverte. Déjà le cas $k = \mathbb{C}((u))((v))$ est intéressant.

## 4. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^4_k$

**Proposition 4.1.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par $f = g = 0$.*

*(i) Si $k$ est algébriquement clos, $X$ contient exactement 16 droites. La forme générique $f+tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $f+\lambda g$, $\lambda \in k$, est déployée.*

*(ii) Si $k$ est fini, la forme générique $f+tg$ contient $1H$. Toute forme non singulière $f+\lambda g$ contient $2H$. On a $X(k) \neq \emptyset$.*

*(iii) Si $k$ est $p$-adique, $p \neq 2$, et $X$ a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors $X(k) \neq \emptyset$.*

*(iv) Si $k$ est $p$-adique, toute forme non singulière $f+\lambda g$ contient $1H$. La $k$-variété $X$ possède un point dans une extension quadratique de $k$. Il existe des valeurs de $\lambda \in k$ pour lesquelles $f+\lambda g$ est non singulière et contient $2H$.*

*(v) Si $k$ est un corps de nombres, il existe une extension quadratique $K/k$ telle que $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.*

*(vi) (Creutz-Viray) Si $k$ est un corps de nombres, et si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors l'indice de $X$ divise 2. Plus précisément il existe un point fermé dont le degré est dans l'ensemble* $\{1, 2, 6, 10\}$.

*Démonstration.* (i) L'existence des 16 droites sur une surface de del Pezzo de degré 4 est un résultat classique. Le corps $k(t)$ est un corps $C_1$, donc toute forme quadratique non dégénérée en au moins 5 variables contient deux hyperboliques.

(ii) Soit $k = \mathbb{F}$ fini, $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$. Le corps $\mathbb{F}(t)$ est ici $C_2$, donc toute forme quadratique non dégénérée en au moins 5 variables sur le corps $\mathbb{F}(t)$ est isotrope. On conclut avec la Proposition 1.2. On peut bien sûr établir $X(\mathbb{F}) \neq \emptyset$ par d'autres méthodes.

(iii) Ceci résulte de (ii) par le lemme de Hensel.

(iv) Toute forme quadratique en 5 variables est isotrope. La seconde partie de (iv) résulte du théorème 3.1 (cas lisse, Creutz-Viray) assurant l'existence d'un point de $X$ dans une extension quadratique de $k$ et de la proposition 1.6.

(v) Si $k$ est un corps de nombres, il existe un ensemble fini $S$ de places de $k$ tel que $X(k_v) \neq \emptyset$ pour $v \notin S$. Pour chaque place $v \in S$, le point (iv) donne une extension $k_v(\sqrt{a_v})$ avec $a_v \in k_v^*$ telle que $X(k_v(\sqrt{a_v})) \neq \emptyset$. Par approximation faible sur $k$, on trouve $a \in k^*$ tel que sur $K = k(\sqrt{a})$ on ait $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.

(vi) La démonstration qui suit est donnée brièvement dans [CV, Remark 4.8]. Le polynôme $det(\lambda f + \mu g)$ est de degré 5. Il existe donc une extension $K/k$ de degré 1, 3 ou 5 sur laquelle ce polynôme a un zéro. Sur le corps $K$, on a donc une forme $g$ dans le pinceau qui est de rang 4. L'hypothèse $X(k_v)$ non vide implique que les $k_v$-points de $X$ sont Zariski denses. Ainsi la forme quadratique $g$ de rang 4 admet des zéros non triviaux sur tous les complétés de $K$. Par le principe de Hasse, elle admet donc un zéro non trivial sur $K$. Mais alors il existe une droite de $\mathbb{P}^1_K$ (passant par le sommet du cône) contenue dans la quadrique $g = 0$. Son intersection avec une autre quadrique du pinceau donne un point de $X$ dans une extension au plus quadratique de $K$. Ainsi $X$ possède un point fermé dont le degré est dans $\{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$. D'après la proposition 1.3, ceci se ramène à $\{1, 2, 6, 10\}$. Comme $X$ clairement possède un point fermé de degré dans $\{1, 2, 4\}$, on conclut que l'indice de $X$ divise 2. $\square$

*Remarque* 4.2. Sur un corps de nombres, le théorème principal [CV, Thm. 1.1] de Creutz et Viray assure que pour une intersection complète lisse $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, l'indice de $X$ divise 2 [CV, Thm. 1.1], sans supposer $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. La démonstration est beaucoup plus délicate que celle des résultats (v) et (vi) ci-dessus. Supposant certaines conjectures générales, ils donnent aussi un résultat conditionnel [CV, Thm. 1.2 (ii)] pour l'existence d'un point dans une extension quadratique.

Avant d'énoncer la proposition suivante, faisons quelques rappels généraux sur les formes quadratiques.

Soit $k$ un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Soit $\varphi : f + tg$ la forme quadratique générique sur $K = k(t)$. Supposons-la de rang 5. Soit $\psi = \varphi \perp < -det(\varphi) >$.

La forme $\psi$ est isotrope si et seulement si $\varphi$ représente $det(\varphi)$. Supposons que c'est le cas. Dans ce cas la forme $\varphi$ s'écrit $det(\varphi) \perp \varphi_0$, avec $\varphi_0$ de rang 4, de déterminant 1, donc de la forme $det(\varphi). < u, v, w, uvw >$ pour des $u, v, w \in K^*$. On a donc

$$\varphi = det(\varphi). << 1, u, v, w, uvw >> .$$

Cette forme est semblable à une sous-forme de rang 5 de la forme de Pfister $<< u, v, w >>$. La forme $\varphi$ est donc isotrope si et seulement si la forme de Pfister $<< u, v, w >>$ est hyperbolique.

**Proposition 4.3.** *Soit $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Soit $\varphi =: f + tg$ la forme quadratique générique sur $K = k(t)$. Supposons $\varphi$ non singulière, i.e. de rang 5. Soit $\psi = \varphi \perp < -det(\varphi) >$. Cette forme est semblable à une forme d'Albert.*

*Supposons que, pour toute place $v$ de $k$, on a $X(k_v) \neq \emptyset$.*

*Les conditions suivantes sont équivalentes.*

*(i) $X(k) \neq \emptyset$.*

*(ii) La forme $\varphi$ est isotrope sur le corps $k(t)$.*

*(iii) La forme $\psi$ est isotrope sur le corps $k(t)$.*

*(iv) L'algèbre de Clifford de $\psi$ est semblable à une algèbre de quaternions.*

*Démonstration.* La proposition 1.2 donne l'équivalence de (i) et (ii). Il suffit de montrer que (iii) implique (ii). On a vu ci-dessus que sous l'hypothèse (iii) on peut écrire

$$\varphi = det(\varphi). << 1, u, v, w, uvw >> .$$

Par l'hypothèse $X(k_v) \neq \emptyset$, la forme $\varphi$ est isotrope sur $k_v(t)$. Donc $<< u, v, w >>$ est hyperbolique sur $k_v(t)$. On sait [CTCS, Prop. 1.1] que l'application de restriction de $k$ à chaque $k_v$ induit une injection sur les groupes de Witt :

$$W(k(t)) \hookrightarrow \prod_v W(k_v(t)).$$

On conclut que $<< u, v, w >>$ est hyperbolique sur $k(t)$. Et donc $\varphi$ est isotrope sur $k(t)$. Et donc $X(k) \neq \emptyset$ d'après la proposition 1.2. □

*Remarque* 4.4. Comme on sait, il existe des contre-exemples au principe de Hasse pour une surface de del Pezzo de degré 4 (intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$). On conjecture qu'il n'en existe pas si l'on a $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(X)$.

## 5. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^5_k$

**Proposition 5.1.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse définie par $f = g = 0$. La variété des droites contenues dans $X$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 2.*

*(i) Si $k$ est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$, $\lambda \in k$, est déployée.*

*(ii) Si $k$ est un corps fini $\mathbb{F}$, de caractéristique $p \neq 2$, la variété $X$ contient au moins une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$, et la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$. Si le corps fini $\mathbb{F}$ a au moins 27 éléments, il existe au moins une forme non singulière $f + \lambda g$ qui est totalement hyperbolique, et donc $X$ contient une conique.*

*(iii) Si $k$ est $p$-adique et $p > 2$, et si $X$ a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors $X$ contient des droites $\mathbb{P}^1_k$, la forme générique $f + tg$ contient deux hyperboliques, et toute forme non singulière $f + \lambda g$, $\lambda \in k$, contient $2H$. Si en outre le cardinal du corps fini résiduel est au moins 27, alors il existe des formes non singulières $f + \lambda g$ qui s'annulent sur un $\mathbb{P}^2_k$, autrement dit sont totalement hyperboliques, et donc $X$ contient une conique.*

*(iv) Si $k$ est $p$-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $1H$. Il existe des valeurs de $\lambda \in k$ pour lesquelles $f + \lambda g$ est non singulière et contient $2H$.*

*Démonstration.* D'après [XW, Thm. 1.1], sur tout corps de caractéristique différente de 2, la variété $F_1(X)$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 2.

Une fois connue cette structure, le théorème de Lang sur les espaces principaux homogènes de groupes algébriques connexes sur un corps fini donne le premier énoncé de (ii). Si le corps fini $k = \mathbb{F}$ a plus de 25 éléments, alors la courbe $C$ de genre 2 d'équation affine $y^2 = -det(f + \lambda g)$ contient un point rationnel avec $y \neq 0$. La forme quadratique $f + \lambda g$ sur le corps fini $\mathbb{F}$ est alors de rang 6 et totalement hyperbolique.

Pour établir (iii), on utilise le fait que si $X/k$ a bonne réduction comme intersection lisse de deux quadriques, alors la $k$-variété $F_1(X)$ s'étend en un schéma projectif et lisse sur l'anneau des entiers de $k$. L'énoncé (iii) et le lemme de Hensel donnent alors que $X$ contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. Le dernier énoncé de (iii) résulte du dernier énoncé de (ii) : il suffit de relever une forme non singulière $f + \lambda g$ du corps fini sur le corps $p$-adique.

Pour (iv), on considère une section hyperplane lisse $Y = X \cap \Pi$. D'après la proposition 4.1 (iv), $Y$ possède un point dans une extension au plus quadratique de $k$. Il en est donc de même de $X$. D'après la proposition 1.6, il existe alors des quadriques non singulières dans le pinceau qui contiennent une droite de $\mathbb{P}^5_k$, i.e. il existe $\lambda \in k$ tel que $f + \lambda g$ soit de rang maximal et contienne deux hyperboliques. □

Le théorème suivant répond à une question de [CV].

**Théorème 5.2.** *Soient $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par $f = g = 0$. Pour $n \geq 5$, il existe un point quadratique sur $X$.*

*Démonstration.* Supposons d'abord $n = 5$. Hors d'un ensemble fini $S$ de places de $k$, contenant les places 2-adiques, l'intersection lisse de deux quadriques $X$ a bonne réduction comme intersection de deux quadriques.

Pour toute place $v$ de $k$ hors de $S$, par la proposition 5.1(iii) toute forme non singulière $\lambda_v f + \mu_v g$ dans le pinceau contient deux hyperboliques.

D'après le théorème de Creutz-Viray (cas lisse du théorème 3.1 ci-dessus), pour toute place $v$ de $k$, $X$ contient un point quadratique sur $k_v$ (c'est clair pour $k_v = \mathbb{R}$, on pourrait ici ignorer la proposition 1.16), donc par la proposition 1.6 il existe une forme quadratique non singulière $\lambda_v f + \mu_v g$ dans le pinceau qui contient deux hyperboliques. Par le théorème des fonctions implicites, ceci sera encore vrai pour tout point de $\mathbb{P}^1(k_v)$ proche de $(\lambda_v, \mu_v)$.

Par approximation faible sur $\mathbb{P}^1_k$, on trouve donc une forme non singulière $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau sur $k$ qui localement pour toute place contient deux hyperboliques. Par le théorème 1.17, la forme contient alors deux hyperboliques sur le corps $k$. Par l'implication évidente dans la proposition 1.6, on conclut que $X$ possède un point quadratique.

Pour $n \geq 6$, on peut procéder par réduction au cas $n = 5$, mais il est plus simple d'observer que, comme toute forme non singulière de rang 7 sur un corps $p$-adique contient deux hyperboliques, l'argument final ci-dessus permet facilement de prouver l'existence d'une forme $\lambda f + \mu g$ non singulière contenant deux hyperboliques. □

*Remarque* 5.3. Pour cette démonstration, il suffit d'utiliser le fait que $X$ et la $k$-variété $F_1(X)$ s'étendent en des modèles projectifs et lisses au-dessus d'un ouvert non vide du spectre de l'anneau des entiers du corps de nombres $k$, les fibres sur les corps résiduels $\kappa(v)$ étant les variétés géométriquement intègres $F_1(X_{\kappa_v})$ attachées aux intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_{\kappa(v)}$.

*Remarque* 5.4. Comme rappelé ci-dessus, Creutz et Viray ont montré que pour $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, l'indice $I(X)$ divise 2. La question si une telle variété $X$ possède un point quadratique reste ouverte.

Le théorème suivant a été établi par Iyer et Parimala [IP]. Nous en offrons une démonstration alternative.

**Théorème 5.5.** *(Iyer et Parimala) Soient $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par un système $f = 0, g = 0$. Supposons que la courbe $C$ d'équation $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$ a un point de degré impair, ce qui est le cas par exemple s'il existe une forme de rang 5 dans le pinceau. Si pour chaque place $v$, la variété $X$ contient une $k_v$-droite, alors $X$ a un point rationnel.*

*Démonstration.* Soit $t$ une variable. En prenant $t = \lambda/\mu$, on voit $C$ comme un revêtement double de $\mathbb{P}^1_k$, ramifié aux zéros de $det(\lambda f + \mu g)$. Pour chaque place $v$, la forme quadratique $f + tg$ contient deux hyperboliques sur $k_v(t)$, on a donc sur $k_v(t)$ un isomorphisme

$$f + tg \simeq < 1, -1 > \perp < 1, -1 > \perp \rho_v < 1, det(f + tg) >>$$

avec $\rho_v \in k_v(t)^\times$. Sur le corps $k_v(C)$, la forme $f + tg$ est donc totalement hyperbolique. Pour tout point $(\lambda, \mu)$ de $\mathbb{P}^1(k_v)$ dans l'image de $C(k_v) \to \mathbb{P}^1(k_v)$ et non situé sur le lieu de ramification la forme $\lambda f + \mu g$ sur $k_v$ est totalement hyperbolique. [Ceci nécessite un petit argument : sur un anneau de valuation discrète $A$ avec $2 \in A^*$, de corps des fractions $F$, deux $A$-formes quadratiques $F$-isomorphes sont $A$-isomorphes, donc aussi leurs spécialisations sur le corps résiduel de $A$.] Ceci vaut sur toute extension de $k_v$. On prend alors un point $P$ de $C$ dans une extension de degré impair de $k$ hors du lieu de ramification, et son image $Q = (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(L)$ avec $L/k$ de degré impair. La forme $\lambda f + \mu g$ est totalement hyperbolique sur chaque $L_w$. D'après Hasse, ceci implique que la forme $\lambda f + \mu g$ sur le corps $L$ est totalement hyperbolique. Donc l'intersection de deux quadriques $X_L \subset \mathbb{P}^5_L$ contient une conique, et a des points dans tous les complétés. D'après le théorème 1.19 (Salberger), elle a un $L$-point. Par la proposition 1.3, la $k$-variété $X$ a un $k$-point. □

*Remarque* 5.6. On donnera plus loin (corollaire 8.8) une autre démonstration du théorème d'Iyer et Parimala.

## 6. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^6_k$

Ce cas est assez mystérieux, du point de vue arithmétique on ne semble guère pouvoir faire plus que pour $X \subset \mathbb{P}^5_k$.

**Proposition 6.1.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^6_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$.*

*(i) Supposons* $\mathrm{car}(k) = 0$. *La variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 4, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 8.*

*(ii) Si $k$ est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $3H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$, $\lambda \in k$, est déployée. La variété $X$ contient des $\mathbb{P}^2_k$ en nombre fini.*

*(iii) Si $k$ est un corps fini $\mathbb{F}$, la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$. La variété $X$ contient au moins une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$.*

*(iv) Si $k$ est $p$-adique, et si $X$ a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors $X$ contient des droites $\mathbb{P}^1_k$, la forme générique $f + tg$ contient deux hyperboliques, et toute forme non singulière dans le pinceau contient 2H. Si de plus le cardinal du corps fini résiduel est au moins 9, alors il existe des formes non singulières $f + \lambda g$ qui s'annulent sur un $\mathbb{P}^2_k$, autrement dit contiennent $3H$. Dans ce cas $X$ contient une conique définie sur $k$.*

*(v) Si $k$ est $p$-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$.*

*(vi) Si $k$ est un corps de nombres, $X$ contient un point sur une extension quadratique.*

*Démonstration.* L'énoncé (i) est mis pour mémoire, voir la proposition 1.15.

Si $k$ est algébriquement clos, $k(t)$ est $C_1$, et donc la forme $f + tg$, de rang 7, contient 3H.

Pour (iii), comme le corps $\mathbb{F}(t)$ est $C_2$, la forme $f + tg$ qui est non dégénérée et de rang 7 contient deux hyperboliques. La proposition 1.2 donne alors que $X$ contient une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$.

Pour (iv), on airmerait trouver une section par un bon hyperplan $\Pi$ telle que $X \cap \Pi$ ait bonne réduction, et appliquer le théorème pour $\mathbb{P}^5$. Quitte à remplacer $\mathbb{F}$ par une extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ de degré impair, et $k$ par l'extension non ramifiée $k'/k$ correspondante, on peut trouver une telle section. On trouve ainsi une extension

$k'/k$ de degré impair telle que $X \cap \Pi$ et donc $X$ contienne une droite $\mathbb{P}^1_{k'}$. La forme $f + tg$ contient donc deux hyperboliques sur $k'(t)$. Par une variante du théorème de Springer, elle possède deux hyperboliques sur $k(t)$. Et donc par la proposition 1.2 $X$ contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. Pour le dernier point de (iv), notons que l'on peut trouver $\lambda, \mu$ dans le corps résiduel fini $\mathbb{F}$ tels que $\lambda f + \mu g$ soit de rang 7 sur le corps fini et contienne trois hyperboliques. Ceci se relève sur le corps $p$-adique.

Pour (v), il suffit de remarquer que toute forme quadratique non dégénérée de rang 7 contient deux hyperboliques. L'existence d'une droite sur la quadrique s'en suit, et ceci assure l'existence d'un point au plus quadratique sur $X$.

Pour (vi), cela résulte de (iii), (iv) et du théorème 1.17, par l'argument d'approximation faible vu plus haut. Par section hyperplane lisse, cela résulte aussi de la Proposition 6.1. □

## 7. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^7_k$

**Proposition 7.1.** *Soit $k$ un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$.*

*(i) Suppons* $\mathrm{car}(k) = 0$. *La variété $F_1(X)$ des $\mathbb{P}^1$ contenus dans $X$ est projective et lisse et géométriquement connexe. C'est une variété de Fano géométriquement rationnelle, de groupe de Picard géométrique $\mathbb{Z}$.*

*(ii) La variété $F_2(X)$ des $\mathbb{P}^2$ contenus dans $X$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 3.*

*(iii) Si $k$ est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $3H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$, $\lambda \in k$, est déployée.*

*(iv) Soit $k = \mathbb{F}$ un corps fini. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$. La variété $X$ contient au moins un $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}}$. La forme générique $f + tg$ contient $3H$.*

*(v) Si $k$ est $p$-adique, et $X$ a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors $X$ contient des $\mathbb{P}^2_k$, la forme générique $f + tg$ contient 3H, et toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$.*

*(vi) Si $k$ est $p$-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$.*

*(vii) Si $k$ est $p$-adique, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, alors il existe une forme de rang 8 qui contient 3H.*

*(viii) Si $k$ est un corps de nombres, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, alors il existe une forme de rang 8 dans le pinceau qui contient 3H.*

*(ix) Si $k$ est un corps de nombres, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, et si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors $X$ possède un point rationnel.*

*Démonstration.* Les énoncés (i) et (ii) ont été donnés à la proposition 1.15 en caractéristique zéro. Le fait que (ii) vaille pour $F_2(X)$ en caractéristique différente de 2 est établi dans [XW].

(iii) Le corps $k(t)$ est un corps $C_1$, donc la forme $f + tg$, qui est non dégénérée de rang 8, contient 3H.

(iv) Sur un corps fini $k = \mathbb{F}$, toute forme quadratique de rang au moins 3 est isotrope. Tout espace principal homogène sous une variété abélienne sur $\mathbb{F}$ est trivial. De (ii) on déduit par le théorème de Lang que l'on a $F_2(X)(\mathbb{F}) \neq \emptyset$. Donc la forme générique $f + tg$ contient $3H$.

(v) Si $k$ est $p$-adique et $X$ a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors il en est de même de $F_2(X)$. Par (ii) et le lemme de Hensel,

$F_2(X)$ a un $k$-point. Ainsi $X$ contient un $\mathbb{P}^2_k$ et donc toute forme non singulière dans le pinceau contient $3H$.

(vi) Sur un corps $p$-adique, et aussi sur un corps $C_2$, toute forme quadratique en au moins 7 variables contient $2H$.

(vii) On peut supposer que le polynôme séparable $P(t) = det(f + tg)$ est de degré 8. Par hypothèse, il admet un zéro sur $k$, donc un zéro simple. On voit alors facilement qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $P(\lambda) \in k$ n'est pas un carré. La forme $f + \lambda g$ est alors une forme de rang 8 dont le déterminant $\delta$ n'est pas un carré. Comme le corps est $p$-adique, la forme s'écrit

$$< 1, -1 >\perp< 1, -1 >\perp q,$$

avec $q$ une forme quadratique de rang 4 de déterminant non carré dans $k$. Il est bien connu qu'une telle forme est isotrope.

(viii) et (ix) En combinant (v), (vii) et l'approximation faible, on trouve $\lambda$ dans le corps de nombres $k$ tel que $f+\lambda g$ est de rang 8 et contient 3H sur chaque $k_v$, donc aussi sur $k$ par le théorème 1.17. Ainsi $X$ contient une conique, et sous l'hypothèse $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ le théorème 1.19 (Salberger) donne $X(k) \neq \emptyset$. □

*Remarque* 7.2. (a) Pour la démonstration dans le cas global, au lieu d'utiliser (v), il suffit de savoir que pour presque tout complété $k_v$, on a $F_2(X)(k_v) \neq \emptyset$. Ceci résulte simplement du fait que la $k$-variété $F_2(X)$ est géométriquement intègre (et non vide).

(b) Sur tout corps $k$, l'hypothèse qu'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau équivaut au fait que le polynôme homogène $det(\lambda f + \mu g)$ possède un zéro sur $k$ (par nécesssité zéro simple, puisque $X$ est lisse).

(c) Pour obtenir la conclusion de (ix), il suffirait de supposer que $det(\lambda f + \mu g)$ possède un zéro dans une extension de degré impair.

Sur un corps $p$-adique $k$, sous les hypothèses supplémentaires que $X(k)$ est non vide et que le cardinal du corps résiduel est au moins égal à 32, Heath-Brown [HB, Thm. 2] montra que pour $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse il existe une quadrique non dégénérée dans le pinceau qui contient 3 hyperboliques. Sur un corps de nombres, ce résultat lui permet d'établir le principe de Hasse pour les points rationnels des intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^7_k$ [HB, Thm. 1].

On va maintenant retrouver ces résultats.

Pour le résultat local, on va utiliser le théorème 3.1 (Creutz-Viray) sur les surfaces de del Pezzo de degré 4.

**Théorème 7.3.** *Soit $k$ un corps $p$-adique. Soit $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Supposons $X(k)$ non vide. Alors :*

*(a) Il existe sur $X$ un couple de droites distinctes, sécantes, et globalement définies sur $k$.*

*(b) Il existe une forme quadratique non dégénérée $\lambda f + \mu g$, avec $\lambda, \mu \in k$, qui contient $3H$.*

*Démonstration.* Soit $M \in X(k)$. Comme $k$ est $p$-adique, ou encore parce qu'une intersection complète lisse $X$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$ est $k$-unirationnelle dès qu'elle a un $k$-point, les $k$-points sont Zariski denses dans $X$. D'après le théorème 1.15 (e), on peut choisir $M$ de sorte que l'espace tangent à $X$ en $M$ découpe sur

$X \subset \mathbb{P}^7_k$ un cône de dimension relative 1 sur une intersection complète lisse $Y$ de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$.

D'après le théorème 3.1, la $k$-variété $Y \subset \mathbb{P}^4_k$ a un point dans une extension au plus quadratique $K/k$, et comme $Y$ est lisse, ses $K$-points sont Zariski denses sur $Y_K$. Si $Y(k) \neq \emptyset$, les $k$-points sont denses sur $Y$. On peut donc trouver sur $X$ un couple de droites distinctes, soit définies toutes deux sur $k$, soit définies sur une extension quadratique $K$ et conjugées sur ce corps, et se rencontrant en le $k$-point $M$.

Il existe au moins une forme quadratique $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau, définie sur $k$, et contenant le plan $\mathbb{P}^2_k$ engendré par ces deux droites.

Si la forme quadratique $\lambda f + \mu g$ est de rang 8, alors elle contient 3H. Si la forme quadratique est de rang 7, la proposition 7.1 (vii) montre qu'il existe une forme de rang 8 dans le pinceau qui contient 3 hyperboliques. $\square$

*Remarque* 7.4. Partant de $P \in X(k)$ quelconque, la proposition 1.14 donne déjà un cône de sommet $P$ sur une intersection de deux quadriques $Y \subset \mathbb{P}^4_k$, sans la précision qu'on peut trouver $Y$ lisse. Sur le corps $p$-adique $k$, le théorème 3.1 assure l'existence d'un point de $Y$ sur une extension quadratique de $k$.

Voici maintenant une démonstration alternative du théorème global établi par Heath-Brown [HB, Thm. 1].

**Théorème 7.5.** *Soient $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de $X$.*

*Démonstration.* On part de $X$ avec $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place $v$. On utilise la proposition 1.16 (le cas $k = \mathbb{R}$), la proposition 7.1 (v) (le cas de bonne réduction, qu'il suffit d'ailleurs de connaître pour les complétés $k_v$ hors d'un ensemble fini de places de $k$), et le théorème 7.3. Par approximation faible, on trouve $\lambda \in k$ avec $f + \lambda g$ de rang 8 qui contient $3H$ sur chaque complété de $k$, et qui donc par le théorème 1.17 contient $3H$. Donc $X$ contient une conique, et on conclut avec le théorème 1.19 (Salberger). $\square$

Dans la démonstration précédente, on utilise l'hypothèse $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ pour établir l'existence d'une conique dans $X$. On peut comparer cela à l'énoncé suivant, qui ne suppose pas $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$.

**Proposition 7.6.** *Soient $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ lisse définie par $f = g = 0$, avec des points dans tous les complétés. Il existe une extension quadratique $K/k$ telle que $f + tg$ sur le corps $K(t)$ contienne deux hyperboliques sur les complétés $K_w(t)$, autrement dit $F_1(X)(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.*

*Démonstration.* Pour presque toute place $v$ de $k$, la forme générique $f + tg$ contient trois hyperboliques sur $k_v(t)$, et $X$ contient un plan $\mathbb{P}^2_{k_v}$. Pour toute place $v$ de $k$, il existe une extension quadratique $K_w$ de $k_v$ telle que la forme générique $f + tg$ contienne deux hyperboliques sur $K_w(t)$ (car on a vu au théorème 7.3 qu'il existe une droite de $X$ définie sur une extension quadratique de $k_v$). Par approximation faible, on trouve une extension quadratique $K/k$ telle que $f + tg$ sur $K(t)$ contienne deux hyperboliques sur tous les $K_w(t)$ pour $w$ place de $k$. On peut choisir $K$ totalement imaginaire. $\square$

*Remarque* 7.7. La proposition 7.1 (i) implique que la $k$-variété projective et lisse géométriquement rationnelle $F_1(X)$ satisfait $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(F_1(X))$. On s'attend à avoir le principe de Hasse pour l'existence de droites sur $X \subset \mathbb{P}^7$. Avec les notations de la proposition 7.1, $X$ qui a des points dans tous les complétés de $k$ devrait selon la Proposition 7.6 contenir une droite sur une extension quadratique et donc d'après [CTSaSD] devrait avoir un $k$-point. Mais prouver le principe de Hasse pour $F_1(X)$ ne semble pas a priori plus simple que de prouver le principe de Hasse pour $X$.

## 8. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^5_k$, compléments

Soient $k$ un corps de caractéristique différente de 2, et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par $f = g = 0$. Soit $C$ la courbe lisse définie par l'équation

$$y^2 = -det(\lambda f + \mu g).$$

On renvoie à Wang [XW] pour les faits suivants.

Soit $J = \mathrm{Pic}^0_{C/k}$. C'est une variété abélienne sur $k$. Soit $P = \mathrm{Pic}^1_{C/k}$. C'est un espace principal homogène sous $J$. Il est trivial si $C$ possède un point fermé de degré impair. Soit $F_1 = F_1(X)$ la variété des droites contenues dans $X$. C'est un espace principal homogène sous $J$. Dans $H^1(k, J)$, on a les égalités $[P] = 2[F_1]$ et $2[P] = 0$. Donc $4[F_1] = 0$.

Donnons maintenant des rappels de [Reid] et [ABB14, §1]. Voir aussi la Proposition 1.7 ci-dessus et l'appendice à cet article.

On introduit la variété $G_2(X)$ formée des couples $(H, Q)$ où $Q$ est une quadrique de $\mathbb{P}^5_k$ contenant $X$, et où $H \subset Q \subset \mathbb{P}^5$ est un espace linéaire de dimension 2 de $\mathbb{P}^5$ contenu dans la quadrique $Q$. On a une projection évidente $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ associant à $(H, Q)$ le paramètre de $Q$. On montre [Reid, Thm. 1.10] [ABB14, Prop. 1.18] que la factorisation de Stein de ce morphisme est

$$G_2(X) \to C \to \mathbb{P}^1_k$$

avec $C$ la courbe ci-dessus, et que le morphisme $G_2(X) \to C$ définit un schéma de Severi-Brauer (à fibres lisses) de dimension relative 3, associé à une classe $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)[2]$ dont l'image dans $\mathrm{Br}(k(C))$ est d'indice divisant 4. Elle est donc la classe d'une algèbre de biquaternions sur $k(C)$.

On dispose par ailleurs de la forme quadratique $q := f + tg$ sur le corps $k(t)$, qui sur l'extension $k(C)$ de $k(t)$ acquiert bonne réduction partout. La forme quadratique $q_{k(C)}$ est une forme quadratique de rang 6 de déterminant $-1$.

Rappelons que sur un corps $F$ de caractéristique différente de 2, toute forme quadratique $\varphi$ de rang 6 et de déterminant signé 1, donc de déterminant $(-1)$, est appelée une forme d'Albert. Elle est un multiple scalaire d'une forme du type

$$< -a, -b, ab, -c, -d, cd > .$$

Son invariant de Clifford $c(\varphi) \in \mathrm{Br}(F)[2]$ est la somme des deux classes d'algèbres de quaternions $(a, b)$ et $(c, d)$. La forme $\varphi$ est isotrope si et seulement si l'indice de $c(\varphi)$ divise 2. La forme $\varphi$ est totalement hyperbolique si et seulement si $c(\varphi) = 0$. Pour tout ceci, voir [K, 8.1.3, 8.1.4, 8.1.6].

**Proposition 8.1.** *La classe $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ est la classe de l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique $q_{k(C)}$.*

*Démonstration.* Ceci est établi à la Proposition B3 de l'appendice B de [ABB14]. □

**Proposition 8.2.** *Soient $X \subset \mathbb{P}^5_k$, $C$ et $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C) \subset \mathrm{Br}(k(C))$ comme ci-dessus.*

*(i) Si l'on a $X(k) \neq \emptyset$, c'est-à-dire si la forme quadratique $f + tg$ a un zéro sur le corps $k(t)$, alors l'indice de $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ divise 2.*

*(ii) Si l'indice de $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ divise 2, alors la forme quadratique $f + tg$ a un zéro sur l'extension quadratique $k(C)$ de $k(t)$.*

*Démonstration.* Via la proposition 8.1, ceci résulte des rappels sur les formes d'Albert donnés ci-dessus : l'indice de $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ divise 2 si et seulement si la forme $f + tg$ est isotrope sur le corps $k(C)$. Pour (i), voir aussi la démonstration géométrique [HT, §4, Cor. 7]. □

**Théorème 8.3.** *Soit $k$ un corps. Pour $X \subset \mathbb{P}^5_k$, $C$ et $\alpha_X$ comme ci-dessus, on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

*(i) Il existe une quadrique non singulière dans le pinceau qui contient un $\mathbb{P}^2_k$.*

*(ii) Il y a une forme quadratique non singulière totalement hyperbolique dans le pinceau $\lambda f + \mu g$.*

*(iii) Il y a un $k$-point $m \in C(k)$ non ramifié pour $C \to \mathbb{P}^1_k$ tel que $\alpha_X(m) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$.*

*Elles impliquent que $X$ contient une conique.*

*Démonstration.* Les énoncés (i) et (ii) sont clairement équivalents. Comme rappelé ci-dessus et dans la Proposition 1.7, le morphisme $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ se factorise par $C \to \mathbb{P}^1_k$, où la courbe $C$ est donnée par $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$. Un $k$-point $m$ de $C$ non dans le lieu de ramification a pour image un point $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $\lambda f + \mu g$ est de rang maximal, et qui contient un $\mathbb{P}^2_k$ si et seulement si $\alpha_X(m) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$. □

Une démonstration du théorème suivant (avec la restriction $X(k) \neq \emptyset$) est esquissée dans [HT, Theorem 9]. Nous proposons une démonstration alternative.

**Théorème 8.4.** *Soient $X \subset \mathbb{P}^5_k$, $C$ et $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ comme ci-dessus.*

*(i) Si $X$ contient une droite sur $k$, alors $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.*

*(ii) Si $X(k) \neq \emptyset$ et $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$, alors $X$ contient une droite sur $k$.*

*Démonstration.* (i) Si $X$ contient une droite $\mathbb{P}^1_k$, alors la forme quadratique $f + tg$ sur $k(t)$ contient deux hyperboliques. Donc

$$q \simeq < 1, -1 > \perp < 1, -1 > \perp \rho. < 1, det(q) > .$$

Sur l'extension quadratique $k(C)$ cette forme est totalement hyperbolique. Donc $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.

(ii) L'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ implique que $q = f + tg$ scinde un hyperbolique. On a donc

$$q \simeq < 1, -1 > \perp q_1$$

sur $k(t)$, avec $q_1$ de déterminant un carré dans $k(C)^\times$. L'hypothèse $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$ implique alors que cette forme quadratique $q_1$ se scinde complètement sur $k(C)$. Puisque $k(C)/k(t)$ est l'extension discriminant, et $q_1$ a rang 4, ceci implique que $q_1$ est isotrope sur $k(t)$. Donc $q$ scinde deux hyperboliques sur $k(t)$. La quadrique générique $f + tg = 0$ contient donc une droite. Par le théorème 1.2, la variété d'équations $f = g = 0$ contient un $\mathbb{P}^1_k$. □

L'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ n'est pas nécessaire. On a :

**Théorème 8.5.** *Soient $X \subset \mathbb{P}^5_k$, $C$ et $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ comme ci-dessus. Soit $J = \mathrm{Pic}^0_{C/k}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
*(i) La variété $X$ contient une droite sur $k$.*
*(ii) On a $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.*
*(iii) La classe de $F = F_1(X)$ dans $H^1(k, J)$ est nulle.*

*Démonstration.* On sait [XW] que la $k$-variété $F_1(X)$ des droites de $X$ est un espace principal homogène de $J$, qui a donc une classe $[F]$ dans $H^1(k, J)$. Les énoncés (i) et (iii) sont équivalents. D'après le théorème 8.4, (i) implique (ii). Supposons (ii). Soit $k(X)$ le corps des fonctions de $X$. Considérons $X \times_k k(X)$. D'après le théorème 8.4, $X \times_k k(X)$ possède une droite. L'image de $[F] \in H^1(k, J)$ dans $H^1(k(X), J)$ est donc nulle. Mais l'application $H^1(k, J) \to H^1(k(X), J)$ est injective, car toute application $k$-rationnelle de la $k$-variété géométriquement rationnellement connexe $X$ vers un espace principal homogène d'une variété abélienne est constant. Ainsi $[F] = 0 \in H^1(k, J)$, et $X$ contient une droite sur $k$. □

*Remarque* 8.6. Dans [HT, Remark 10], les auteurs disent que $\alpha_X = 0$ implique que $C$ a un zéro-cycle de degré 1, mais je ne comprends pas l'argument.

*Remarque* 8.7. Si $X$ contient une droite sur $k$, alors $X$ est $k$-rationnelle. La réciproque est un théorème délicat qui fut prouvé par Benoist et Wittenberg, après un travail préliminaire de Hassett et Tschinkel.

Au théorème 5.5 on a donné une démonstration alternative d'un théorème de Iyer et Parimala [IP]. Voici une variante de cette démonstration.

**Corollaire 8.8.** *Soient $k$ un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit $C$ la courbe projective et lisse définie par l'équation $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$. Si $X$ possède une droite sur chaque $k_v$, et si l'indice de la courbe $C$ est 1, alors $X$ possède un point rationnel.*

*Démonstration.* D'après le théorème 8.4, $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ a son image nulle dans $\mathrm{Br}(C_{k_v})$ pour chaque place $v$ de $k$. Par ailleurs il existe un point $P$ fermé de degré impair sur $C$, qu'on peut prendre en dehors du lieu de ramification de $C \to \mathbb{P}^1_k$. Soit $K = k(P)$ son corps résiduel. La classe $\alpha_X(P) \in \mathrm{Br}(K)$ s'annule dans tous les complétés $K_w$ de $k$. D'après le principe de Hasse pour le groupe de Brauer d'un corps de nombres, $\alpha_X(P) = 0$. D'après le théorème 8.3, il existe une conique dans $X_K$. Comme $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ et donc $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$, et que $X_K \subset \mathbb{P}^5_K$ contient une conique, le théorème 1.19 (Salberger) donne $X(K) \neq \emptyset$ et donc, par la Proposition 1.3, $X(k) \neq \emptyset$. □

## Annexe A. Appendix, by A. Kuznetsov

We work over an arbitrary field $k$ of characteristic not equal to 2. Let $V$ be a vector space of dimension $n + 1$ and let

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$$

be a smooth complete intersection of two quadrics. Over a separable closure of $k$, the smoothness of $X$ implies that the pencil generated by $Q_1$ and $Q_2$ contains exactly $n + 1$ quadrics of corank 1, and all the other quadrics in the pencil are nondegenerate. Moreover, the vertices of singular quadrics in the pencil do not lie on $X$.

A.1. **Hilbert schemes of planes.** Let $G_r(X) \subset \mathrm{G}(r+1, V) \times \mathbb{P}^1$ be the relative Hilbert scheme of linear spaces $\mathbb{P}^r$ (linearly embedding into $\mathbb{P}^n$) contained in the quadrics of the pencil generated by $Q_1$ and $Q_2$.

**Proposition A.1.** *Let $k$ be a field of characteristic not equal to 2. The scheme $G_r(X)$ is smooth over $k$ of expected dimension and if $n \geq 2r+1$ it is geometrically integral. Moreover, if $n = 2r+1$ the morphism $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$ factors as*

$$G_r(X) \to C \to \mathbb{P}^1,$$

*where $C$ is a smooth connected curve, $C \to \mathbb{P}^1$ is a double covering branched at the discriminant locus of the pencil, which has length $n+1 = 2r+2$ and whose $\bar{k}$-points correspond to degenerate quadrics in the pencil, and $G_r(X) \to C$ is a smooth morphism.*

*Proof.* The smoothness is essentially proved in [K11, Proposition 2.1].

To prove smoothness (and geometric integrality) we may pass to the algebraic closure of the base field, so we assume $k$ algebraically closed. First, the smoothness of $X$ implies the smoothness of the total space $\mathcal{Q}$ of the relative quadric in the pencil (because $\mathcal{Q}$ is nothing but the blowup of $\mathbb{P}(V)$ at $X$). Then the first part of [K11, Proposition 2.1] implies that the natural morphism

$$T_P\mathbb{P}^1 \to S^2K_P^\vee$$

is surjective for any $P \in \mathbb{P}^1$, where $K_P \subset V$ is the kernel of the quadratic form corresponding to the point $P$. Finally, the argument of the second part of [K11, Proposition 2.1] implies that $G_r(X)$ is smooth of expected dimension.

To prove integrality, first assume that $n \geq 2r+2$. Then the general fiber of $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$ is irreducible, and since $G_r(X)$ is smooth and equidimensional, and all fibers of $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$ have the same dimension, it follows that $G_r(X)$ is connected, and since it is also smooth, it is (geometrically) integral.

Finally, assume $n = 2r+1$, and let again $k$ be any field of characteristic not equal to 2. Let

$$G_r(X) \longrightarrow C \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{P}^1$$

be the Stein factorization for the map $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$. Since $G_r(X)$ is normal, $C$ is a normal, hence smooth curve. Since the general fiber of $G_r(X)$ over $\mathbb{P}^1$ has two connected components, while the geometric fibers over the $\bar{k}$-points $P_1, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}^1$ of the discriminant are connected, the map $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ is a double covering branched over these points, in particular the curve $C$ is connected.

To prove that the morphism $G_r(X) \to C$ is smooth and $G_r(X)$ is connected we may pass to the algebraic closure of the base field, so from now on we assume $k$ algebraically closed. Let $x_1, \dots, x_{n+1} \in C$ be the ramification points of $f$. Following the proof of [FK, Proposition 2.7] we consider the vector bundles

$$\mathcal{V} \coloneqq V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \qquad \text{and} \qquad \widehat{\mathcal{V}} \coloneqq \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C(x_i)$$

on $\mathbb{P}^1$ and $C$, respectively, endowed with the quadratic forms

$$q\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \qquad \text{and} \qquad \hat{q}\colon \widehat{\mathcal{V}} \to \widehat{\mathcal{V}}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

where the first map is induced by the pencil of quadrics, and the second map is defined as the direct sum of morphisms

$$\mathcal{O}_C(x_i) \cong \mathcal{O}_C(-x_i) \otimes \mathcal{O}_C(2x_i) \cong \mathcal{O}_C(-x_i) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

in particular the form $\hat{q}$ is everywhere non-degenerate. On the other hand, the compatibility

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{V} \arrow[r, "f^*q"] \arrow[d, "\iota"'] & f^*\mathcal{V}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \\ \widehat{\mathcal{V}} \arrow[r, "\hat{q}"] & \widehat{\mathcal{V}}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \arrow[u, "\iota^\vee"'] \end{tikzcd}$$

where the left vertical arrow is defined as the composition

$$\iota \colon f^*\mathcal{V} \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C(x_i) = \widehat{\mathcal{V}}$$

with the middle arrow being the direct sum of the embeddings $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C(x_i)$, and the right vertical arrow is its dual. In particular, away from the points $x_i$ the vertical arrows are isomorphisms, hence the quadratic forms agree. On the other hand, over $x_i$ the map $\iota$ factors as the composition

$$V \xrightarrow{\pi_i} V/K_{P_i} \hookrightarrow \widehat{V},$$

where $\pi_i$ is the projection, and $K_{P_i} \subset V$ is the 1-dimensional kernel of the quadratic form corresponding to the point $P_i$.

Now consider the relative isotropic Grassmannian $\widehat{G}_r(X) \to C$ that parameterizes vector subspaces of dimension $r+1$ in the fibers of $\widehat{\mathcal{V}}$ isotropic with respect to $\hat{q}$. The argument of [FK, Proposition 2.7] shows that $\widehat{G}_r(X)$ has two connected components

$$\widehat{G}_r(X) = \widehat{G}_r^+(X) \sqcup \widehat{G}_r^-(X),$$

isomorphic to each other. We claim that each of these components is isomorphic to $G_r(X)$. Indeed, consider the morphism

$$\widehat{G}_r^+(X) \to G_r(X), \qquad (x, \widehat{U}) \mapsto (f(x), \iota^{-1}(\widehat{U})). \tag{A.1}$$

It is obvious that this map is well defined and is an isomorphism away from $P_i$. On the other hand, over $P_i$ the map factors as

$$\mathrm{OGr}^+_{\hat{q}_{x_i}}(r+1, \widehat{V}) \to \mathrm{OGr}_{\bar{q}_{P_i}}(r, V/K_{P_i}) \to \mathrm{OGr}_{q_{P_i}}(r+1, V),$$

where $\bar{q}_{P_i}$ is the (non-degenerate) quadratic form induced on $V/K_{P_i}$ by the form $q_{P_i}$, the first map is given by $\widehat{U} \mapsto \widehat{U} \cap (V/K_{P_i})$, and the second by $\bar{U} \mapsto \pi_i^{-1}(\bar{U})$. It is easy to see that both maps are isomorphisms, hence so is their composition, and therefore the map (A.1) is an isomorphism.

It remains to note that the natural map $\widehat{G}_r^+(X) \to C$ is smooth with connected fibers, hence its total space is connected, hence $G_r(X)$ is connected, and as it is smooth, it is integral. QED

We need to study the case $r = 2$, $n = 5$ in more detail. Let $f \colon C \to \mathbb{P}^1$ be the double covering constructed in Proposition A.1 and let $\mathcal{C}\ell_0$ be the sheaf of even parts of Clifford algebras over $\mathbb{P}^1$ associated with the pencil of quadrics. Recall from [K08, §3.5] that there is an Azumaya algebra $\mathcal{B}_0$ on $C$ such that

$$\mathcal{C}\ell_0 \cong f_*\mathcal{B}_0.$$

We denote by $\beta \in \mathrm{Br}(C)$ the Brauer class of $\mathcal{B}_0$.

**Proposition A.2.** *Let $k$ be a field of characteristic not equal to 2. If $n = 5$ the morphism $G_2(X) \to C$ constructed in Proposition A.1 is a 3-dimensional Severi–Brauer variety of class $\beta$.*

*Proof.* Since $\mathcal{B}_0$ is an Azumaya algebra of rank $2^{n-1} = 16$, there is a $\beta$-twisted locally free sheaf $\mathcal{S}$ on $C$ such that $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{H}om(\mathcal{S},\mathcal{S})$. Then up to line bundle twists the bundle $\widehat{\mathcal{V}}$ is isomorphic to $\wedge^2\mathcal{S}$ and $\wedge^2\mathcal{S}^\vee$, the corresponding quadric bundle is isomorphic to the relative Grassmannian $\mathrm{G}_C(2,\mathcal{S}) \cong \mathrm{G}_C(2,\mathcal{S}^\vee)$. and there is a standard canonical isomorphism

$$\widehat{G}_2(X) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}) \sqcup \mathbb{P}_C(\mathcal{S}^\vee).$$

Therefore, $G_r(X) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}^\vee)$. QED

Let $F_r(X) \subset \mathrm{G}(r+1,V)$ be the Hilbert scheme of linear spaces $\mathbb{P}^r$ (linearly embedding into $\mathbb{P}^n$) contained in $X$.

**Lemma A.3.** *Let $k$ be a field of characteristic not equal to 2. If $n \le 2r+1$ the scheme $F_r(X)$ is empty, and if $n \ge 2r+2$ it is smooth of expected dimension $(r+1)(n-2r-2)$.*

*Proof.* We may (and will) assume that $k$ is algebraically closed. Let $U \subset V$ be the vector subspace of dimension $r+1$ corresponding to a point $[U] \in F_r(X)$. Let $U^\perp \subset V^\vee$ be the kernel of the restriction map $V^\vee \to U^\vee$. If $n \le 2r$ then $\dim(U^\perp) = n - r < r+1 = \dim(U)$, and since each quadratic form in the pencil takes $U$ to $U^\perp \subset V^\vee$ (by the assumption $[U] \in F_r(X)$), it follows that every quadratic form is degenerate, hence $X$ is singular. On the other hand, if $n = 2r+1$ then the determinant of every quadratic form $q$ in the pencil is equal to the square of the determinant of $q|_U \colon U \to U^\perp$, hence the discriminant subscheme $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ is nonreduced, hence $X$ is also singular.

Now assume $n = 2r+2$ and let $[U] \in F_r(X)$. The tangent space to $F_r(X)$ at $[U]$ is $H^0(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X})$. Since the expected dimension of $F_r(X)$ is

$$\dim(\mathrm{G}(r+1,n+1)) - 2\,\mathrm{rank}(S^2\mathcal{U}^\vee) = (r+1)(r+2) - 2\tbinom{r+1}{2} = 0,$$

it is enough to show that $H^0(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}) = 0$. Consider the standard exact sequence

$$0 \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \to V/U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(2) \to 0 \tag{A.2}$$

(here the middle term is $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/\mathbb{P}(V)}$, and the right term is $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}(V)}|_{\mathbb{P}(U)}$). Since $X$ is smooth, $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}$ is a vector bundle of rank $r$, and (A.2) shows its determinant is $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(r-2)$, hence

$$\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \cong \wedge^{r-1}\mathcal{N}^\vee_{\mathbb{P}(U)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(r-2).$$

Dualizing (A.2), taking its $(r-1)$-st wedge power, and tensoring by $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(r-2)$, we obtain a long exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-r)^{\oplus r} \to U^\perp \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1-r)^{\oplus(r-1)} \to \dots \\ \to \wedge^{r-2}U^\perp \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-2)^{\oplus 2} \to \wedge^{r-1}U^\perp \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-1) \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \to 0 \end{aligned}$$

and since $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}^r$, we conclude that $H^\bullet(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}) = 0$.

Finally, assume $n > 2r + 2$ and let $[U] \in F_r(X)$. Let $V' \subset V$ be a general subspace of dimension $n' + 1$, where $n' = 2r + 2$ and $U \subset V'$. Then $X' = X \cap \mathbb{P}(V')$ is smooth by Bertini theorem, because by (A.2) the bundle $\mathcal{N}^\vee_{\mathbb{P}(U)/X}(1)$ is globally generated by the space $U^\perp$. Hence, $F_r(X')$ is smooth of expected dimension at $[U]$, and then it follows that the same is true for $F_r(X)$. QED

A.2. **Springer resolutions.** In this section we work over any field (even characteristic 2 is allowed) and we prove the following general result.

Let $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}^\vee$ be a morphism of vector bundles over a scheme $Z$ of ranks $r_\mathcal{E}$ and $r_\mathcal{F}$, respectively, and let $\varphi^\vee\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}^\vee$ be its dual morphism. Sometimes it is convenient to (uniformly) consider $\varphi$ and $\varphi^\vee$ as linear maps $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{O}_Z$. Let

$$D_r = \{\wedge^{r+1}\varphi = 0\} = \{\wedge^{r+1}\varphi^\vee = 0\} \subset Z$$

be the rank $r$ degeneracy locus of the morphism $\varphi$ (or, equivalently, of its dual $\varphi^\vee$), where $\wedge^{r+1}\varphi\colon\ \wedge^{r+1} \mathcal{E} \to \wedge^{i+1}\mathcal{F}^\vee$ and $\wedge^{r+1}\varphi^\vee\colon\ \wedge^{r+1} \mathcal{F} \to \wedge^{i+1}\mathcal{E}^\vee$ are the wedge powers of $\varphi$ and $\varphi^\vee$. Note that $D_r \subset Z$ is a closed subscheme and $D_{r-1} \subset D_r$ for each $r$.

For each closed point $z \in D_r$ let $\varphi_z\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z$ be the fiber of $\varphi$ at $z$, and let

$$K_{\mathcal{E},z} \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_z) \subset \mathcal{E}_z \qquad \text{and} \qquad K_{\mathcal{F},z} \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_z^\vee) \subset \mathcal{F}_z$$

be the kernels of $\varphi_z$ and $\varphi_z^\vee$ respectively. For any tangent vector to $Z$ at $z$, i.e., for an embedding $\tau\colon\ \operatorname{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \to Z$ that takes the closed point to $z$, consider the pullback $\tau^*\varphi\colon \tau^*\mathcal{E} \to \tau^*\mathcal{F}^\vee$. Trivializing the bundles $\tau^*\mathcal{E}$ and $\tau^*\mathcal{F}$, we can write $\tau^*\varphi$ as $\varphi_z + \varepsilon\varphi_\tau$, where $\varphi_\tau\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z^\vee$ is a linear map, which is well defined (i.e., does not depend on the choice of trivialization) modulo $\varphi_z$. Again, sometimes it is more convenient to consider $\varphi_\tau$ as a linear map $\mathcal{E}_z \otimes \mathcal{F}_z \to k(z)$ (to the residue field of the point $z$). In particular, the maps $\varphi_\tau|_{K_{\mathcal{E},z}}\colon K_{\mathcal{E},z} \to \mathcal{F}_z^\vee$ and $\varphi_\tau^\vee|_{K_{\mathcal{F},z}}\colon K_{\mathcal{F},z} \to \mathcal{E}_z^\vee$ are well defined.

We will say that $\varphi$ is $s$-regular at $z$ if for any $s$-dimensional subspace $U \subset K_{\mathcal{E},z}$ the morphism

$$T_zZ \to \operatorname{Hom}(K_{\mathcal{F},z}, \mathcal{E}_z^\vee) \to \operatorname{Hom}(K_{\mathcal{F},z}, U^\vee) = U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee, \quad \tau \mapsto \varphi_\tau|_{U \otimes K_{\mathcal{F},z}} \tag{A.3}$$

is surjective. We define $s$-regularity of $\varphi^\vee$ analogously.

*Remark* A.4. A morphism $\varphi$ is $(r_\mathcal{E} - r)$-regular at a geometric point $z \in D_r \setminus D_{r-1}$ if and only if its dual $\varphi^\vee$ is $(r_\mathcal{F} - r)$-regular at the point $z$. Indeed, both properties are equivalent to the surjectivity of the natural morphism $T_zZ \to K_{\mathcal{E},z}^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$.

Consider the relative Grassmannians

$$p_\mathcal{E}\colon \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \to Z \qquad \text{and} \qquad p_\mathcal{F}\colon \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{F} - r, \mathcal{F}) \to Z,$$

their tautological subbundles $\mathcal{U}_\mathcal{E} \subset p_\mathcal{E}^*\mathcal{E}$ and $\mathcal{U}_\mathcal{F} \subset p_\mathcal{F}^*\mathcal{F}$, and the subschemes

$$\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \subset \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \qquad \text{and} \qquad \widetilde{D}_{r,\mathcal{F}} \subset \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{F} - r, \mathcal{F})$$

defined as the zero loci of the composed maps

$$\mathcal{U}_\mathcal{E} \hookrightarrow p_\mathcal{E}^*\mathcal{E} \xrightarrow{p_\mathcal{E}^*\varphi} p_\mathcal{E}^*\mathcal{F}^\vee \qquad \text{and} \qquad \mathcal{U}_\mathcal{F} \hookrightarrow p_\mathcal{F}^*\mathcal{F} \xrightarrow{p_\mathcal{F}^*\varphi^\vee} p_\mathcal{F}^*\mathcal{E}^\vee.$$

We abusively call these schemes the Springer resolutions of $D_r$, even if they are not smooth.

**Proposition A.5.** *Let $k$ be a field. Let $Z$ be a smooth scheme and let $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}^\vee$ be a morphism of vector bundles over $Z$. The Springer resolution*

$$\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \subset \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E})$$

*is smooth over $k$ of expected codimension $(r_\mathcal{E} - r)r_\mathcal{F}$ if and only if the morphism $\varphi$ is $(r_\mathcal{E} - r)$-regular at every geometric point of $D_r$.*

*Moreover, if additionally we have $D_r \neq D_{r-1}$, the projection $p_\mathcal{E}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to Z$ induces a birational morphism $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ which is an isomorphism on the complement of $D_{r-1}$.*

*Proof.* We may (and will) assume that $k$ is algebraically closed.

Let $(z, U)$ be a point of $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}}$, i.e., $U \subset K_{\mathcal{E},z}$ is a subspace of dimension $r_\mathcal{E} - r$. Since the morphism $\varphi_z\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z^\vee$ vanishes on $U$, its rank is at most $r$, hence $z \in D_r$. This proves that the morphism $p_\mathcal{E}$ factors through $D_r$.

The differential $\mathrm{ds}_\mathcal{E}$ at the point $(z, U)$ of the section

$$\mathrm{s}_\mathcal{E} \in \Gamma(\mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - t, \mathcal{E}), \mathcal{U}_\mathcal{E}^\vee \otimes p_\mathcal{E}^* \mathcal{F}^\vee)$$

defining the subscheme $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}}$ is a morphism $T_{(z,U)}\mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}(U, \mathcal{F}_z^\vee)$. Consider the natural exact sequence

$$0 \to U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) \to T_{(z,U)}\mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \to T_z Z \to 0$$

(here the first term is the fiber of the relative tangent bundle of $\mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E})$ over $Z$). It is easy to see that the restriction of $\mathrm{ds}_\mathcal{E}$ to $U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U)$ is the map

$$U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) \to U^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$$

induced by the map $\mathrm{id}_{U^\vee} \otimes \varphi_z\colon U^\vee \otimes \mathcal{E}_z \to U^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$ (recall that $U \subset K_{\mathcal{E},z}$), hence its cokernel is $U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$. Furthermore, the morphism

$$T_z Z \to U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$$

induced by $\mathrm{ds}_\mathcal{E}$ coincides with the map (A.3), hence this morphism is surjective if and only if the morphism $\varphi$ is $(r_\mathcal{E} - r)$-regular at $z$. This proves the first part of the proposition.

Now assume $D_r \neq D_{r-1}$. The morphism $p_\mathcal{E}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ is étale over $D_r \setminus D_{r-1}$, because the restriction of $\mathrm{ds}_\mathcal{E}$ to the relative tangent space

$$U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) = K_{\mathcal{E},z}^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/K_{\mathcal{E},z})$$

is injective. Moreover, the morphism $p_\mathcal{E}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ is proper and it is injective over $D_r \setminus D_{r-1}$ because for any point $z \in D_r \setminus D_{r-1}$ the space $K_{\mathcal{E},z}$ has dimension exactly $r_\mathcal{E} - r$, hence the only subspace of dimension $r_\mathcal{E} - r$ that it contains is the space $U = K_{\mathcal{E},z}$. Therefore, the morphism $p_\mathcal{E}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ is an isomorphism over $D_r \setminus D_{r-1}$. QED

A.3. **Hilbert scheme of quadrics in $X$.** Let $S_r(X)$ be the Hilbert scheme of quadrics of dimension $r - 1$ inside $X$.

**Proposition A.6.** *Let $k$ be a field of characteristic not equal to 2. The Hilbert scheme $S_r(X)$ is smooth of expected dimension and birational to $G_r(X)$. Moreover, if $F_r(X) = \varnothing$ then $S_r(X) \cong G_r(X)$.*

*Proof.* Consider the Grassmannian $Z := \mathrm{G}(r+1,V)$, let $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}$ be its tautological bundle, and consider the morphism

$$\mathcal{E} := \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} S^2\mathcal{U}^\vee =: \mathcal{F}^\vee$$

induced by the pencil of quadrics. Note that the zero locus $D_0$ of $\varphi$ is precisely the Hilbert scheme $F_r(X)$. Let $D = D_1$ be the degeneracy locus of $\varphi$, so that we have the inclusions

$$F_r(X) = D_0 \subset D_1 \subset \mathrm{G}(r+1,V).$$

Consider the Springer resolutions of $D_1$ :

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathrm{G}(r+1,V) \quad \text{and} \quad \widetilde{D}_{1,\mathcal{F}} \subset \mathrm{G}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(r_{\mathcal{F}}-1, S^2\mathcal{U}) \cong \mathbb{P}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(S^2\mathcal{U}^\vee),$$

First, note that by definition $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}}$ is the zero locus of the global section of the vector bundle $\mathcal{O}(1) \boxtimes S^2\mathcal{U}^\vee$, induced by $\varphi$. Thus,

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}} \cong G_r(X). \tag{A.4}$$

On the other hand, note that $\mathbb{P}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(S^2\mathcal{U}^\vee)$ is the Hilbert scheme of $(r-1)$-dimensional quadrics in $\mathbb{P}(V)$, and its subscheme $\widetilde{D}_{1,\mathcal{F}}$ parameterizes those quadrics that lie on $X$, hence

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{F}} \cong S_r(X). \tag{A.5}$$

Now we check that both $\varphi$ and $\varphi^\vee$ satisfy the assumptions of Proposition A.5 for $r = 1$. Note that

$$r_{\mathcal{E}} - r = 2 - 1 = 1 \qquad \text{and} \qquad r_{\mathcal{F}} - r = \binom{r+1}{2} - 1 = \tfrac{r^2+3r}{2}.$$

Indeed, by Proposition A.1 and (A.4) the scheme $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}}$ it is smooth, hence by Proposition A.5 the morphism $\varphi$ is 1-regular at every geometric point of $D_1 \setminus D_0$, and by Remark A.4 it is $((r^2+3r)/2)$-regular at every geometric point of $D_1 \setminus D_0$. On the other hand, Lemma A.3 implies that the natural morphism

$$T_z Z = U^\vee \otimes (V/U) \to S^2U^\vee \oplus S^2U^\vee = \mathcal{E}_z^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$$

is surjective at every geometric point $z = [U]$ of $D_0 = F_r(X)$, hence the morphism $\varphi^\vee$ is also $((r^2+3r)/2)$-regular at every point of $D_0$. Applying Proposition A.5 again we conclude that $S_r(X) = \widetilde{D}_{1,\mathcal{F}}$ is smooth. We also see that the morphisms $G_r(X) \to D_1$ and $S_r(X) \to D_1$ are both birational, and they are isomorphisms over the complement of the subscheme $D_0 = F_r(X)$, hence $S_r(X)$ is birational to $G_r(X)$, and even isomorphic if $F_r(X) = \varnothing$. QED

*Remark* A.7. Let $SF_r(X) \subset S_r(X)$ be the subscheme of quadrics contained in $X$ together with their linear span. Then one can check that there is a diagram of birational maps

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}^1 \times F_r(X)}(G_r(X)) \arrow[r, equal] \arrow[dl] & \mathrm{Bl}_{SF_r(X)}(S_r(X)) \arrow[dr] & \\ G_r(X) & & & S_r(X), \end{tikzcd}$$

where the diagonal arrows are blowups, and that the induced birational map

$$S_r(X) \dashrightarrow G_r(X)$$

is a standard flip.

## Références


[AC17] C. Araujo et C. Casagrande, On the Fano variety of linear spaces contained in two odd-dimensional quadrics, Geometry & Topology **21** (2017) 3009-3041. 9

[ABB14] A. Auel, M. Bernardara, M Bolognesi, Fibrations in complete intersections of quadrics, Clifford algebras, derived categories, and rationality problems. J. Math. Pures Appl. (9) 102 (2014), no. 1, 249–291. 22, 23

[CT88] J.-L. Colliot-Thélène, *Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 88-89, Progr. Math., t. 91 (1990), 43–55. 2, 10

[CTCS] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. J. reine angew. Math. **320** (1980), 150–191. 15

[CTSaSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, et P. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I*, J. reine angew. Math. **373** (1987) 37-107. *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374**(1987), 72-168. 1, 2, 4, 7, 8, 10, 11, 22

[CoTs] D. F. Coray and M. A. Tsfasman, Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988) 25–87. 7

[CV] B. Creutz and B. Viray, Quadratic points on intersections of two quadrics, arXiv :2106.08560 [math.NT]. 2, 3, 8, 12, 13, 14, 15, 16

[DM] O. Debarre et L. Manivel, Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète, Math. Annalen **312** (1998) 549–574. 9

[FK] A. Fonarev and A. Kuznetsov, Derived categories of curves as components of Fano manifolds. J. Lond. Math. Soc. (2) 97 (2018), no. 1, 24–46. 25, 26

[Ha94] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin. Duke Math. J. 75 (1994), no. 1, 221–260. 1, 2, 10, 11

[HWW] Y. Harpaz, D. Wei and O. Wittenberg, Rational points on fibrations with few non-split fibres, prépublication, 2021. 11

[H] H. Hasse, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. **153** (1924), 113–130. 10

[HT] B. Hassett and Yu. Tschinkel, Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène. L'Enseignement mathématique **67** (2021), no. 1-2, 1-44. 23, 24

[HB] R. Heath-Brown, Zeros of pairs of quadratic forms, J. reine angew. Math. **739** (2018), 41–80. 2, 3, 10, 20, 21

[IP] J. Iyer and R. Parimala, Period-index problem for hyperelliptic curves, tapuscrit, Janvier 2022. 2, 17, 24

[K] B. Kahn, Formes quadratiques sur un corps, Cours spécialisés **15**, Société mathématique de France 2008. 3, 22

[K08] A. Kuznetsov, Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics. Adv. Math. 218 (2008), no. 5, 1340-1369. 27

[K11] A. Kuznetsov, Scheme of lines on a family of 2-dimensional quadrics : geometry and derived category. Math. Z. 276 (2014), no. 3–4, 655–672. 25

[Lam] T. -Y. Lam, The Algebraic Theory of Quadratic Forms, Benjamin/Cummings, 1973. 3

[Leep] D. Leep, The Amer–Brumer theorem over arbitrary fields, prépublication. 4

[L1] S. Lichtenbaum, The Period-Index Problem for Elliptic Curves, Am. J. Math. **90**, no. 4 (1968) 1209–1223. 11

[L2] S. Lichtenbaum, Duality Theorems for Curves over $p$-adic Fields, Invent. math. **7** (1969) 120–136. 11

[N75] P.E. Newstead, Rationality of moduli spaces of stable bundles, Math. Ann.**215** (1975), 251–268 9

[Reid] M. Reid. The complete intersection of two or more quadrics, Thesis, Trinity College, Cambridge, June 1972. 4, 6, 9, 22

[Sal88] P. Salberger, Zero-cycles on rational surfaces over number fields, Inventiones math. 91 (1988) 505–524. 2, 10

[Sal89] P. Salberger, Some new Hasse principles for conic bundle surfaces, in Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–1988, (1989) 283-305. 2, 10

[Sal93] P. Salberger, On the intersection of two quadrics containing a conic, unpublished typescript, Oct. 1993. 2, 3, 10, 11

[SalSk91] P. Salberger, A.N. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, Duke Math. J. **63** no. 2 (1991) 517–536. 2

[ZT] Zhiyu Tian, Hasse principle for three classes of varieties over global function fields. Duke Math. J. **166** (2017), no. 17, 3349–3424. 2

[XW] Xiaoheng Wang, Maximal linear spaces contained in the base loci of pencils of quadrics. Alg. Geom. **5** (3) (2018) 359–397. 9, 12, 16, 19, 22, 24

[W] O. Wittenberg, Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1, Springer LNM **1901** (2007). 2

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

*Email address*: jlct@math.u-psud.fr

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Laboratory of Algebraic Geometry, NRU HSE, Moscow, Russia

*Email address*: akuznet@mi-ras.ru