RETOUR SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INTERSECTIONS DE DEUX QUADRIQUES, AVEC UN APPENDICE PAR A. KUZNETSOV

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. Soit k un corps p-adique. On montre que toute intersection de deux quadriques dans l'espace projectif $\mathbb{P}^4_k$ contient un point sur une extension quadratique, ce qui généralise un résultat de Creutz et Viray pour le cas lisse. La preuve utilise un théorème de Lichtenbaum sur les courbes de genre 1 sur un corps p-adique. On déduit de ce résultat que toute intersection lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^5_k$ sur un corps de nombres k possède un point sur une extension quadratique. On déduit aussi de ce résultat une démonstration relativement courte d'un théorème de Heath-Brown : le principe de Hasse vaut pour les intersections complètes lisses $X \subset \mathbb{P}^7_k$ de deux quadriques sur un corps de nombres. On donne aussi une démonstration alternative d'un principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$, dû à Iyer et Parimala.

Lichtenbaum proved that index and period coincide for a curve of genus one over a p-adic field. Salberger proved that the Hasse principle holds for a smooth complete intersection of two quadrics $X \subset \mathbb{P}^n$ over a number field, if $n \geq 5$ and X contains a conic. Building upon these two results, we extend recent results of Creutz and Viray (2021) on the existence of a quadratic point on intersections of two quadrics over p-adic fields and over number fields. We then recover Heath-Brown's theorem (2018) that the Hasse principle holds for smooth complete intersections of two quadrics in $\mathbb{P}^7$. We also give an alternate proof of a theorem of Iyer and Parimala (2022) on the local-global principle in the case $n = 5$.

1. Introduction

1.1. **Le contexte.** Une conjecture générale [CTSk21, Conjecture 14.1.2] postule que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour les points rationnels des variétés projectives, lisses, géométriquement rationnellement connexes sur un corps de nombres k. Cette conjecture fut faite par Sansuc et moi [CTSa80] dans le cas des surfaces géométriquement rationnelles, et formulée en dimension supérieure par moi en 2000. Lorsque la variété X satisfait de plus que le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k))$ du groupe de Brauer de X par l'image du groupe de Brauer du corps de base est nul, la conjecture dit que le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de X : si la variété X a des points dans tous les complétés k_v de k, alors X a un point rationnel. On renvoie le lecteur au rapport de Wittenberg [Wi15] et à [CTSk21, Chap. 14] pour une description récente des recherches dans ce domaine.

Date: 28 novembre 2023 : J. reine angew. Math. DOI 10.1515/crelle-2023-0081.

Soit désormais $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une *intersection complète lisse de deux quadriques*. Pour $n \geq 4$, c'est une variété géométriquement rationnelle [CTSaSD87, Prop. 2.2], a fortori est-elle géométriquement rationnellement connexe. Pour $n \geq 5$, on a de plus $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) = 0$. On sait montrer [Ha94, Thm. 4.2.1, Prop. 5.2.3] que si la conjecture générale vaut pour un entier $m \geq 4$ et toute $X \subset \mathbb{P}^m_k$, alors elle vaut pour tout $n \geq m$ et toute telle $X \subset \mathbb{P}^n_k$. Pour $m \geq 5$, ceci dit simplement que si le principe de Hasse vaut pour toute $X \subset \mathbb{P}^m_k$ avec un $m \geq 5$, alors il vaut pour toute $X \subset \mathbb{P}^n_k$ pour tout $n \geq m$.

En 1987, l'article [CTSaSD87] a établi la conjecture générale pour $n \geq 4$ sous l'hypothèse que X contient un couple de droites conjuguées, et pour $n \geq 8$ a établi le principe de Hasse pour toute $X \subset \mathbb{P}^n_k$.

En 1988 et 1989, on montra, par deux méthodes distinctes [CT88, Sal88, Sal89, SalSk91], que la conjecture générale vaut pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$ contenant une conique, ou, en d'autres termes, pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$ admettant une fibration en coniques sur la droite projective.

En 1993, Salberger a établi la conjecture générale pour $n \geq 5$, lorsque X contient une conique [Sal93] [Ha94, Prop. 5.2.6].

En 2006, O. Wittenberg [Wi07] a montré comment sous la combinaison de deux conjectures classiques mais pour l'instant hors d'atteinte, à savoir la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques et la conjecture de Schinzel, le principe de Hasse vaut pour $X \subset \mathbb{P}^n_k$ et $n \geq 5$.

En 2017, dans le cas analogue d'un corps global k de caractéristique $p > 2$, par des méthodes géométriques, Zhiyu Tian [ZT17] a établi le principe de Hasse pour $n \geq 5$.

En 2018, R. Heath-Brown [HB18] a établi le principe de Hasse pour $n = 7$ sur un corps de nombres. Par rapport à [CTSaSD87], le point nouveau essentiel dans son travail est la démonstration que, sur un corps p-adique, toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^7_k$ qui contient un point rationnel contient une conique.

Le présent article a été suscité par le travail de Heath-Brown et par deux articles récents.

D'une part B. Creutz et B. Viray [CV21] ont étudié l'existence de points quadratiques sur $X \subset \mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 4$ et k local ou global. Sur un corps local, ils montrent qu'il existe un point fermé de degré au plus 2. Sur un corps global, ils montrent que le pgcd des degrés des points fermés (l'indice de X) divise 2.

D'autre part J. Iyer et R. Parimala [IP22] ont établi un cas particulier de la conjecture pour $X \subset \mathbb{P}^5_k$ (théorème 1.3 ci-dessous).

Ces travaux amènent à s'interroger à nouveau sur les intersections de deux quadriques lisses $X \subset \mathbb{P}^n_k$ définies sur un corps local ou sur un corps global, sur l'existence de droites définies sur le corps de base ou sur une extension quadratique, et sur l'existence de coniques, dans le but d'utiliser ces courbes pour établir le principe de Hasse pour les points rationnels dans le cas global.

1.2. **Principaux résultats.** Le résultat principal de l'article est une démonstration nous semble-t-il conceptuelle des deux théorèmes suivants dus à Heath-Brown [HB18, Thm. 1, Thm. 2].

Théorème 1.1. *Soient k un corps p-adique et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques possédant un point rationnel. Dans le pinceau des formes* *quadratiques s'annulant sur X, il existe des formes de rang 8 qui contiennent trois hyperboliques, i.e. qui s'annulent sur un espace linéaire $\mathbb{P}^2_k \subset \mathbb{P}^7_k$.*

Théorème 1.2. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Le principe de Hasse vaut pour X : si X a des points rationnels dans tous les complétés k_v de k, alors X a des points rationnels.*

Un théorème général sur les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 5$ qui possèdent un point rationnel [CTSaSD87, Thm. 3.11] donne alors l'approximation faible pour X, que nous ne discutons donc pas dans le présent article.

Nous donnons par ailleurs une démonstration originale d'un théorème récent d'Iyer et Parimala :

Théorème 1.3. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par un système $f = 0, g = 0$. Supposons que la courbe C d'équation $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$ a un point de degré impair, ce qui est le cas par exemple s'il existe une forme de rang 5 dans le pinceau. Si, pour chaque place v, la variété X contient une k_v-droite, alors X a un point rationnel.*

C'est le théorème 5.5 (voir aussi le théorème 5.12).

Nous obtenons aussi les résultats suivants.

Théorème 1.4. *Sur un corps p-adique k, sur toute intersection X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, il existe un point dans une extension quadratique de k.*

C'est le théorème 3.9. Ceci généralise le théorème [CV21, Thm. 1.2 (1)] obtenu par Creutz et Viray dans le cas lisse.

Théorème 1.5. *Sur un corps de nombres, toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ pour $n \geq 5$ possède un point quadratique.*

C'est le théorème 5.2. Ceci donne une démonstration inconditionnelle du théorème conditionnel [CV21, Thm. 1.2 (4)].

Dans la perspective de recherches ultérieures, on a systématiquement enregistré un certain nombre de résultats généraux sur les sous-espaces linéaires des intersections de deux quadriques, et sur les sous-espaces linéaires contenus dans les quadriques contenant ces variétés, sur divers corps de base (finis, locaux, globaux).

1.3. **Structure de l'article.** Au §2, on fait un certain nombre de rappels sur l'algèbre, la géométrie et l'arithmétique des intersections complètes lisses de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$.

On donne de nombreux rappels sur la géométrie des espaces linéaires contenus dans une intersection complète lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$, et sur la géométrie des variétés paramétrant un espace linéaire contenu dans une quadrique contenant X.

On rappelle un théorème local-global de Salberger [Sal93] sur les intersections de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$ qui contiennent une conique (théorème 2.21 ci-dessous). Ce théorème joue ici un rôle fondamental dans la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3.

Au §3, on se place sur un corps p-adique k et on s'intéresse à l'existence d'un point au plus quadratique sur une intersection de deux quadriques. On commence par le cas crucial des courbes $X \subset \mathbb{P}^3_k$ (donc des courbes de genre 1 dans le cas lisse). En utilisant des résultats de Roquette et Lichtenbaum [Li68, Li69] qui reposent sur le théorème de dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique, on établit :

Proposition 1.6. *Soient $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3)$ deux formes quadratiques sur un corps p-adique. La k-variété $X \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $f = g = 0$ possède un point dans une extension quadratique de k.*

C'est la proposition 3.5.

On revient sur des résultats de Creutz et Viray. Ceux-ci ont montré [CV21, Thm. 1.2 (1)] que sur tout corps p-adique k toute intersection complète *lisse* X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, possède un point dans une extension quadratique. On établit et généralise ce résultat aux intersections quelconques. C'est le théorème 3.9, qui résulte facilement de la proposition 3.5 dans le cas $n = 3$. Cette méthode permet d'éviter les délicats calculs locaux, en particulier 2-adiques, de [CV21, §2, Proof of Thm. 2.1] et de l'article [HB18].

Le théorème de Lichtenbaum était mentionné dans dans [CV21, Prop. 4.5], pour une démonstration alternative d'un énoncé un peu plus faible dans le cas $n = 4$.

La proposition 1.6 forme la base de notre méthode pour établir, au §7, le théorème local de Heath-Brown (théorème 1.1) dans $\mathbb{P}^7_k$.

Dans les paragraphes suivants, pour $4 \leq n \leq 7$, pour k fini, local, global, et X intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ donnée par un système $f = g = 0$, on étudie systématiquement la dimension des sous-espaces linéaires $\mathbb{P}^r_k \subset \mathbb{P}^n_k$ sur lesquels une forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau de quadriques contenant X peut s'annuler. On étudie l'existence de points quadratiques, de droites, de coniques sur $X \subset \mathbb{P}^n_k$.

Au §4, on s'intéresse à $X \subset \mathbb{P}^4$. On montre que, sur un corps de nombres, si X possède des points dans tous les complétés, alors l'indice de la surface X divise 2. C'est un cas particulier d'un résultat de [CV21].

Au §5, on discute le cas $X \subset \mathbb{P}^5_k$, sous plusieurs angles. On établit le théorème 1.5. La démonstration repose sur le fait que pour toute X, la variété $F_1(X)$ des droites contenues dans X est connue, et qu'en particulier c'est une variété géométriquement intègre, donc qui sur un corps de nombres possède des points dans presque tous les complétés de k. En utilisant le théorème 2.21 (Salberger), on donne une démonstration du théorème 1.3 de Iyer et Parimala. La seconde partie du §5 se place du point de vue géométrique de la variété $G_2(X)$ des 2-plans contenus dans une quadrique du pinceau. On apporte des compléments à un article de Hassett et Tschinkel [HT21], sur un corps quelconque, par exemple le théorème 5.10. Sur un corps de nombres, cela donne une autre démonstration du théorème 1.3 de Iyer et Parimala, reposant elle aussi sur le théorème 2.21.

Dans le bref §6, on considère le cas $X \subset \mathbb{P}^6_k$, sur lequel on n'a aucun résultat global significatif autre que ceux obtenus dans [CTSaSD87].

Au §7, on donne *une démonstration relativement courte des théorèmes 1.1 et 1.2 de Heath-Brown* [HB18, Thm. 1, Thm. 2] *pour X lisse dans* $\mathbb{P}^7_k$. Notre démonstration du théorème local 1.1 repose sur un argument géométrique simple portant sur la géométrie de l'intersection de $X \subset \mathbb{P}^7_k$ avec son espace tangent en un point rationnel, et sur notre généralisation du théorème de Creutz et Viray sur les points quadratiques sur un corps local dans le cas d'une intersection quelconque de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$, laquelle repose ultimement sur la proposition 1.6. Notre passage du théorème local 1.1 au théorème local-global 1.2 repose sur le Théorème 2.21 (Salberger), qui n'était pas utilisé dans [HB18].

Dans l'appendice, Alexander Kuznetsov établit des propriétés géométriques des schémas de Hilbert paramétrant les espaces linéaires et les quadriques contenus dans une intersection complète lisse de deux quadriques, telles qu'affirmées au §2.

1.4. **Notation.** Étant donné un corps k, on note k^s une clôture séparable et $\overline{k}$ une clôture algébrique. On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k^s/k)$ le groupe de Galois absolu. Pour une k-variété algébrique X, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

Pour X une variété algébrique sur un corps k et L/k une extension de corps, on note $X(L)$ l'ensemble des points de X à valeurs dans L.

Un corps k est dit fertile si pour toute k-variété lisse intègre X sur k, de dimension au moins 1, l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ implique $X(k)$ Zariski dense. Un corps p-adique est fertile. Le corps des réels est fertile. Soit p un nombre premier. Tout corps dont le groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe est fertile. Cette notion est particulièrement intéressante pour les intersections de deux quadriques : voir la remarque suivant la proposition 2.4.

Pour k un corps de nombres, et v une place de k, on note k_v le complété. On note $\mathbb{A}_k$ l'anneau des adèles de k. Pour X une k-variété, on note $X(\mathbb{A}_k)$ l'ensemble de ses points adéliques et on note $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)$ l'ensemble de Brauer–Manin de X [CTSk21, Chapter 13.3].

On suppose le lecteur familier avec la théorie algébrique des formes quadratiques [Lam73, Lam05, Ka08]. Soit $r \geq 1$ un entier. Une forme quadratique non dégénérée sur un corps k ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) est dite contenir rH si elle contient en facteur direct orthogonal la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $H =< 1, -1 >$.

Soit $n \geq 2$. Une quadrique $C \subset \mathbb{P}^n_k$ de dimension $r-1$ est par définition une sous-variété d'un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k \subset \mathbb{P}^n_k$ définie par l'annulation d'un polynôme homogène de degré 2 dans $\mathbb{P}^r_k$.

2. Rappels et préliminaires

2.1. **Quelques énoncés connus.**

Proposition 2.1. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $q(x_0, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$ une forme quadratique non dégénérée sur k. Soit $Q \subset \mathbb{P}^n_k$ la quadrique qu'elle définit. Pour un entier $r \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La forme q contient $(r+1)H$.

(ii) Il existe un $\mathbb{P}^r_k$ contenu dans Q.

La proposition suivante remonte à F. Châtelet (1948). Voir aussi [Lam05, Chap. XII, §2, Thm. 2.1], [CTSk93, Thm. 2.5], [Ka08, Prop. 8.1.10].

Proposition 2.2. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit q une forme quadratique non dégénérée en 4 variables. Soit d son déterminant. La forme quadratique q a un zéro non trivial si et seulement si elle a un zéro non trivial sur le corps $k(\sqrt{d})$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où d n'est pas un carré. Soit $K = k(\sqrt{d})$. On peut supposer la forme donnée sous la forme $q =< 1, -a, -b, abd >$ et que la forme $< 1, -a, -b, ab >$ sur K a un zéro non trivial, donc est hyperbolique. La quadrique $Q \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $q = 0$ vérifie alors $Q_K \simeq \mathbb{P}^1_K \times_K \mathbb{P}^1_K$, les deux systèmes de génératrices sur K étant permutées par l'action de $Gal(K/k)$. Si $L \subset Q_K$ est une génératrice d'un certain type, la conjuguée L' sous l'action de $Gal(K/k)$ est une génératrice de l'autre type. Alors l'intersection de L et L' est un K-point invariant sous $Gal(K/k)$, donc Q possède un k-point. $\square$

Le cas $r = 0$ du théorème suivant fut établi indépendamment par A. Brumer.

Proposition 2.3. *(Amer)* [Leep] *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection quelconque de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques f et g. Soit $r \geq 0$ un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe un espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$ contenu dans X.

(b) La forme quadratique générique $f+tg$ sur le corps $k(t)$ s'annule sur un espace linéaire $\mathbb{P}^r_{k(t)}$.

Si la forme quadratique générique $f+tg$ sur le corps $k(t)$ est non dégénérée, par exemple si X est une intersection complète lisse, ces conditions sont encore équivalentes à :

(c) La forme quadratique $f+tg$ contient $(r+1)H$.

En combinant avec le théorème bien connu de T. A. Springer sur les formes quadratiques, ceci donne :

Proposition 2.4. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit K/k une extension finie de corps de degré impair. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques f et g. Si les conditions (a) ou (b) de la proposition 2.3 valent après extension de k à K, alors elles valent sur k.*

Une conséquence de ce résultat est que, pour établir une telle propriété pour un X sur k donné, on peut supposer le corps k fertile. Il suffit en effet d'établir le résultat sur la perfection E de k, puis sur le corps fixe d'un pro-2-Sylow du groupe de Galois absolu de E.

Proposition 2.5. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection quelconque de deux quadriques, définie par un système $f = g = 0$ de deux formes quadratiques.*

(a) Si k est algébriquement clos, et $n \geq 2r+2$, il existe un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$ de $\mathbb{P}^n_k$ contenu dans X.

(b) Si k est fini, et $n \geq 2r+4$,il existe un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^r_k$ de $\mathbb{P}^n_k$ contenu dans X.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 2.3 et du fait que le corps $k(t)$ est un corps C_1 dans le cas (a) et un corps C_2 dans le cas (b). $\square$

Pour une intersection quelconque de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$ avec $n \geq 2r+2$, la variété $F_r(X)$ est non vide. Soit en effet $f = g = 0$ un système de formes quadratiques définissant $X \subset \mathbb{P}^n$. D'après la proposition 2.3, pour voir que $F_r(X)(k)$ est non vide pour k algébriquement clos, il suffit de voir que la forme quadratique $f+tg$ s'annule sur un espace linéaire $\mathbb{P}^r_{k(t)} \subset \mathbb{P}^n_{k(t)}$. Ceci résulte du fait que le corps $k(t)$ est un corps C_1.

Proposition 2.6. [Reid72, Prop. 2.1] *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soient $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 2$, une intersection complète de deux quadriques définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f(x_0, \ldots, x_n)$ et $g(x_0, \ldots, x_n)$. La k-variété est lisse si et* *seulement si le polynôme homogène* $\det(\lambda f+\mu g)$ *est non nul et est séparable, i.e. a toutes ses racines simples dans* $\overline{k}$.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k, n \geq 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit $P \in X(k)$. On peut supposer X donnée par un système $f = x_0x_1 + q_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $g = x_0x_2 + q_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$, Le point P étant donné par $(1, 0, \ldots, 0)$ et l'espace tangent T_P à X en P étant donné par $x_1 = x_2 = 0$. Soit $H \subset \mathbb{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension $n-3$ donné par $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Soit $Y \subset H \simeq \mathbb{P}^{n-3}$ l'intersection de deux quadriques donnée par le système

$$q_1(0, 0, x_3, \ldots, x_n) = q_2(0, 0, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

Proposition 2.7. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Avec les notations ci-dessus, l'intersection $X \cap T_P \subset \mathbb{P}^n_k$ est le cône de sommet P sur Y. Les droites de $X \subset \mathbb{P}^n_k$ qui passent par P sont les génératrices de ce cône.*

Démonstration. Voir [CTSaSD87, §3, Proof of Thm. 3.2]. □

2.2. **Quelques lemmes préparatoires.**

Proposition 2.8. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$, une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par un sytème $f = g = 0$. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Pour $n = 3$, supposons k fertile. Alors il existe une forme non dégénérée $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire qui contient $2H$, et l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ avec cette propriété est Zariski dense dans $\mathbb{P}^1_k$.*

Démonstration. Il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset X \times_k X$ tel que, pour tout couple de points géométriques $(A, B) \in U$, on ait $A \neq B$ et la droite AB n'est pas contenue dans X. Ce dernier point est clair, car pour tout point géométrique $A \in X$ il existe un point géométrique B de X tel que la droite AB ne soit pas contenue dans X, sinon X serait un cône de sommet A. On dispose alors d'un k-morphisme $\varphi : U \to \mathbb{P}^1_k$ envoyant $(A, B) \in U$ sur le paramètre (λ, μ) de l'unique quadrique du pinceau contenant la droite AB. Pour $n \geq 4$ et $X(k) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(k)$ est Zariski dense dans X, car X est k-unirationnelle [CTSaSD87, Prop. 2.3]. Pour $n = 3$ et k fertile, $X(k) \neq \emptyset$ implique $X(k)$ Zariski dense dans X. On voit alors que $U(k)$ est Zariski dense dans U, et donc son image par φ dans $\mathbb{P}^1(k)$ est Zariski dense. Comme l'ensemble des points $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$ tels que la forme quadratique $\lambda f + \mu g$ est singulière est fini, ceci établit la proposition. □

Proposition 2.9. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$. Supposons $n \geq 4$, ou $n \geq 3$ et le corps k fertile, par exemple p-adique. Il y a équivalence entre :*

(a) Il existe un point de degré au plus 2 sur X.

(b) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$.

(c) Il existe une forme non dégénérée $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un $\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire qui contient $2H$.

L'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant cette propriété est vide ou Zariski dense dans $\mathbb{P}^1_k$.

Démonstration. Que (c) implique (b) qui implique (a) est clair. Montrons que (a) implique (c). Si $X(k) \neq \emptyset$, il suffit d'appliquer la proposition 2.8. Soit K/k une extension quadratique de corps, avec $X(K) \neq \emptyset$. Dans la démonstration de la proposition 2.8, on peut remplacer $X \times_k X$ par $R_{K/k}(X_K)$. On obtient un ouvert

$U \subset R_{K/k}(X_K)$ et un k-morphisme $\varphi : U \to \mathbb{P}^1_k$. La k-variété lisse $R_{K/k}(X_K)$ contient un k-point. Pour $n \geq 3$ et k fertile, cela conclut la démonstration. Pour $n \geq 4$, l'intersection lisse de deux quadriques X_K contient un K-point, donc est K-unirationnelle. Ceci implique que la k-variété $R_{K/k}(X_K)$ est k-unirationnelle, et on conclut comme dans la démonstration de la proposition 2.8. □

Lemme 2.10. *Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$. Soit $n \geq 3$ un entier. Soient f et g deux formes quadratiques sur k en $n+1$ variables, et soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ la variété définie par $f = g = 0$. Si X ne possède pas de point dans une extension de degré 1 ou 2 de k, alors :*

(i) La k-variété X est non conique et purement de codimension 2 dans $\mathbb{P}^n_k$.

(ii) Le polynôme $det(\lambda f + \mu g)$ est non nul.

(iii) Toute forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau sur k est de rang au moins 3.

(iv) Si $n \geq 4$, la k-variété X est géométriquement intègre.

(v) Si $n = 3$ et X n'est pas une courbe lisse géométriquement intègre, alors $\overline{X}$ est la réunion de 4 droites transitivement permutées par l'action du groupe de Galois, l'ensemble des 4 droites formant un cycle. De plus dans ce cas il n'existe pas de forme de rang 3 dans le pinceau sur $\overline{k}$.

Démonstration. Si X est conique, le sommet du cône est un espace linéaire défini sur k.

Si f et g ont un facteur commun, on peut le supposer défini sur k, il est de degré 1 ou 2, donc X possède un point dans une extension K/k avec $[K : k] \leq 2$.

Supposons désormais f et g sans facteur commun. Alors $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est purement de codimension 2 [CTSaSD87, Lemma 1.1].

Si le polynôme homogène $det(\lambda f + \mu g)$ s'annule identiquement, alors X possède un point singulier rationnel [CTSaSD87, Lemma 1.14].

S'il existe une forme de rang au plus 2 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, elle s'annule sur un espace linéaire $\mathbb{P}^{n-2}_k \subset \mathbb{P}^n_k$, et X contient la trace de toute autre forme du pinceau, donc une quadrique de dimension $n - 3 \geq 0$, donc un point dans une extension au plus quadratique de k.

On est ramené à étudier le cas où f et g n'ont pas de facteur commun, où il existe une forme de rang $n+1$ dans le pinceau, et où toute forme non nulle dans le pinceau est de rang au moins 3.

Pour $n \geq 4$, [CTSaSD87, Lemma 1.11] assure que la k-variété X est géométriquement intègre.

Soit $n = 3$. Si la courbe X est singulière mais géométriquement intègre, comme c'est une courbe de genre arithmétique 1, elle possède exactement un point singulier, qui est donc rationnel. Supposons $\overline{X}$ non intègre. Si X contient une droite définie sur k ou une extension quadratique de k, ou si X contient une conique lisse, l'énoncé est clair. En combinant [CTSaSD87, Lemmas 1.7, 1.10] et le fait que toute forme dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ sur k est de rang au moins 3, on voit qu'on est réduit au cas où $\overline{X}$ est l'union de 4 droites distinctes transitivement permutées par l'action du groupe de Galois. Soit $Q \subset \mathbb{P}^3_k$ une quadrique lisse définie par une forme du pinceau. On a $\mathrm{Pic}(\overline{Q}) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$, les classes e_1 et e_2 sont permutées par l'action du groupe de Galois, deux droites sont dans la classe e_1, deux dans la classe e_2. Chaque droite rencontre exactement deux autres des 4 droites. S'il existe une forme de rang exactement 3 dans le pinceau sur $\overline{k}$, alors les 4 droites sont contenues dans un cône sur une conique lisse. Toute droite de $\mathbb{P}^3$ contenue dans ce cône est une génératrice, i.e. passe par le sommet du cône. Mais alors les 4 droites sont concourantes, contradiction. □

Proposition 2.11. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète de deux quadriques, géométriquement intègre et non conique. Si X est singulière, alors soit il existe une extension K/k de degré $[K : k] \leq 2$ telle que X_K est K-birationnelle à $\mathbb{P}^2_K$, soit X est k-birationnelle à une surface $R_{K/k}(C)$ pour K/k une extension quadratique de corps et C une conique lisse sur K.*

Démonstration. Si $C \subset X$ est une courbe (non nécessairement géométriquement intègre) contenue dans le lieu singulier de X, alors C est une droite $\mathbb{P}^1_k \subset \mathbb{P}^4_k$ [CTSaSD87, Lemma 3.15.1]. Dans ce cas, X est k-birationnelle au produit d'un espace projectif et d'une quadrique lisse de dimension au moins 1 [CTSaSD87, Prop. 2.2]. On peut donc supposer que les singularités de X sont isolées. Ces singularités sont discutées par Coray et Tsfasman, en particulier du point de vue de l'action du groupe de Galois. Notons qu'une surface dite d'Iskovkikh devient K-rationnelle sur l'extension quadratique K/k sur laquelle sont définis ses points doubles. Il ressort de [CoTs88, §6, 7] en particulier de [CoTs88, Lemma 7.4] que, sauf peut-être dans le cas où X possède 4 points singuliers de type $4A_1$, il existe une extension K/k au plus quadratique telle que X_K soit k-birationnelle à $\mathbb{P}^2_K$. Dans le cas $4A_1$, la surface est k-birationnelle à une surface de del Pezzo de degré 8, c'est-à-dire à une variété $R_{K/k}(C)$ pour K/k extension quadratique séparable et C conique lisse sur K. □

Remarque 2.12. Pour k p-adique, on peut éliminer le cas où X est k-birationnelle à $Y = R_{K/k}(C)$, avec C/K conique lisse sur un corps extension quadratique de k. Comme k est un corps p-adique, il existe une extension quadratique L/k de corps telle que $K \otimes L/K$ soit une extension quadratique de corps KL/K. On a $R_{K/k}(C)(L) = C(K \otimes_k L) = C(KL)$. Mais toute conique sur un corps p-adique acquiert un point rationnel dans toute extension de corps quadratique. Donc $C(KL) \neq \emptyset$ et $R_{K/k}(C)$ possède un point dans L, donc est L-birationnel à $\mathbb{P}^2_L$, et les points L-rationnels sont denses sur X_L.

Remarque 2.13. Il y a une certaine analogie entre la proposition 2.11 et la première démonstration de [CV21, Thm. 2.1], qui repose sur une discussion des dégénérescences possibles d'une surface de del Pezzo de degré 4.

2.3. **Géométrie des variétés d'espaces linéaires.**

Proposition 2.14. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit $F_r(X)$ la variété des espaces linéaires de dimension r contenus dans X.*

(a) Si l'on a $n \leq 2r+1$, alors $F_r(X)$ est vide. Si l'on a $n \geq 2r+2$, alors $F_r(X)$ est non vide, projectif et lisse, de dimension $(r+1)(n-2r-2)$, géométriquement connexe si $n > 2r+2$.

(b) Pour $n = 5$, la variété $F_1(X)$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 2.

(c) Pour $n = 6$, la variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 4, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 8.

(d) Pour $n = 7$, la variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 6, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 1.

(e) Pour $n = 7$, la variété $F_2(X)$ est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 3.

(f) Soit $n \geq 5$. Soit $Z \subset X \times_k F_1(X)$ la variété d'incidence des couples (x, L) formée d'un point de X et d'une droite $L \subset X$ avec $x \in L$. La projection $Z \to F_1(X)$ est un fibré projectif en $\mathbb{P}^1$ localement trivial. La k-variété Z est lisse et géométriquement connexe, de dimension $2n-7$. Pour $n \geq 5$, les fibres générales géométriques de la projection $Z \to X$ sont des intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$. Pour $n \geq 6$, ces fibres sont géométriquement connexes.

Démonstration. Pour établir ces énoncés, on peut supposer le corps k algébriquement clos.

Voici des références pour les divers résultats ci-dessus, et des précisions sur les cas où les résultats sont disponibles en caractéristique positive.

L'énoncé (a), sous la seule hypothèse $\mathrm{car}(k) \neq 2$, est établi par A. Kuznetsov dans l'appendice. Voir les Lemmes A.3 et A.4. Le fait que $F_r(X)$ est non vide pour $n \geq 2r + 2$ vaut pour toute intersection de deux quadriques (Proposition 2.5).

Xiaoheng Wang [XW18] étudie les propriétés des variétés d'espaces linéaires de dimension maximale contenus dans une intersection complète lisse X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$ et tout corps k avec $\mathrm{car.}(k) \neq 2$. Pour X de dimension impaire sur un tel corps, il montre que cette variété est un espace principal homogène d'une variété abélienne. Ceci vaut en particulier pour $F_1(X)$ et $n = 5$ et pour $F_2(X)$ et $n = 7$, c'est-à-dire les énoncés (b) et (e).

En caractéristique zéro, Araujo-Casagrande [AC17] étudient la variété des espaces linéaires de dimension $m-1$ contenus dans une intersection complète lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^{2m+2}$ pour $m \geq 2$. C'est une variété projective, lisse, géométriquement connexe de dimension $2m$. C'est une variété de Fano qui est géométriquement rationnelle. Pour $m = 1$, il s'agit des surfaces de del Pezzo de degré 4. Le cas qui nous intéresse ici est $m = 2$, c'est-à-dire la variété $F_1(X)$ pour $X \subset \mathbb{P}^6$. Le groupe de Picard géométrique dans ce cas est $\mathbb{Z}^8$. Ceci donne l'énoncé (c).

En caractéristique zéro, la variété $F_1(X)$ des $\mathbb{P}^1$ dans $X \subset \mathbb{P}^7$ est une variété projective, lisse, géométriquement connexe, de Fano [DM98, Rem. 3.2, Rem. 3.6.1], géométriquement rationnelle [N75] [DM98, Rem. 7.3], et le groupe de Picard géométrique est $\mathbb{Z}$ [DM98, Cor. 3.5]. Ceci donne l'énoncé (d).

Établissons le point (f). L'espace total Z est lisse de dimension $2n-7$. Pour $n \geq 5$, par tout point de X il passe une droite, le morphisme propre $q : Z \to X$ est donc dominant, la fibre générique de q est de dimension $n-5$. Comme le corps k est de caractéristique zéro, la fibre générique de q est lisse. Pour tout point de X, d'après la proposition 2.7, la fibre est une intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$. Ainsi la fibre générique de $Z \to X$ est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-3}$, elle est donc géométriquement intègre si l'on a $n \geq 6$. Il en est donc de même des fibres en tout point schématique d'un ouvert de Zariski non vide de X. □

Remarque 2.15. Sur un corps k avec $\mathrm{car}(k) = 0$, Debarre-Manivel [DM98] étudient les variétés des sous-espaces linéaires des intersections complètes *générales*. Certains de leurs résultats valent en caractéristique positive.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par un système $f = g = 0$. Soit $G_r(X) \subset \mathrm{Gr}(r, n) \times \mathbb{P}^1_k$ la sous-variété formée des couples

(L,m) avec $L \subset \mathbb{P}^n$ espace linéaire de dimension r contenu dans la quadrique $\lambda f + \mu g = 0$, où $m = (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1_k$. Soit $S_r(X)$ le schéma de Hilbert des quadriques de dimension $r-1$ contenues dans X.

La proposition suivante rassemble des résultats établis par A. Kuznetsov dans l'appendice.

Proposition 2.16. *Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Supposons $2r+1 \leq n$. Avec les notations ci-desssus :*

(1) La variété $G_r(X)$ est lisse et géométriquement connexe, et le morphisme $G_r(X) \to \mathbb{P}^1_k$ dominant.

(2) La variété $S_r(X)$ des quadriques de dimension $r-1$ contenues dans X est lisse et géométriquement connexe. La sous-variété des quadriques non lisses est un fermé propre de $S_r(X)$.

(3) À un espace linéaire $L \simeq \mathbb{P}^r_k$ contenu dans une quadrique du pinceau et non contenu dans X, on associe $X \cap L$. Inversement, étant donnée une quadrique (généralisée) de dimension $r-1$ contenue dans X, engendrant un espace linéaire L de dimension r non contenu dans X, on lui associe le couple formé de l'espace linéaire L et du paramètre (λ, μ) de l'unique quadrique du pinceau $\lambda f + \mu g$ contenant L. Ceci définit des applications rationnelles birationnelles inverses l'une de l'autre entre $G_r(X)$ et $S_r(X)$.

(4) Si l'on a $n = 2r+1$, et donc $F_r(X) = \emptyset$, alors les k-variétés $G_r(X)$ et $S_r(X)$ sont isomorphes.

Démonstration. Pour l'énoncé (1), voir la proposition A.1. Pour les énoncés (2), (3), (4) voir la proposition A.7. □

Proposition 2.17. *Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$ et $n \geq 4$. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$, une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$. Il y a équivalence entre :*

(a) Il existe une conique $C \subset X$.

(b) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$.

Supposons de plus $n \geq 5$. Si le corps k est fertile, alors ces propriétés sont équivalentes à chacune des propriétés :

(c) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ non dégénérée dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$, c'est-à-dire qui contient $3H$.

(d) Il existe une conique lisse $C \subset X$.

(e) Il existe une forme $\lambda f + \mu g = 0$ non dégénérée dans le pinceau qui s'annule sur un plan $L \simeq \mathbb{P}^2_k$ non contenu dans X, et telle que $X \cap L$ soit une conique lisse.

Démonstration. Sous l'hypothèse (a), soit $L \subset \mathbb{P}^n_k$ le plan de la conique, et $P \in L(k)$ un point non situé sur la conique. Il existe une forme $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau qui s'annule en P. Elle s'annule alors sur le plan L. Sous l'hypothèse (b), soit on a $L \subset X$, et alors on a clairement des coniques lisses contenues dans X, soit toute quadrique du pinceau différente de $\lambda f + \mu g = 0$ découpe sur le plan L une conique contenue dans X.

On utilise maintenant la proposition 2.16 dans le cas $r = 2$.

Sous l'hypothèse (b), il existe un k-point sur $G_2(X)$, qui est une k-variété lisse géométriquement intègre. Si k est fertile, les k-points sont Zariski denses sur $G_2(X)$.

Le k-morphisme $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ est dominant, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $\lambda f + \mu g$ soit de rang maximal et s'annule sur un plan L. Ceci établit (c).

Sous l'hypothèse (a), comme la variété $S_2(X)$ est lisse et géométriquement intègre, et que le lieu des coniques singulières est un fermé propre de $S_2(X)$, si k est fertile, alors il existe une conique lisse dans X.

Pour obtenir (e), on utilise le fait que $G_2(X)$ et $S_2(X)$ sont géométriquement intègres et k-birationnelles entre elles, et que le lieu des coniques non lisses est un fermé propre de $S_2(X)$. □

Remarque 2.18. Pour k de caractéristique zéro quelconque, les hypothèses (a) ou (b) impliquent l'existence d'une extension finie de corps K/k de degré impair sur laquelle les énoncés (c), (d), (e) valent. Ceci résulte du cas $p = 2$ de l'énoncé général rappelé dans l'introduction : le corps fixe d'un pro-p-Sylow du groupe de Galois absolu d'un corps parfait k est un corps fertile.

2.4. **Principe local-global : quelques résultats connus.**

Théorème 2.19. *(Hasse 1924 [H24]) Soient k un corps de nombres, $1 \leq n \leq m$ des entiers et φ et ψ deux formes quadratiques non dégénérées de rangs respectifs n et m. Si sur tout complété k_v de k la forme φ est une sous-forme de ψ, alors sur k c'est une sous-forme de ψ.*

Les cas classiques sont $n = 1$ et $n = m$. Le cas général se déduit du cas $n = 1$ par le théorème de simplification de Witt.

L'énoncé suivant reformule un résultat établi indépendamment dans [CT88] et [Sal89].

Théorème 2.20. *Soit k un corps de nombres. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection lisse de deux quadriques. Si X contient une conique lisse $C \subset \mathbb{P}^4_k$, et si $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, alors $X(k)$ est non vide et dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.*

Démonstration. Soit $K \in \mathrm{Pic}(X)$ la classe du faisceau canonique. C'est l'opposé de la classe d'une section hyperplane. On a $(K.K) = 4$ et le genre arithmétique de C est donné par la formule $p_a(C) = (C.(C+K))/2+1$, donc $(C.C) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch donne $h^0(C) \geq 2$, et donc $h^0(C) = 2$. Le système linéaire associé à C définit alors un morphisme $X \to \mathbb{P}^1_k$ dont les fibres générales sont des coniques. Un calcul classique montre que sur la clôture algébrique il y a exactement 4 fibres géométriques singulières, chacune formée d'un couple de droites se recontrant en un point. Sur un corps de nombres, il a été établi par Salberger [Sal88] [Sal89] et aussi dans [CT88] que pour une telle surface X fibrée en coniques avec au plus 4 fibres géométriques non lisses, l'hypothèse $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ implique $X(k) \neq \emptyset$. Plus précisément, $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. □

Le théorème suivant a été établi par Salberger [Sal93] en 1993. Dans son travail [Ha94] sur la méthode des fibrations, Harari en esquisse une démonstration [Ha94, Prop. 5.2.6]. Pour la commodité du lecteur, je donne ci-dessous les détails de l'argument.

Théorème 2.21. *(Salberger 1993) Soit k un corps de nombres. Pour tout entier $n \geq 5$ et toute intersection complète lisse de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$ contenant une conique $C \subset \mathbb{P}^n_k$, le principe de Hasse vaut.*

Démonstration. Soit $n \geq 5$. Si la conique est géométriquement réductible, alors elle contient un point rationnel. Supposons donc que X contient une conique lisse C. Celle-ci est contenue dans un plan $\Pi := \mathbb{P}^2_k \subset \mathbb{P}^n_k$ bien défini. Si le plan Π est contenu dans X, alors $X(k) \neq \emptyset$. On suppose donc que Π n'est pas contenu dans X. L'intersection $\Pi \cap X$ est une courbe quartique dans Π, contenue dans X, et contenant la conique C.

Un théorème de Zak assure que pour tout hyperplan H de $\mathbb{P}^n$, l'intersection complète $X \cap H$ n'a qu'un nombre fini de singularités et est géométriquement intègre (cf. [Ha94, Prop. 5.2.1]).

Pour $n \geq 5$, une version du théorème de Bertini assure que l'hyperplan général $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$ contenant Π, qui est paramétré par un espace $\mathbb{P}^{n-3}$, avec donc $n-3 \geq 2$, découpe sur X une variété $H \cap X$ lisse et géométriquement connexe (contenant la conique C).

On choisit deux tels hyperplans, et on considère l'application rationnelle de X vers $\mathbb{P}^1_k$ associée. C'est un morphisme hors de $X \cap \Pi$ (union dans Π de C et d'une conique). Soit $Z \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ le graphe de ce morphisme. D'après ce qui précède, les fibres de $\pi : Z \to \mathbb{P}^1_k$ sont géométriquement intègres, donc Z est géométriquement intègre. La projection $Z \to X$ est un morphisme k-birationnel. Au-dessus d'un ouvert non vide $U \subset \mathbb{P}^1_k$, la fibration $Z_U \to U$ est projective et lisse, à fibres des intersections complètes de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$, géométriquement intègres, contenant C.

Soit W une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre équipée d'un k-morphisme $W \to Z$ birationnel qui induit un isomorphisme $W_U \to Z_U$ (possible par résolution des singularités). Les fibres W_m du morphisme composé $W \to Z \to \mathbb{P}^1_k$ contiennent toutes une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre sur le corps $k(m)$.

Supposons $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Pour $n \geq 5$, on a $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$. La méthode des fibrations, sous la forme donnée par Harari dans [Ha94, Thm. 4.2.1], et sous une forme encore plus générale dans [HWW21, Thm. 1.3], donne l'existence d'un point $m \in U(k)$ tel que la fibre W_m satisfasse $\mathrm{Br}(W_m)/\mathrm{Br}(k) = 0$ et $W_m(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$.

Par récurrence sur $n \geq 5$, le principe de Hasse pour X se ramène donc au théorème 2.20. □

La méthode montre aussi que $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$, mais sous l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$, c'est un énoncé facile à établir directement [CTSaSD87, Thm. 3.11] pour toute intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ avec $n \geq 5$.

Remarque 2.22. Dans son manuscrit [Sal93], pour $n \geq 6$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète de deux quadriques, géométriquement intègre et non conique, mais non nécessairement lisse, sous l'hypothèse que X contient une conique lisse, Salberger établit le principe de Hasse pour les modèles projectifs et lisses de X.

Terminons cette section par deux énoncés connus sur les corps locaux, et qui seront utilisés dans l'article. Pour le premier, voir aussi [Lam73, Chap. VI, Cor. 2.5] et [Lam05, Chap. VI, Cor. 2.15].

Proposition 2.23. *Soit k un corps local,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$*. Soit q une forme quadratique non dégénérée en 4 variables. Si le déterminant d de q n'est pas un carré dans k, alors q a un zéro non trivial sur k.*

Démonstration. Soit $q =< 1, -a, -b, abd >$ avec d non carré. Soit $K = k(\sqrt{d})$. D'après la proposition 2.2, il suffit de montrer que la forme $q_K =< 1, -a, -b, ab >$ est isotrope, c'est-à-dire hyperbolique. C'est le cas si et seulement si l'algèbre de quaternions $(a, b) \in \mathrm{Br}(k)$ a une image triviale dans $\mathrm{Br}(K)$. Mais on sait bien que pour une extension de corps p-adiques K/k de degré n, la restriction $Br(k) \to \mathrm{Br}(K)$ s'identifie à la multiplication par n sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Proposition 2.24. *(Mordell) Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ une intersection complète lisse de deux quadriques $f = g = 0$. Dans le pinceau de formes quadratiques $\lambda f + \mu g$ il existe une forme non singulière de signature 0 ou 1 : il existe une forme non singulière dans le pinceau contenant $[(n + 1)/2]H$.*

Démonstration. On fait varier (λ, μ) dans le cercle S^1 d'équation $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Pour $\lambda f + \mu g$ non singulière, la signature de $-\lambda f - \mu g$ dans $\mathbb{Z}$ est l'opposée de la signature de $\lambda f + \mu g$. Par ailleurs au passage d'un point $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}$ où la forme $\lambda_0 f + \mu_0 g$ est singulière, la signature varie par addition ou soustraction de 2. Voir [CTSaSD87, §10, Proof of Thm. 10.1, (e) p. 114] et [HB18, Lemma 12.1]. □

3. Points quadratiques sur les intersections de deux quadriques sur un corps p-adique

Soient k un corps parfait, $\overline{k}$ une clôture algébrique, et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit X une courbe projective et lisse de genre 1 sur le corps k. C'est un espace principal homogène de sa jacobienne J. On appelle période de X l'exposant de la classe $[X] \in H^1(k, J)$. On vérifie que cet entier est le générateur positif de l'image de l'application degré $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{Z}$. On appelle indice de X le générateur positif de l'image de l'application degré $\mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$. C'est le pgcd des degrés des points fermés sur X. Puisque X est une courbe de genre 1, c'est aussi le plus petit degré d'un tel point fermé. L'exposant divise l'indice. L'énoncé suivant est [Li68, Thm. 3] [Li69, Thm. 7]. La démonstration utilise le théorème de dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps locaux.

Théorème 3.1. *(Roquette, Lichtenbaum) Soit X une courbe de genre 1 sur un corps p-adique k. L'exposant et l'indice de X coïncident.*

Cet entier est aussi égal à l'ordre du noyau (fini) de la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ (Roquette, Lichtenbaum).

La proposition suivante (énoncés (a) à (d)) est un cas particulier, sans doute classique, d'un récent théorème de Xiaoheng Wang [XW18] sur les sous-espaces linéaires de dimension maximale des intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+1}$. Une variante antérieure est utilisée par Creutz et Viray dans la démonstration de [CV21, Prop. 4.7].

Proposition 3.2. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques $f = g = 0$. C'est une courbe de genre 1. Notons $J = J_X = \mathrm{Pic}^0_{X/k}$. On a $X = \mathrm{Pic}^1_{X/k}$. Soit C/k la courbe projective lisse d'équation $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$. C'est une courbe de genre 1. On a les propriétés suivantes :*

(a) Les jacobiennes J_X et J_C sont isomorphes.
(b) On a $C \simeq \mathrm{Pic}^2_{X/k}$.
(c) Dans $H^1(k, J_X)$, on a $[C] = 2[X]$ et $2[C] = 0$.
(d) Si $C(k) \neq \emptyset$, alors la période de X divise 2.

(e) Si k est un corps p-adique, et $C(k) \neq \emptyset$, alors X possède un point dans une extension quadratique de k.

Démonstration. Pour les points (a) à (d), voir Wang [XW18, §2.2. Theorem 2.25. p. 372.]. Le point (e) résulte de (d) et du théorème 3.1. □

Remarque 3.3. On peut montrer qu'il existe un morphisme $X \to C$ fini étale qui est une forme tordue de la multiplication par 2 sur J_X : voir [XW18, p. 361] et la référence dans la démonstration de [CV21, Prop. 4.7].

Remarque 3.4. Sur tout corps, comme $[C] = 2[X]$, si X possède un point quadratique, alors C possède un point rationnel. Ceci peut se voir facilement. S'il y a un point quadratique, on prend la droite qui passe par ce point et son conjugué. Puis un autre k-point dessus. Il y a une forme $\lambda f + \mu g$ qui s'annule là-dessus donc aussi sur la droite. Cette forme $\lambda f + \mu g$ est constituée de 2 hyperboliques, donc son déterminant est un carré. On a trouvé un point rationnel sur $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$.

Proposition 3.5. *Soient $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3)$ deux formes quadratiques sur un corps p-adique. La k-variété $X \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $f = g = 0$ possède un point dans une extension quadratique de k.*

Démonstration. Comme le rang de la forme quadratique g est au plus 3, le lemme 2.10, qui vaut sur tout corps, réduit la démonstration au cas où g est de rang exactement 3 et X est une intersection complète lisse, donc une courbe géométriquement intègre. Comme g est de rang 3, le polynôme séparable $det(\lambda f + \mu g)$ a un zéro sur k, donc la courbe lisse C définie par $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$ a un point rationnel. Comme k est p-adique, la proposition 3.2(e), qui repose sur le théorème 3.1, assure que X possède un point dans une extension au plus quadratique de k. □

Remarque 3.6. Voici une variante de la démonstration, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est une intersection complète lisse. Soit $D \subset \mathbb{P}^2_k$ la conique lisse définie par $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. On a la projection $p : X \to D$ qui est un morphisme fini de degré 2. L'application degré sur les groupes de Picard géométriques induit des homomorphismes $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Pic}(\overline{D}) \to \mathbb{Z}$, et l'application $p^* : \mathrm{Pic}(\overline{D}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ induit la multiplication par 2 sur $\mathbb{Z}$. Comme C est une conique, la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{D}) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Prenant les invariants sous l'action du groupe de Galois $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on voit que 2 est dans l'image de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathfrak{g}} \to \mathbb{Z}$. Ainsi la période de X divise 2. Comme k est un corps p-adique, le théorème 3.1 donne que l'indice de X divise 2, et donc X, qui est une courbe de genre 1, possède un point dans une extension quadratique de k.

Remarque 3.7. Voici une autre variante de la démonstration, dans le cas où $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est une intersection complète lisse. Soit $C \to \mathbb{P}^1_k$ la projection. Soit $t = \mu/\lambda$ et $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$. La quadrique générique $f + tg$ sur le corps $k(\mathbb{P}^1) = k(t)$ par passage à $k(C)$ a un déterminant un carré, et détermine un élément $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))[2]$ qui appartient à $\mathrm{Br}(C)[2]$.

S'il existe un point P de $C(k)$ tel que $\alpha(P) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$, comme k est p-adique, on peut le supposer situé au-dessus de $t_0 \in k = \mathbb{A}^1_k(k)$, avec $det(f + t_0 g) \neq 0$. La forme quadratique $f + t_0 g$, de rang 4 et de déterminant un carré est hyperbolique sur $k(P) = k$. La quadrique correspondante contient un $\mathbb{P}^1_k$ qui coupe une autre quadrique du pinceau en un point quadratique, donc X possède un point sur une extension quadratique.

Si au contraire pour tout point P de $C(k)$, on $\alpha(P) \neq 0$, alors pour tout tel point, on a $\alpha(P) = \beta$ où $\beta \in \mathrm{Br}(k)[2] \simeq \mathbb{Z}/2$ est l'unique élément non nul. Alors la classe $\alpha - \beta \in \mathrm{Br}(C)$ s'annule en tout point k-rationnel de la courbe C, qui est de genre 1 et possède un k-point. Par le théorème de dualité de Lichtenbaum [Li69, Thm. 4] pour la courbe elliptique C, qui repose sur le théorème de dualité de Tate pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique, ceci implique que l'on a $\alpha - \beta = 0 \in \mathrm{Br}(C)$. Pour toute extension quadratique K/k du corps p-adique k, on a $\beta_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$. Ainsi, pour toute extension quadratique K/k, on a $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(C_K) \subset \mathrm{Br}(K(C))$. Donc la forme quadratique $f + tg$ de rang 4 sur le corps $K(t)$ est hyperbolique sur son extension déterminant $K(C)/K(t)$ et par la proposition 2.2 ceci implique que la forme $f + tg$ est isotrope sur le corps $K(t)$. Par la proposition 2.3, ceci implique que X a un K-point.

Remarque 3.8. Soit k p-adique. Supposons que $X \subset \mathbb{P}^3_k$ est une courbe lisse. Si dans le pinceau il existe une forme g de rang 3, ou plus généralement si la courbe C d'équation $y^2 = det(\lambda f + \mu g)$ a un point rationnel, d'après le théorème 3.2(e) la courbe X a un point quadratique. D'après la proposition 2.9, il existe alors une forme de rang 4 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ qui est somme de 2 hyperboliques. Cela montre qu'il existe $P \in C(k)$ tel que $\alpha(P) = 0$. Le deuxième cas envisagé dans la remarque 3.7 ne peut donc pas se produire, mais il faut utiliser le théorème de dualité de Tate pour le voir.

Pour les intersections complètes *lisses* de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, le théorème suivant a été démontré par Creutz et Viray [CV21, Thm. 1.2 (1)].

Théorème 3.9. *Soit k un corps p-adique. Soient $n \geq 4$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une variété définie par l'annulation de deux formes quadratiques $f = g = 0$. Alors X possède un point dans une extension quadratique de k.*

Démonstration. Par intersection avec un espace linéaire $\mathbb{P}^4_k \subset \mathbb{P}^n_k$ *quelconque*, il suffit de considérer le cas $n = 4$, ce qu'on suppose désormais. Si toute forme dans le pinceau $\lambda f + \mu g$ est de rang au plus 4, alors $det(\lambda f + \mu g)$ est identiquement nul. Dans ce cas, le lemme 2.10 (ii) assure qu'il existe un point dans une extension quadratique. Supposons donc qu'il existe une forme de rang 5 dans le pinceau. Comme k est un corps p-adique, toute forme quadratique en 5 variables est isotrope. On est donc ramené à un système

$$f(x_0, x_1, x_2) + x_3x_4 = 0, \quad g(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

On coupe par $x_4 = 0$. Notons $h(x_0, x_1, x_2, x_3) = g(x_0, x_1, x_2, x_3, 0)$. La proposition 3.5 assure que la variété $Y \subset \mathbb{P}^3_k$ définie par $f(x_0, x_1, x_2) = h(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ possède un point quadratique. Il en est donc de même pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$. □

Remarque 3.10. Le cas $n \geq 6$ est facile : toute forme quadratique en $n + 1 \geq 7$ variables s'annule sur une droite définie sur k. L'intersection d'une telle droite avec une seconde quadrique définit un point au plus quadratique sur l'intersection. Pour $n \geq 6$, on peut donner cet argument sur tout corps C_2, ou sur un corps de nombres totalement imaginaire.

Remarque 3.11. La démonstration de [CV21, Thm. 2.1] pour $X \subset \mathbb{P}^4_k$ passe par une étude détaillée à la Hensel. Les auteurs donnent une seconde démonstration [CV21, Prop. 4.7], via des résultats sur les courbes de genre 1. Par cette méthode ils obtiennent un résultat un peu plus faible lorsque $p = 2$: le pgcd des degrés des points fermés divise 2. La démonstration que nous avons donnée est une variante de cette seconde démonstration. Elle vaut aussi pour $p = 2$.

Remarque 3.12. Des exemples de surfaces de del Pezzo de degré 4 sans point quadratique (et même d'indice 4) ont été construits par Wittenberg [CV21, Rem. 7.8 (5)] et par Creutz-Viray [CV21, Thm. 7.6] sur des corps C_4. Sur des corps C_3, des exemples ont été construits par Kollár et par Ottem [CV21, Rem. 7.8 (4)]. La question de savoir si une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps C_2, ou sur un corps de nombres, possède un point dans une extension quadratique reste ouverte. La question de savoir si une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps C_2 a son indice qui divise 2 est aussi ouverte.

4. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^4_k$

Proposition 4.1. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par $f = g = 0$.*

(i) Si k est algébriquement clos, X contient exactement 16 droites. La forme générique $f + tg$ contient $2H$.

(ii) Si k est fini, la forme générique $f + tg$ contient $1H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$. On a $X(k) \neq \emptyset$.

(iii) Si k est p-adique, $p \neq 2$, et X a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors $X(k) \neq \emptyset$.

(iv) Si k est p-adique, toute forme non singulière $f+\lambda g$ contient $1H$. La k-variété X possède un point dans une extension quadratique de k. Il existe des valeurs de $\lambda \in k$ pour lesquelles $f + \lambda g$ est non singulière et contient $2H$.

(v) Si k est un corps de nombres, il existe une extension quadratique K/k telle que $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.

(vi) (Creutz-Viray) Si k est un corps de nombres, et si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors l'indice de X divise 2. Plus précisément il existe un point fermé dont le degré est dans l'ensemble $\{1, 2, 6, 10\}$.

Démonstration. (i) et (ii). L'existence des 16 droites sur une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps algébriquement clos est un résultat classique. D'après la proposition 2.5, les autres énoncés valent pour toute intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$ telle que $f + tg$ est non dégénérée.

(iii) Ceci résulte de (ii) par le lemme de Hensel.

(iv) Toute forme quadratique en 5 variables sur k p-adique est isotrope. La seconde partie de (iv) résulte du théorème 3.9 (cas lisse, Creutz-Viray), assurant l'existence d'un point de X dans une extension quadratique de k, et de la proposition 2.9.

(v) Si k est un corps de nombres, il existe un ensemble fini S de places de k tel que $X(k_v) \neq \emptyset$ pour $v \notin S$. Pour chaque place $v \in S$, le point (iv) donne une extension $k_v(\sqrt{a_v})$ avec $a_v \in k_v^*$ telle que $X(k_v(\sqrt{a_v})) \neq \emptyset$. Par approximation faible sur k, on trouve $a \in k^*$ tel que sur $K = k(\sqrt{a})$ on ait $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.

(vi) La démonstration qui suit est donnée brièvement dans [CV21, Remark 4.8]. Le polynôme $det(\lambda f + \mu g)$ est de degré 5. Il existe donc une extension K/k de degré 1, 3 ou 5 sur laquelle ce polynôme a un zéro. Sur le corps K, on a donc une forme g dans le pinceau qui est de rang 4. L'hypothèse $X(k_v)$ non vide implique que les k_v-points de X sont Zariski denses. Ainsi la forme quadratique g de rang 4 admet des zéros non triviaux sur tous les complétés de K. Par le principe de

Hasse, elle admet donc un zéro non trivial sur K. Mais alors il existe une droite de $\mathbb{P}^1_K$ (passant par le sommet du cône) contenue dans la quadrique $g = 0$. Son intersection avec une autre quadrique du pinceau donne un point de X dans une extension au plus quadratique de K. Ainsi X possède un point fermé dont le degré est dans $\{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$. D'après la proposition 2.4, ceci se ramène à $\{1, 2, 6, 10\}$. Comme X clairement possède un point fermé de degré dans $\{1, 2, 4\}$, on conclut que l'indice de X divise 2. □

Remarque 4.2. Sur un corps de nombres, le théorème principal [CV21, Thm. 1.1] de Creutz et Viray assure que pour une intersection complète lisse X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$, l'indice de X divise 2 [CV21, Thm. 1.1], sans supposer $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. La démonstration est beaucoup plus délicate que celle des résultats (v) et (vi) ci-dessus. Supposant certaines conjectures générales, ils donnent aussi des résultats conditionnels [CV21, Thm. 1.2 (4) (5))] pour l'existence d'un point dans une extension quadratique.

Avant d'énoncer la proposition suivante, faisons quelques rappels généraux sur les formes quadratiques.

Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Soit $\varphi := f + tg$ la forme quadratique générique sur $K = k(t)$. Supposons-la de rang 5. Soit $\psi = \varphi \perp < -det(\varphi) >$.

La forme ψ est isotrope si et seulement si φ représente $det(\varphi)$. Supposons que c'est le cas. Dans ce cas la forme φ s'écrit $det(\varphi) \perp \varphi_0$, avec φ_0 de rang 4, de déterminant 1, donc de la forme $det(\varphi). < u, v, w, uvw >$ pour des $u, v, w \in K^*$. On a donc

$$\varphi = det(\varphi). < 1, u, v, w, uvw > .$$

Cette forme est semblable à une sous-forme de rang 5 de la forme de Pfister $<< u, v, w >>$. La forme φ est donc isotrope si et seulement si la forme de Pfister $<< u, v, w >>$ est totalement hyperbolique.

Proposition 4.3. *Soit k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Soit $\varphi =: f + tg$ la forme quadratique générique sur $K = k(t)$. Supposons φ non singulière, i.e. de rang 5. Soit $\psi = \varphi \perp < -det(\varphi) >$. Cette forme est semblable à une forme d'Albert.*

Supposons que, pour toute place v de k, on a $X(k_v) \neq \emptyset$.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $X(k) \neq \emptyset$.

(ii) La forme φ est isotrope sur le corps $k(t)$.

(iii) La forme ψ est isotrope sur le corps $k(t)$.

(iv) L'algèbre de Clifford de ψ est semblable à une algèbre de quaternions.

Démonstration. La proposition 2.3 donne l'équivalence de (i) et (ii). Il suffit de montrer que (iii) implique (ii). On a vu ci-dessus que sous l'hypothèse (iii) on peut écrire

$$\varphi = det(\varphi). < 1, u, v, w, uvw > .$$

Par l'hypothèse $X(k_v) \neq \emptyset$, la forme φ est isotrope sur $k_v(t)$. Donc $<< u, v, w >>$ est totalement hyperbolique sur $k_v(t)$. On sait [CTCS80, Prop. 1.1] que l'application de restriction de k à chaque k_v induit une injection sur les groupes de Witt :

$$W(k(t)) \hookrightarrow \prod_v W(k_v(t)).$$

On conclut que $<< u, v, w >>$ est totalement hyperbolique sur $k(t)$. Et donc φ est isotrope sur $k(t)$. Et donc $X(k) \neq \emptyset$ d'après la proposition 2.3. $\square$

Remarque 4.4. Comme on sait, il existe des contre-exemples au principe de Hasse pour une surface de del Pezzo de degré 4 (intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$). On conjecture qu'il n'en existe pas si l'on a $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(X)$.

5. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^5_k$

5.1. **Un premier point de vue.**

Proposition 5.1. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse définie par $f = g = 0$.*

(i) La variété $F_1(X)$ des droites contenues dans X est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 2.

(ii) Si k est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $2H$.

(iii) Si k est un corps fini $\mathbb{F}$, de caractéristique $p \neq 2$, la variété X contient au moins une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$, et la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $\mu f + \lambda g$ contient $2H$. Si le corps fini $\mathbb{F}$ a $q > 30$ éléments, il existe au moins une forme non singulière $f + \lambda g$ dans le pinceau sur $\mathbb{F}$ qui est totalement hyperbolique, et alors X contient une conique.

(iv) Si k est p-adique et $p > 2$, et si X a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors X contient des droites $\mathbb{P}^1_k$, la forme générique $f + tg$ contient $2H$, et toute forme non singulière $f + \lambda g$, $\lambda \in k$, contient $2H$. Si en outre le cardinal q du corps fini résiduel satisfait $q > 30$, alors il existe des formes non singulières $f + \lambda g$ qui s'annulent sur un $\mathbb{P}^2_k$, autrement dit sont totalement hyperboliques, et donc X contient une conique.

(v) Si k est p-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $1H$. Il existe des valeurs de $\lambda \in k$ pour lesquelles $f + \lambda g$ est non singulière et contient $2H$.

Démonstration. L'énoncé (i) (voir Prop. 2.14 (b)) est établi dans [XW18, Thm. 1.1].

Pour l'énoncé (ii), d'après la proposition 2.5, il vaut pour toute intersection complète de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$ telle que la forme $f + tg$ soit non dégénérée.

L'énoncé (i) et le théorème de Lang sur les espaces principaux homogènes de groupes algébriques connexes sur un corps fini donnent le premier énoncé de (iii). Considérons la courbe affine lisse $C/\mathbb{F}$ d'équation $y^2 = -det(f + \lambda g)$. Soit $D \to \mathbb{P}^1$ l'extension de $C \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ (donné par λ) à un revêtement double de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ ramifié en 6 points géométriques. La courbe projective lisse D est de genre 2. Il y a au plus 6 points rationnels de D au-dessus du lieu de ramification et au plus 2 points rationnels au-dessus du point à l'infini de $\mathbb{P}^1$. L'estimation de Weil sur le nombre $N_D(\mathbb{F})$ de points rationnels de la courbe D donne $N_D(\mathbb{F}) \geq 1 + q - 4\sqrt{q}$. Pour $q > 30$, on trouve donc un point de $C(\mathbb{F})$ d'image $\lambda \in \mathbb{A}^1(\mathbb{F})$ tel que la forme quadratique $f + \lambda g$ sur le corps fini $\mathbb{F}$ soit de rang 6 et de déterminant l'opposé d'un carré, et donc totalement hyperbolique.

Pour établir (iv), on utilise le fait que si X/k a bonne réduction comme intersection lisse de deux quadriques, alors la k-variété $F_1(X)$ s'étend en un schéma projectif et lisse sur l'anneau des entiers de k. L'énoncé (iii) et le lemme de Hensel donnent alors que X contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. Le dernier énoncé de (iv) résulte du dernier énoncé de (iii) : il suffit de relever une forme non singulière $f + \lambda g$ du corps fini sur le corps p-adique.

Pour (v), on considère une section hyperplane lisse $Y = X \cap \Pi$. D'après la proposition 4.1 (iv), Y possède un point dans une extension au plus quadratique de k. Il en est donc de même de X. D'après la proposition 2.9, il existe alors des quadriques non singulières dans le pinceau qui contiennent une droite de $\mathbb{P}^5_k$, i.e. il existe $\lambda \in k$ tel que $f + \lambda g$ soit de rang maximal et contienne $2H$. □

On peut maintenant donner une démonstration inconditionnelle de l'énoncé [CV21, Thm. 1.2 (2) (a)] de Creutz et Viray.

Théorème 5.2. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par $f = g = 0$. Pour $n \geq 5$, il existe un point quadratique sur X.*

Démonstration. Supposons d'abord $n = 5$. Hors d'un ensemble fini S de places de k, contenant les places 2-adiques, l'intersection lisse de deux quadriques X a bonne réduction comme intersection de deux quadriques.

Pour toute place v de k hors de S, par la proposition 5.1(iv) toute forme non singulière $\lambda_v f + \mu_v g$ dans le pinceau contient $2H$.

D'après le théorème local de Creutz-Viray [CV21, Thm. 1.2 (1)] (cas lisse du théorème 3.9 ci-dessus), pour toute place v de k, X contient un point quadratique sur k_v (c'est clair pour $k_v = \mathbb{R}$), donc par la proposition 2.9 il existe une forme quadratique non singulière $\lambda_v f + \mu_v g$ dans le pinceau qui contient $2H$. Par le théorème des fonctions implicites, ceci sera encore vrai pour tout point de $\mathbb{P}^1(k_v)$ proche de (λ_v, μ_v).

Par approximation faible sur $\mathbb{P}^1_k$, on trouve donc une forme non singulière $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau sur k qui localement pour toute place contient $2H$. Par le théorème 2.19, la forme contient alors $2H$ sur le corps k. Par l'implication évidente dans la proposition 2.9, on conclut que X possède un point quadratique.

Pour $n \geq 6$, on peut procéder par réduction au cas $n = 5$, mais il est plus simple d'observer que, comme toute forme non singulière de rang 7 sur un corps p-adique contient $2H$, l'argument final ci-dessus permet facilement de prouver l'existence d'une forme $\lambda f + \mu g$ non singulière contenant $2H$. □

Remarque 5.3. Pour cette démonstration, il suffit d'utiliser le fait que X et la k-variété $F_1(X)$ s'étendent en des modèles projectifs et lisses au-dessus d'un ouvert non vide du spectre de l'anneau des entiers du corps de nombres k, les fibres sur les corps résiduels $\kappa(v)$ étant les variétés géométriquement intègres $F_1(X_{\kappa_v})$ attachées aux intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_{\kappa(v)}$.

Remarque 5.4. Creutz et Viray [CV21, Thm. 1.1] ont montré que pour k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, l'indice $I(X)$ divise 2. La question [CV21, Question 1.3] si une telle variété X possède un point quadratique est ouverte.

Le théorème suivant a été établi par Iyer et Parimala [IP22]. Nous en offrons une démonstration alternative.

Théorème 5.5. *(Iyer et Parimala) Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques donnée par un système $f = 0, g = 0$. Supposons que la courbe C d'équation $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$ a un point de degré impair, ce qui est le cas par exemple s'il existe une forme de rang 5 dans le pinceau.*

Si pour chaque place v, la variété X contient une k_v-droite, alors X a un point rationnel.

Démonstration. Par un lemme de déplacement bien connu combiné à la proposition 2.4 on se ramène au cas où C possède un point rationnel satisfaisant $y \neq 0$. Donc il existe une forme non dégénérée $\lambda_0 f + \mu_0 g$ dans le pinceau sur k dont le déterminant est l'opposé d'un carré. Par hypothèse, sur chaque complété k_v, la forme $\lambda_0 f + \mu_0 g$ contient deux hyperboliques. Comme son déterminant est l'opposé d'un carré, elle est totalement hyperbolique. Puisque cela vaut sur chaque k_v, par le théorème 2.19 $\lambda_0 f + \mu_0 g$ est totalement hyperbolique sur k. La variété $X \subset \mathbb{P}^5_k$ contient donc une conique, et elle a des points dans tous les complétés. D'après le théorème 2.21 (Salberger), elle a un k-point. □

5.2. **Un deuxième point de vue.** Soient k un corps de caractéristique différente de 2, et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, définie par $f = g = 0$. Soit C la courbe lisse définie par l'équation

$$y^2 = -det(\lambda f + \mu g).$$

On renvoie à Wang [XW18] pour les faits suivants.

Soit $J = \mathrm{Pic}^0_{C/k}$. C'est une variété abélienne sur k. Soit $P = \mathrm{Pic}^1_{C/k}$. C'est un espace principal homogène sous J. Il est trivial si C possède un point fermé de degré impair. Soit $F_1 = F_1(X)$ la variété des droites contenues dans X. C'est un espace principal homogène sous J. Dans $H^1(k, J)$, on a les égalités $[P] = 2[F_1]$ et $2[P] = 0$. Donc $4[F_1] = 0$.

Les propriétés suivantes sont discutées dans la littérature [Reid72] [ABB14, §1], et dans l'appendice au présent article (propositions A.1 et A.2).

On considère la variété $G_2(X)$ formée des couples (H, Q) où Q est une quadrique de $\mathbb{P}^5_k$ contenant X, et où $H \subset Q \subset \mathbb{P}^5$ est un espace linéaire de dimension 2 de $\mathbb{P}^5$ contenu dans la quadrique Q. On a une projection évidente $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ associant à (H, Q) le paramètre de Q. On montre ([Reid72, Thm. 1.10] [ABB14, Prop. 1.18], appendice A ci-dessous) que la factorisation de Stein de ce morphisme est

$$G_2(X) \to C \to \mathbb{P}^1_k$$

avec C la courbe ci-dessus, et que le morphisme $G_2(X) \to C$ définit un schéma de Severi-Brauer (à fibres lisses) de dimension relative 3, associé à une classe $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)[2]$ dont l'image dans $\mathrm{Br}(k(C))$ est d'indice divisant 4. Elle est donc la classe d'une algèbre de biquaternions sur $k(C)$.

On dispose par ailleurs de la forme quadratique $q := f + tg$ sur le corps $k(t)$, qui sur l'extension $k(C)$ de $k(t)$ acquiert bonne réduction partout. La forme quadratique $q_{k(C)}$ est une forme quadratique de rang 6 de déterminant -1.

Rappelons que sur un corps F de caractéristique différente de 2, toute forme quadratique φ de rang 6 et de déterminant signé 1, donc de déterminant (-1), est appelée une forme d'Albert. Elle est un multiple scalaire d'une forme du type

$$< -a, -b, ab, -c, -d, cd > .$$

Son invariant de Clifford $c(\varphi) \in \mathrm{Br}(F)[2]$ est la somme des deux classes d'algèbres de quaternions (a, b) et (c, d). La forme φ est isotrope si et seulement si l'indice de $c(\varphi)$ divise 2. La forme φ est totalement hyperbolique si et seulement si $c(\varphi) = 0$.

Pour tout ceci, et la démonstration de la proposition 5.6 ci-dessus, voir voir [Ka08, 8.1.3, 8.1.4, 8.1.6] et la Proposition B3 de l'appendice B de [ABB14].

Proposition 5.6. *La classe* $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ *est la classe de l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique* $q_{k(C)}$.

Proposition 5.7. *Soient* $X \subset \mathbb{P}^5_k$, C *et* $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C) \subset \mathrm{Br}(k(C))$ *comme ci-dessus.*

(i) Si l'on a $X(k) \neq \emptyset$, *c'est-à-dire si la forme quadratique* $f + tg$ *a un zéro sur le corps* $k(t)$, *alors l'indice de* $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ *divise 2.*

(ii) Si l'indice de $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ *divise 2, alors la forme quadratique* $f + tg$ *a un zéro sur l'extension quadratique* $k(C)$ *de* $k(t)$.

Démonstration. Via la proposition 5.6, ceci résulte des rappels sur les formes d'Albert donnés ci-dessus : l'indice de $\alpha \in \mathrm{Br}(k(C))$ divise 2 si et seulement si la forme $f + tg$ est isotrope sur le corps $k(C)$. Pour (i), voir aussi la démonstration géométrique [HT21, §4, Cor. 7]. □

Théorème 5.8. *Pour* $X \subset \mathbb{P}^5_k$, C *et* α_X *comme ci-dessus, on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) Il existe une quadrique non singulière dans le pinceau qui contient un $\mathbb{P}^2_k$.

(ii) Il y a une forme quadratique non singulière totalement hyperbolique dans le pinceau $\lambda f + \mu g$.

(iii) Il y a un k*-point* $m \in C(k)$ *non ramifié pour* $C \to \mathbb{P}^1_k$ *tel que* $\alpha_X(m) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$.

Elles impliquent que X *contient une conique.*

Démonstration. Les énoncés (i) et (ii) sont clairement équivalents. Comme rappelé ci-dessus et dans la Proposition 2.16, le morphisme $G_2(X) \to \mathbb{P}^1_k$ se factorise par $C \to \mathbb{P}^1_k$, où la courbe C est donnée par $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$. Un k-point m de C non dans le lieu de ramification a pour image un point $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $\lambda f + \mu g$ est de rang maximal, et qui contient un $\mathbb{P}^2_k$ si et seulement si $\alpha_X(m) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$. □

Une démonstration du théorème suivant (avec la restriction $X(k) \neq \emptyset$) est esquissée dans [HT21, Theorem 9]. Nous proposons une démonstration alternative.

Théorème 5.9. *Soient* $X \subset \mathbb{P}^5_k$, C *et* $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ *comme ci-dessus.*

(i) Si X *contient une droite sur* k, *alors* $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.

(ii) Si $X(k) \neq \emptyset$ *et* $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$, *alors* X *contient une droite sur* k.

Démonstration. (i) Si X contient une droite $\mathbb{P}^1_k$, alors la forme quadratique $f + tg$ sur $k(t)$ contient $2H$. Donc

$$q \simeq <1, -1> \perp <1, -1> \perp \rho. <1, det(q)> .$$

Sur l'extension quadratique $k(C)$ cette forme est totalement hyperbolique. Donc $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.

(ii) L'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ implique que $q = f + tg$ contient $1H$. On a donc

$$q \simeq <1, -1> \perp q_1$$

sur $k(t)$, avec q_1 de déterminant un carré dans $k(C)^\times$. L'hypothèse $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$ implique alors que cette forme quadratique q_1 est complètement hyperbolique sur $k(C)$. Puisque $k(C)/k(t)$ est l'extension discriminant et q_1 a rang 4, par la proposition 2.2 ceci implique que q_1 est isotrope sur $k(t)$. Donc q contient

$2H$ sur $k(t)$. La quadrique générique $f + tg = 0$ contient donc une droite. Par la proposition 2.3, la variété d'équations $f = g = 0$ contient un $\mathbb{P}^1_k$. □

L'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ n'est pas nécessaire. On a :

Théorème 5.10. *Soient $X \subset \mathbb{P}^5_k$, C et $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ comme ci-dessus. Soit $J = \mathrm{Pic}^0_{C/k}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) La variété X contient une droite sur k.
(ii) On a $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(C))$.
(iii) La classe de $F = F_1(X)$ dans $H^1(k, J)$ est nulle.

Démonstration. On sait [XW18] que la k-variété $F_1(X)$ des droites de X est un espace principal homogène de J, qui a donc une classe $[F]$ dans $H^1(k, J)$. Les énoncés (i) et (iii) sont équivalents. D'après le théorème 5.9, (i) implique (ii). Supposons (ii). Soit $k(X)$ le corps des fonctions de X. Considérons $X \times_k k(X)$. D'après le théorème 5.9, $X \times_k k(X)$ possède une droite. L'image de $[F] \in H^1(k, J)$ dans $H^1(k(X), J)$ est donc nulle. Mais l'application $H^1(k, J) \to H^1(k(X), J)$ est injective, car toute application k-rationnelle de la k-variété géométriquement rationnellement connexe X vers un espace principal homogène d'une variété abélienne est constant. Ainsi $[F] = 0 \in H^1(k, J)$, et X contient une droite sur k. □

Remarque 5.11. Si X contient une droite sur k, alors X est k-rationnelle. La réciproque est un théorème délicat qui fut prouvé par Benoist et Wittenberg, après un travail préliminaire de Hassett et Tschinkel.

Au théorème 5.5 on a donné une démonstration alternative d'un théorème de Iyer et Parimala [IP22]. Voici une autre variante de cette démonstration.

Théorème 5.12. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Soit C la courbe projective et lisse définie par l'équation $y^2 = -det(\lambda f + \mu g)$. Si X possède une droite sur chaque k_v, et si l'indice de la courbe C est 1, alors X possède un point rationnel.*

Démonstration. D'après le théorème 5.9, $\alpha_X \in \mathrm{Br}(C)$ a son image nulle dans $\mathrm{Br}(C_{k_v})$ pour chaque place v de k. Par ailleurs il existe un point P fermé de degré impair sur C, qu'on peut prendre en dehors du lieu de ramification de $C \to \mathbb{P}^1_k$. Soit $K = k(P)$ son corps résiduel. La classe $\alpha_X(P) \in \mathrm{Br}(K)$ s'annule dans tous les complétés K_w de k. D'après le principe de Hasse pour le groupe de Brauer d'un corps de nombres, $\alpha_X(P) = 0$. D'après le théorème 5.8, il existe une conique dans X_K. Comme $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ et donc $X(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$, et que $X_K \subset \mathbb{P}^5_K$ contient une conique, le théorème 2.21 (Salberger) donne $X(K) \neq \emptyset$ et donc, par la Proposition 2.4, $X(k) \neq \emptyset$. □

6. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^6_k$

Ce cas est assez mystérieux.

Proposition 6.1. *Soit k un corps,* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Soit $X \subset \mathbb{P}^6_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$.*

(i) Supposons $\mathrm{car}(k) = 0$. *La variété $F_1(X)$ est une variété de Fano projective lisse, géométriquement rationnelle, de dimension 4, dont le groupe de Picard géométrique est libre de rang 8.*

(ii) Si k est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $3H$. La variété X contient 64 plans $\mathbb{P}^2$.

(iii) Si k est un corps fini $\mathbb{F}$, la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$. La variété X contient au moins une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$.

(iv) Si k est p-adique et $p > 2$, et si X a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors X contient des droites $\mathbb{P}^1_k$, la forme générique $f + tg$ contient $2H$. Si de plus le cardinal du corps fini résiduel est au moins 9, alors il existe des formes non singulières $f + \lambda g$ qui s'annulent sur un $\mathbb{P}^2_k$, autrement dit contiennent $3H$. Dans ce cas X contient une conique définie sur k.

(v) Si k est p-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$.

(vi) Si k est un corps de nombres, il existe des formes non singulières $f + \lambda g$ qui contiennent $2H$, et X contient un point sur une extension quadratique.

Démonstration. L'énoncé (i) est mis pour mémoire, voir la proposition 2.14 (b). La première partie de l'énoncé (ii), et l'existence d'au moins un plan $\mathbb{P}^2_k$ dans X résultent de la proposition 2.5. La variété $F_2(X)$ est lisse de dimension zéro d'après la proposition 2.14 (a). Elle a 64 points (voir la démonstration du Lemme A.3 de l'appendice).

Pour (iii), comme le corps $\mathbb{F}(t)$ est C_2, la forme $f + tg$ qui est non dégénérée et de rang 7 contient $2H$. La proposition 2.3 donne alors que X contient une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$.

Pour (iv), on aimerait trouver une section par un bon hyperplan Π telle que $X \cap \Pi$ ait bonne réduction, et appliquer la proposition 5.1. Quitte à remplacer $\mathbb{F}$ par une extension finie $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ de degré impair, et k par l'extension non ramifiée k'/k correspondante, on peut trouver une telle section. On trouve ainsi une extension k'/k de degré impair telle que $X \cap \Pi$ et donc X contienne une droite $\mathbb{P}^1_{k'}$. La forme $f + tg$ contient donc $2H$ sur $k'(t)$. Par une variante du théorème de Springer, elle contient $2H$ sur $k(t)$. Et donc, par la proposition 2.3, la variété X contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. Pour le dernier point de (iv), notons que l'on peut trouver λ, μ dans le corps résiduel fini $\mathbb{F}$ tels que $\lambda f + \mu g$ soit de rang 7 sur le corps fini et contienne $3H$. Ceci se relève sur le corps p-adique.

Pour (v), il suffit de remarquer que toute forme quadratique non dégénérée de rang 7 contient $2H$.

Pour (vi), voir le théorème 5.2 – dont la démonstration dans le cas $n \geq 6$ est simple. □

7. Intersections complètes lisses dans $\mathbb{P}^7_k$

Proposition 7.1. *Soit k un corps, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques définie par $f = g = 0$.*

(i) Suppons $\mathrm{car}(k) = 0$. La variété $F_1(X)$ des $\mathbb{P}^1$ contenus dans X est projective et lisse et géométriquement connexe. C'est une variété de Fano géométriquement rationnelle, de groupe de Picard géométrique $\mathbb{Z}$.

(ii) La variété $F_2(X)$ des $\mathbb{P}^2$ contenus dans X est un espace principal homogène d'une variété abélienne de dimension 3.

(iii) Si k est algébriquement clos, la forme générique $f + tg$ contient $3H$.

(iv) Soit $k = \mathbb{F}$ un corps fini. Toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$. La variété X contient au moins un $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}}$. La forme générique $f + tg$ contient $3H$.

(v) Si k est p-adique et $p > 2$, et X a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors X contient des $\mathbb{P}^2_k$, la forme générique $f + tg$ contient $3H$, et toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $3H$.

(vi) Si k est p-adique, toute forme non singulière $f + \lambda g$ contient $2H$.

(vii) Si k est p-adique, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, alors il existe une forme de rang 8 qui contient $3H$.

(viii) Si k est un corps de nombres, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, alors il existe une forme de rang 8 dans le pinceau qui contient $3H$.

(ix) Si k est un corps de nombres, et s'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau $\lambda f + \mu g$, et si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors X possède un point rationnel.

Démonstration. Les énoncés (i) et (ii) ont été donnés à la proposition 2.14 (d) (e) en caractéristique zéro. Le fait que (ii) vaille pour $F_2(X)$ en caractéristique différente de 2 est établi dans [XW18].

(iii) C'est un cas particulier de la proposition 2.5.

(iv) Sur un corps fini $k = \mathbb{F}$, toute forme quadratique de rang au moins 3 est isotrope. Tout espace principal homogène sous une variété abélienne sur $\mathbb{F}$ est trivial. De (ii) on déduit par le théorème de Lang que l'on a $F_2(X)(\mathbb{F}) \neq \emptyset$. Donc la forme générique $f + tg$ contient $3H$.

(v) Si k est p-adique et $p > 2$, et si X a bonne réduction comme intersection complète lisse de deux quadriques, alors il en est de même de $F_2(X)$. Par (iv) et le lemme de Hensel, $F_2(X)$ a un k-point. Ainsi X contient un $\mathbb{P}^2_k$ et donc toute forme non singulière dans le pinceau contient $3H$.

(vi) Sur un corps p-adique, et aussi sur un corps C_2, toute forme quadratique en au moins 7 variables contient $2H$.

(vii) On peut supposer que le polynôme séparable $P(t) = det(f + tg)$ est de degré 8. Par hypothèse, il admet un zéro sur k, donc un zéro simple. On voit alors facilement qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $P(\lambda) \in k$ n'est pas un carré. La forme $f + \lambda g$ est alors une forme de rang 8 dont le déterminant δ n'est pas un carré. Comme le corps est p-adique, la forme s'écrit

$$< 1, -1 > \perp < 1, -1 > \perp q,$$

avec q une forme quadratique de rang 4 de déterminant non carré dans k. Une telle forme est isotrope (Proposition 2.23).

(viii) et (ix) En combinant (v), (vii) et l'approximation faible, on trouve λ dans le corps de nombres k tel que $f + \lambda g$ est de rang 8 et contient $3H$ sur chaque k_v, donc aussi sur k par le théorème 2.19. Ainsi X contient une conique, et sous l'hypothèse $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ le théorème 2.21 (Salberger) donne $X(k) \neq \emptyset$. □

Remarque 7.2. (a) Pour la démonstration dans le cas global, au lieu d'utiliser (v), il suffit de savoir que pour presque tout complété k_v, on a $F_2(X)(k_v) \neq \emptyset$. Ceci résulte simplement du fait que la k-variété $F_2(X)$ est géométriquement intègre (Proposition 2.14(i)).

(b) Sur tout corps k, l'hypothèse qu'il existe une forme de rang 7 dans le pinceau équivaut au fait que le polynôme homogène $det(\lambda f + \mu g)$ possède un zéro sur k (par nécesssité zéro simple, puisque X est lisse).

(c) Pour obtenir la conclusion de (ix), il suffirait de supposer que $det(\lambda f + \mu g)$ possède un zéro dans une extension de degré impair.

Sur un corps p-adique k, sous les hypothèses supplémentaires que $X(k)$ est non vide et que le cardinal du corps résiduel est au moins égal à 32, Heath-Brown [HB18, Thm. 2] montra que pour $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse il existe une quadrique non dégénérée dans le pinceau qui contient $3H$. Sur un corps de nombres, ce résultat lui permet d'établir le principe de Hasse pour les points rationnels des intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^7_k$ [HB18, Thm. 1].

On va maintenant retrouver ces résultats.

Pour le résultat local, on va utiliser le théorème 3.9.

Théorème 7.3. *Soit k un corps p-adique. Soit $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques, donnée par un système $f = g = 0$. Supposons $X(k)$ non vide. Alors :*

(a) Il existe sur X un couple de droites distinctes, sécantes, et globalement définies sur k.

(b) Il existe une forme quadratique non dégénérée $\lambda f + \mu g$, avec $\lambda, \mu \in k$, qui contient $3H$.

Démonstration. Soit $M \in X(k)$. Comme k est p-adique, ou encore parce qu'une intersection complète lisse X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 4$ est k-unirationnelle dès qu'elle a un k-point, les k-points sont Zariski denses dans X. D'après le théorème 2.14 (f), on peut choisir M de sorte que l'espace tangent à X en M découpe sur $X \subset \mathbb{P}^7_k$ un cône de dimension relative 1 sur une intersection complète lisse Y de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$.

D'après le théorème 3.9, la k-variété $Y \subset \mathbb{P}^4_k$ a un point dans une extension au plus quadratique K/k, et comme Y est lisse, ses K-points sont Zariski denses sur Y_K. Si $Y(k) \neq \emptyset$, les k-points sont denses sur Y. On peut donc trouver sur X un couple de droites distinctes, soit définies toutes deux sur k, soit définies sur une extension quadratique K et conjugées sur ce corps, et se rencontrant en le k-point M.

Il existe au moins une forme quadratique $\lambda f + \mu g$ dans le pinceau, définie sur k, qui s'annule sur le plan $\mathbb{P}^2_k$ engendré par ces deux droites.

Si la forme quadratique $\lambda f + \mu g$ est de rang 8, alors elle contient $3H$. Si la forme quadratique est de rang 7, la proposition 2.17 montre qu'il existe une forme de rang 8 dans le pinceau qui contient $3H$. On pourrait aussi utiliser la proposition plus spéciale 7.1 (vii). $\square$

Remarque 7.4. Partant de $P \in X(k)$ quelconque, la proposition 2.7 donne déjà un cône de sommet P sur une intersection de deux quadriques $Y \subset \mathbb{P}^4_k$, sans la précision qu'on peut trouver Y lisse. Sur le corps p-adique k, le théorème 3.9 assure l'existence d'un point de Y sur une extension quadratique de k.

Voici maintenant une démonstration alternative du théorème global établi par Heath-Brown [HB18, Thm. 1].

Théorème 7.5. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques. Le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de X.*

Démonstration. On part de X avec $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v. On utilise la proposition 2.24 (le cas $k = \mathbb{R}$), la proposition 7.1 (v) (le cas de bonne réduction, qu'il suffit d'ailleurs de connaître pour les complétés k_v hors d'un ensemble fini de places de k), et le théorème 7.3. Par approximation faible, on trouve $\lambda \in k$ avec

$f+\lambda g$ de rang 8 qui contient $3H$ sur chaque complété de k, et qui donc par le théorème 2.19 contient $3H$. Donc X contient une conique, et on conclut avec le théorème 2.21 (Salberger). □

Terminons cette section avec une remarque. On aurait pu essayer d'établir le théorème en établissant l'existence d'un couple de droites conjuguées sur X. Dans cette direction, on peut au moins établir le résultat suivant.

Proposition 7.6. *Soient k un corps de nombres et $X \subset \mathbb{P}^7_k$ lisse définie par $f = g = 0$, avec des points dans tous les complétés. Il existe une extension quadratique K/k telle que $f+tg$ sur le corps $K(t)$ contienne $2H$ sur les complétés $K_w(t)$, autrement dit $F_1(X)(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Pour presque toute place v de k, la forme générique $f+tg$ contient $3H$ sur $k_v(t)$, et X contient un plan $\mathbb{P}^2_{k_v}$. Pour toute place v de k, il existe une extension quadratique K_w de k_v telle que la forme générique $f+tg$ contienne $2H$ sur $K_w(t)$ (car on a vu au théorème 7.3 qu'il existe une droite de X définie sur une extension quadratique de k_v). Par approximation faible, on trouve une extension quadratique K/k telle que $f+tg$ sur $K(t)$ contienne $2H$ sur tous les $K_w(t)$ pour w place de k. On peut choisir K totalement imaginaire. □

La proposition 7.1 (i) implique que la k-variété projective et lisse géométriquement rationnelle $F_1(X)$ satisfait $\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(F_1(X))$. On s'attend donc à avoir le principe de Hasse pour l'existence de droites sur $X \subset \mathbb{P}^7$. Avec les notations de la proposition 7.1, X qui a des points dans tous les complétés de k devrait selon la proposition 7.6 contenir une droite sur une extension quadratique et donc d'après [CTSaSD87] devrait avoir un k-point. Mais prouver le principe de Hasse pour $F_1(X)$ ne semble pas a priori plus simple que de prouver le principe de Hasse pour X.

Remerciements. Les travaux récents de Creutz et Viray [CV21] et de Iyer et Parimala [IP22] m'ont amené à revenir sur ce sujet. Je remercie Aleksandr Kuznetsov d'avoir bien voulu établir et rédiger les résultats rassemblés dans l'appendice. Le rapport critique de l'arbitre a permis une meilleure présentation des résultats arithmétiques de l'article.

Annexe A. Appendix, by A. Kuznetsov

We work over an arbitrary field k of characteristic not equal to 2. Let V be a vector space of dimension $n+1$ and let

$$X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$$

be a smooth complete intersection of two quadrics. Over a separable closure of k, the smoothness of X implies that the pencil generated by Q_1 and Q_2 contains exactly $n+1$ quadrics of corank 1, and all the other quadrics in the pencil are nondegenerate. Moreover, the vertices of singular quadrics in the pencil do not lie on X.

A.1. **Relative Hilbert schemes of planes.** Let $G_r(X) \subset \mathrm{G}(r+1, V) \times \mathbb{P}^1$ be the relative Hilbert scheme of linear spaces $\mathbb{P}^r$ (linearly embedded into $\mathbb{P}^n$) contained in the quadrics of the pencil generated by Q_1 and Q_2.

Proposition A.1. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. If $n \geq 2r+1$ the scheme $G_r(X)$ is smooth and geometrically connected of expected dimension $(r+1)(n-\frac{3}{2}r-1)+1$ over k.*

Moreover, if $n = 2r+1$ the morphism $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$ factors as

$$G_r(X) \to C \to \mathbb{P}^1,$$

where C is a smooth geometrically connected curve, $C \to \mathbb{P}^1$ is a double covering branched at the discriminant locus of the pencil, which has length $n+1 = 2r+2$ and whose $\overline{k}$-points correspond to degenerate quadrics in the pencil, and $G_r(X) \to C$ is a smooth morphism with geometrically connected fibers.

The smoothness of $G_r(X)$ is essentially proved in [Ku11, Proposition 2.1].

Proof. To prove smoothness (and geometric connectedness) of $G_r(X)$ we may pass to the algebraic closure of the base field, so we assume k algebraically closed. First, the smoothness of X implies the smoothness of the total space $\mathcal{Q}$ of the relative quadric in the pencil (because $\mathcal{Q}$ is nothing but the blowup of $\mathbb{P}(V)$ at X). Then the first part of [Ku11, Proposition 2.1] implies that the natural morphism

$$T_P\mathbb{P}^1 \to S^2 K_P^\vee$$

is surjective for any $P \in \mathbb{P}^1$, where $K_P \subset V$ is the kernel of the quadratic form corresponding to the point P. Finally, the argument of the second part of [Ku11, Proposition 2.1] implies that $G_r(X)$ is smooth of expected dimension.

Next, note that the fiber of $G_r(X)$ over a point $P \in \mathbb{P}^1$ is the subscheme of the Grassmannian $\mathrm{G}(r+1, n+1)$ parameterizing subspaces $U \subset V$ of dimension $r+1$ isotropic for the quadratic form q_P of the quadric $\mathcal{Q}_P$. In particular, if P is not in the discriminant, so that the form q_P is nondegenerate, and $n \geq 2r+2$, this is the homogeneous variety $\mathrm{OGr}_{q_P}(r+1, V)$ of the special orthogonal group of the form q_P, hence it is smooth and connected, and if $n = 2r+1$, this is a disjoint union of two smooth homogeneous varieties $\mathrm{OGr}^{\pm}_{q_P}(r+1, 2r+2)$.

On the other hand, if $n = 2r+1$ and P belongs to the discriminant, so that the form q_P has a 1-dimensional kernel space K_P, then every q_P-isotropic subspace contains K_P, and the map $U \mapsto U/K_P$ induces an isomorphism between the fiber of $G_r(X)$ over P with the subscheme of $\mathrm{G}(r, n)$ parameterizing subspaces isotropic for the quadratic form $\bar{q}_P$ induced by q_P on V/K_P, which is also a homogeneous variety, $\mathrm{OGr}_{\bar{q}_P}(r, V/K_P)$, hence smooth and connected.

To prove connectedness of $G_r(X)$, first assume that $n \geq 2r+2$. Then all fibers of $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$ are connected, so it follows that $G_r(X)$ is connected.

Finally, assume $n = 2r+1$, and let again k be any field of characteristic not equal to 2. Let

$$G_r(X) \longrightarrow C \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$$

be the Stein factorization for the map $G_r(X) \to \mathbb{P}^1$. Since $G_r(X)$ is normal, C is a normal curve. Since the geometric general fiber of $G_r(X)$ has two connected components, C is the normal closure of $\mathbb{P}^1$ in the corresponding quadratic field extension of the field of rational functions, hence $C \to \mathbb{P}^1$ is a double covering ramified over the discriminant. Since the discriminant is reduced and the characteristic is not 2, the curve C is smooth over k and geometrically connected.

To prove that the morphism $G_r(X) \to C$ is smooth with geometrically connected fibers we may pass to the algebraic closure of the base field, so from now on we assume k algebraically closed. Let $x_1, \dots, x_{n+1} \in C$ be the ramification points of f. Following the proof of [FK18, Proposition 2.7] we consider the vector bundles

$$\mathcal{V} \coloneqq V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \qquad \text{and} \qquad \widehat{\mathcal{V}} \coloneqq \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C(x_i)$$

on $\mathbb{P}^1$ and C, respectively, endowed with the quadratic forms

$$q\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \qquad \text{and} \qquad \hat{q}\colon \widehat{\mathcal{V}} \to \widehat{\mathcal{V}}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

where the first map is induced by the pencil of quadrics, and the second map is defined as the direct sum of morphisms

$$\mathcal{O}_C(x_i) \cong \mathcal{O}_C(-x_i) \otimes \mathcal{O}_C(2x_i) \cong \mathcal{O}_C(-x_i) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

in particular the form $\hat{q}$ is everywhere non-degenerate. It is easy to see that we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{V} \arrow[r, "f^*q"] \arrow[d, "\iota"'] & f^*\mathcal{V}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \\ \widehat{\mathcal{V}} \arrow[r, "\hat{q}"] & \widehat{\mathcal{V}}^\vee \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \arrow[u, "\iota^\vee"'] \end{tikzcd}$$

where the left vertical arrow is defined as the composition

$$\iota\colon f^*\mathcal{V} \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}_C(x_i) = \widehat{\mathcal{V}}$$

with the middle arrow being the direct sum of the embeddings $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathcal{O}_C(x_i)$, and the right vertical arrow is its dual. In particular, away from the points x_i the vertical arrows are isomorphisms, hence the quadratic forms agree. On the other hand, over x_i the map ι factors as the composition

$$V \xrightarrow{\pi_i} V/K_{P_i} \hookrightarrow \widehat{V},$$

where π_i is the projection, and $K_{P_i} \subset V$ is the 1-dimensional kernel of the quadratic form corresponding to the point P_i.

Now consider the relative isotropic Grassmannian $\widehat{G}_r(X) \to C$ that parameterizes vector subspaces of dimension $r+1$ in the fibers of $\widehat{\mathcal{V}}$ isotropic with respect to $\hat{q}$. The argument of [FK18, Proposition 2.7] shows that $\widehat{G}_r(X)$ has two connected components

$$\widehat{G}_r(X) = \widehat{G}_r^+(X) \sqcup \widehat{G}_r^-(X),$$

isomorphic to each other. We claim that each of these components is isomorphic to $G_r(X)$. Indeed, consider the morphism

$$\widehat{G}_r^+(X) \to G_r(X), \qquad (x, \widehat{U}) \mapsto (f(x), \iota^{-1}(\widehat{U})). \tag{A.1}$$

It is obvious that this map is well defined and is an isomorphism away from the point P_i. On the other hand, over P_i the map factors as

$$\mathrm{OGr}^+_{\hat{q}_{x_i}}(r+1, \widehat{V}) \to \mathrm{OGr}_{\bar{q}_{P_i}}(r, V/K_{P_i}) \to \mathrm{OGr}_{q_{P_i}}(r+1, V),$$

where $\bar{q}_{P_i}$ is the (non-degenerate) quadratic form induced on V/K_{P_i} by the form q_{P_i}, the first map is given by $\widehat{U} \mapsto \widehat{U} \cap (V/K_{P_i})$, and the second by $\bar{U} \mapsto \pi_i^{-1}(\bar{U})$. It is easy to see that both maps are isomorphisms, hence so is their composition, and therefore the map (A.1) is an isomorphism.

It remains to note that the natural map $\widehat{G}_r^+(X) \to C$ is smooth (because $\hat{q}$ is everywhere nondegenerate) with connected fibers, hence $\widehat{G}_r^+(X)$ is connected, hence $G_r(X)$ is connected. QED

We need to study the case $r = 2$, $n = 5$ in more detail. Let $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ be the double covering constructed in Proposition A.1 and let $\mathcal{C}\ell_0$ be the sheaf of even parts of Clifford algebras over $\mathbb{P}^1$ associated with the pencil of quadrics. Recall from [Ku08, §3.5] that there is an Azumaya algebra $\mathcal{B}_0$ on C such that

$$\mathcal{C}\ell_0 \cong f_*\mathcal{B}_0.$$

We denote by $\beta \in \mathrm{Br}(C)$ the Brauer class of $\mathcal{B}_0$.

Proposition A.2. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. If $n = 5$ the morphism $G_2(X) \to C$ constructed in Proposition A.1 is a 3-dimensional Severi–Brauer variety of class β.*

Proof. Since $\mathcal{B}_0$ is an Azumaya algebra of rank $2^{n-1} = 16$, there is a β-twisted locally free sheaf $\mathcal{S}$ on C such that $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{S})$. Then up to line bundle twists the bundle $\widehat{\mathcal{V}}$ is isomorphic to both $\wedge^2\mathcal{S}$ and $\wedge^2\mathcal{S}^\vee$, the corresponding quadric bundle is isomorphic to the relative Grassmannian $\mathrm{G}_C(2, \mathcal{S}) \cong \mathrm{G}_C(2, \mathcal{S}^\vee)$, and there is a standard canonical isomorphism

$$\widehat{G}_2(X) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}) \sqcup \mathbb{P}_C(\mathcal{S}^\vee).$$

Therefore, $G_2(X) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}) \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{S}^\vee)$ by the argument of Proposition A.1. QED

A.2. **Absolute Hilbert schemes of planes.** Let $F_r(X) \subset \mathrm{G}(r+1, V)$ be the Hilbert scheme of linear spaces $\mathbb{P}^r$ (linearly embedded into $\mathbb{P}^n$) contained in X.

Lemma A.3. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. If $n \le 2r+1$ the scheme $F_r(X)$ is empty, and if $n \ge 2r+2$ it is smooth over k and nonempty of expected dimension $(r+1)(n-2r-2)$.*

Proof. We may (and will) assume that k is algebraically closed. Let $U \subset V$ be the vector subspace of dimension $r+1$ corresponding to a point $[U] \in F_r(X)$. Let $U^\perp \subset V^\vee$ be the kernel of the restriction map $V^\vee \to U^\vee$. If $n \le 2r$ then $\dim(U^\perp) = n - r < r + 1 = \dim(U)$, and since each quadratic form in the pencil takes U to $U^\perp \subset V^\vee$ (by the assumption $[U] \in F_r(X)$), it follows that every quadratic form is degenerate, hence X is singular. On the other hand, if $n = 2r+1$ then the determinant of every quadratic form q in the pencil is equal to the square of the determinant of $q|_U\colon U \to U^\perp$, hence the discriminant subscheme in $\mathbb{P}^1$ is nonreduced, hence X is also singular.

To compute the dimension and prove the smoothness of $F_r(X)$ let $[U] \in F_r(X)$. Since the expected dimension of $F_r(X)$ is

$$\dim(\mathrm{G}(r+1, n+1)) - 2\,\mathrm{rank}(S^2\mathcal{U}^\vee) = (r+1)(n-2r-2),$$

it is enough to show that $\dim(H^0(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X})) = (r+1)(n-2r-2)$. Consider the standard exact sequence

$$0 \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \to V/U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(2) \to 0 \tag{A.2}$$

(here the middle term is $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/\mathbb{P}(V)}$ and the right term is $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}(V)}|_{\mathbb{P}(U)}$). Its cohomology exact sequence shows that it is enough to check that $H^1(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}) = 0$;

to do this we use a trick. Since X is smooth, $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}$ is a vector bundle of rank $n-r-2$, and (A.2) shows its determinant is $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(n-r-4)$, hence

$$\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \cong \wedge^{n-r-3}\mathcal{N}^{\vee}_{\mathbb{P}(U)/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(n-r-4).$$

Dualizing (A.2), taking its wedge power, and twisting, we obtain a long exact sequence

$$\begin{aligned}0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(r+2-n)^{\oplus(n-r-2)} \to \cdots \to \wedge^{n-2r-1}U^{\perp} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1-r)^{\oplus(r-1)} \to \\ \cdots \to \wedge^{n-r-4}U^{\perp} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-2)^{\oplus 2} \to \wedge^{n-r-3}U^{\perp} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(-1) \to \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X} \to 0,\end{aligned}$$

and its hypercohomology spectral sequence proves $H^{>0}(\mathbb{P}(U), \mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)/X}) = 0$.

It remains to show that $F_r(X)$ is nonempty for $n \geq 2r+2$. By Bertini theorem a general linear section $X' = X \cap \mathbb{P}^{2r+2}$ is smooth and obviously $F_r(X') \subset F_r(X)$, so we may assume $n = 2r+2$. In this case the scheme $F_r(X)$ is finite and by intersection theory its length is equal to

$$\mathrm{c}_{(r+1)(r+2)}(S^2\mathcal{U}^{\vee} \oplus S^2\mathcal{U}^{\vee}) = \mathrm{c}_{\binom{r+2}{2}}(S^2\mathcal{U}^{\vee})^2 = 2^{2r+2},$$

in particular, $F_r(X)$ is nonempty. QED

Lemma A.4. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. If $n \geq 2r+3$ the scheme $F_r(X)$ is geometrically connected.*

Proof. We may assume that the field k is algebraically closed and prove connectedness of $F_r(X)$. By Lemma A.3 the scheme $F_r(X)$ is not empty. Let $U_0 \subset V$ be a vector subspace of dimension $r+1$ such that $[U_0] \in F_r(X)$, i.e., $\mathbb{P}(U_0) \subset X$.

First, we prove that there is a hyperplane $H \subset \mathbb{P}(V)$ containing $\mathbb{P}(U_0)$ such that $X \cap H$ is smooth. We use a Bertini argument. Assume $X \cap H$ is not smooth at a point $x \in X \setminus \mathbb{P}(U_0)$; then H is equal to the embedded tangent space $\mathrm{T}_x(Q)$ at x to some quadric Q in the pencil. This means that U_0 is orthogonal to x with respect to Q, i.e., the linear span $\langle \mathbb{P}(U_0), x\rangle$ is contained in Q. Therefore, the map

$$\{(x, Q) \in (X \setminus \mathbb{P}(U_0)) \times \mathbb{P}^1 \mid \langle \mathbb{P}(U_0), x\rangle \subset Q\} \to \mathbb{P}(V^{\vee}), \qquad (x, Q) \mapsto \mathrm{T}_x(Q)$$

is surjective onto the variety of all H containing $\mathbb{P}(U_0)$ such that $X \cap H$ is singular away from $\mathbb{P}(U_0)$. But the source of this map is fibered over $\mathbb{P}^1$ with fiber isomorphic to the quadric in $\mathbb{P}(U_0^{\perp}/U_0)$ induced by Q, hence its dimension is equal to

$$\dim(\mathbb{P}^1) + \dim(U_0^{\perp}/U_0) - 2 = 1 + (n+1-2r-2) - 2 = n - 2r - 2.$$

Since this is less than $\dim(\mathbb{P}(U_0^{\perp})) = n - r - 1$, the dimension of the variety of hyperplanes containing $\mathbb{P}(U_0)$, we conclude that for a general such hyperplane H the intersection $X \cap H$ is smooth away from $\mathbb{P}(U_0)$.

On the other hand, we note that $X \cap H$ is smooth along $\mathbb{P}(U_0)$ if and only if the induced section of the twisted conormal bundle $\mathcal{N}^{\vee}_{\mathbb{P}(U_0)/X}(1)$ has no zeroes. But the sequence (A.2) implies that this vector bundle is globally generated by the space $U_0^{\perp}$ of hyperplanes H containing $\mathbb{P}(U_0)$, hence a general such section has no zeroes as soon as the rank of the bundle is greater than the dimension of the base, i.e.,

$$n - 2 - r > r.$$

Thus, if $n \geq 2r+3$, for a general hyperplane $H \subset \mathbb{P}(V)$ containing $\mathbb{P}(U_0)$ the intersection $X \cap H$ is smooth along $\mathbb{P}(U_0)$.

A combination of the above two observations shows that $X \cap H$ is smooth for a general $H \subset \mathbb{P}(V)$ containing $\mathbb{P}(U_0)$. Iterating this argument we deduce that, if $n \geq 2r+3$, then for a general subspace $V_0 \subset V$ of dimension $2r+4$ containing U_0 the intersection $X \cap \mathbb{P}(V_0)$ is smooth.

Now consider the variety

$$\tilde{F}_r(X) \coloneqq \{(U_0, V_0) \in F_r(X) \times \mathrm{G}(2r+4, V) \mid X \cap \mathbb{P}(V_0) \text{ is smooth}\}.$$

The second projection $\tilde{F}_r(X) \to \mathrm{G}(2r+4, V)$, $(U_0, V_0) \mapsto V_0$, is then a fibration over a dense open subset of the Grassmannian, and by [Reid72, Theorem 4.8] its fiber over a point $[V_0]$ is the Jacobian of the smooth hyperelliptic curve associated to $X \cap \mathbb{P}(V_0)$. In particular, all fibers are connected, hence $\tilde{F}_r(X)$ is connected. On the other hand, the first projection $\tilde{F}_r(X) \to F_r(X)$, $(U_0, V_0) \mapsto U_0$, is surjective, hence $F_r(X)$ is connected as well. QED

A.3. **Springer resolutions.** In this section we work over any field (even characteristic 2 is allowed) and we prove the following general result.

Let $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}^\vee$ be a morphism of vector bundles over a scheme Z of ranks $r_\mathcal{E}$ and $r_\mathcal{F}$, respectively, and let $\varphi^\vee\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}^\vee$ be its dual morphism. Sometimes it is convenient to (uniformly) consider φ and $\varphi^\vee$ as a linear map $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{O}_Z$. Let

$$D_r = \{\wedge^{r+1}\varphi = 0\} = \{\wedge^{r+1}\varphi^\vee = 0\} \subset Z$$

be the rank r degeneracy locus of the morphism φ (or, equivalently, of its dual $\varphi^\vee$), where $\wedge^{r+1}\varphi\colon \wedge^{r+1}\mathcal{E} \to \wedge^{i+1}\mathcal{F}^\vee$ and $\wedge^{r+1}\varphi^\vee\colon \wedge^{r+1}\mathcal{F} \to \wedge^{i+1}\mathcal{E}^\vee$ are the wedge powers of φ and $\varphi^\vee$. Note that $D_r \subset Z$ is a closed subscheme and $D_{r-1} \subset D_r$ for each r.

For each closed point $z \in D_r$ let $k(z)$ be the residue field of z, let $\varphi_z\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z^\vee$ be the fiber of φ at z, and let

$$K_{\mathcal{E},z} \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_z) \subset \mathcal{E}_z \qquad \text{and} \qquad K_{\mathcal{F},z} \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_z^\vee) \subset \mathcal{F}_z$$

be the kernels of φ_z and $\varphi_z^\vee$ respectively. For any tangent vector to Z at z, i.e., for an embedding $\tau\colon \operatorname{Spec}(k(z)[\varepsilon]/\varepsilon^2) \to Z$ that takes the closed point to z, consider the pullback $\tau^*\varphi\colon \tau^*\mathcal{E} \to \tau^*\mathcal{F}^\vee$. Trivializing the bundles $\tau^*\mathcal{E}$ and $\tau^*\mathcal{F}$, we can write $\tau^*\varphi$ as $\varphi_z + \varepsilon\varphi_\tau$, where $\varphi_\tau\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z^\vee$ is a $k(z)$-linear map, which is well defined (i.e., does not depend on the choice of the trivializations) modulo φ_z. Again, sometimes it is more convenient to consider φ_τ as a linear map $\mathcal{E}_z \otimes \mathcal{F}_z \to k(z)$. In particular, the maps $\varphi_\tau|_{K_{\mathcal{E},z}}\colon K_{\mathcal{E},z} \to \mathcal{F}_z^\vee$ and $\varphi_\tau^\vee|_{K_{\mathcal{F},z}}\colon K_{\mathcal{F},z} \to \mathcal{E}_z^\vee$ are well defined.

We will say that φ is s-regular at z if for any s-dimensional subspace $U \subset K_{\mathcal{E},z}$ the morphism

$$\text{(A.3)}\quad T_zZ \to \operatorname{Hom}(K_{\mathcal{F},z}, \mathcal{E}_z^\vee) \to \operatorname{Hom}(K_{\mathcal{F},z}, U^\vee) = U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee, \quad \tau \mapsto \varphi_\tau|_{U \otimes K_{\mathcal{F},z}}$$

is surjective. We define s-regularity of $\varphi^\vee$ analogously.

Remark A.5. A morphism φ is $(r_\mathcal{E} - r)$-regular at a geometric point $z \in D_r \setminus D_{r-1}$ if and only if its dual $\varphi^\vee$ is $(r_\mathcal{F} - r)$-regular at the point z. Indeed, both properties are equivalent to the surjectivity of the natural morphism $T_zZ \to K_{\mathcal{E},z}^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$.

Consider the relative Grassmannians

$$p_\mathcal{E}\colon \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \to Z \qquad \text{and} \qquad p_\mathcal{F}\colon \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{F} - r, \mathcal{F}) \to Z,$$

their tautological subbundles $\mathcal{U}_\mathcal{E} \subset p_\mathcal{E}^*\mathcal{E}$ and $\mathcal{U}_\mathcal{F} \subset p_\mathcal{F}^*\mathcal{F}$, and the subschemes

$$\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \subset \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{E} - r, \mathcal{E}) \qquad \text{and} \qquad \widetilde{D}_{r,\mathcal{F}} \subset \mathrm{G}_Z(r_\mathcal{F} - r, \mathcal{F})$$

defined as the zero loci of the composed maps

$$\mathcal{U}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow p_{\mathcal{E}}^*\mathcal{E} \xrightarrow{p_{\mathcal{E}}^*\varphi} p_{\mathcal{E}}^*\mathcal{F}^\vee \qquad \text{and} \qquad \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \hookrightarrow p_{\mathcal{F}}^*\mathcal{F} \xrightarrow{p_{\mathcal{F}}^*\varphi^\vee} p_{\mathcal{F}}^*\mathcal{E}^\vee.$$

We abusively call these schemes the Springer resolutions of D_r, even if they are not smooth.

Proposition A.6. *Let k be a field. Let Z be a smooth scheme and let $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}^\vee$ be a morphism of vector bundles over Z. The Springer resolution*

$$\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \subset \mathrm{G}_Z(r_{\mathcal{E}} - r, \mathcal{E})$$

is smooth over k of expected codimension $(r_{\mathcal{E}} - r)r_{\mathcal{F}}$ if and only if the morphism φ is $(r_{\mathcal{E}} - r)$-regular at every geometric point of D_r.

Moreover, the projection $p_{\mathcal{E}}$ induces a proper surjective morphism $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ with geometrically connected fibers, which is an isomorphism over $D_r \setminus D_{r-1}$; in particular, if $D_r \setminus D_{r-1}$ is dense in D_r, this morphism is birational.

Proof. We may (and will) assume that k is algebraically closed.

Let (z, U) be a point of $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}}$, i.e., $U \subset K_{\mathcal{E},z}$ is a subspace of dimension $r_{\mathcal{E}} - r$. Since the morphism $\varphi_z\colon \mathcal{E}_z \to \mathcal{F}_z^\vee$ vanishes on U, its rank is at most r, hence $z \in D_r$. This proves that the morphism $p_{\mathcal{E}}$ factors through D_r.

Furthermore, at the point (z, U) the differential $\mathrm{ds}_{\mathcal{E}}$ of the section

$$\mathrm{s}_{\mathcal{E}} \in \Gamma(\mathrm{G}_Z(r_{\mathcal{E}} - r, \mathcal{E}), \mathcal{U}_{\mathcal{E}}^\vee \otimes p_{\mathcal{E}}^*\mathcal{F}^\vee)$$

defining the subscheme $\widetilde{D}_{r,\mathcal{E}}$ is a morphism $T_{(z,U)}\mathrm{G}_Z(r_{\mathcal{E}}-r, \mathcal{E}) \to U^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$. Consider the natural exact sequence

$$0 \to U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) \to T_{(z,U)}\mathrm{G}_Z(r_{\mathcal{E}} - r, \mathcal{E}) \to T_z Z \to 0$$

(here the first term is the fiber of the relative tangent bundle of $\mathrm{G}_Z(r_{\mathcal{E}} - r, \mathcal{E})$ over Z). It is easy to see that the restriction of $\mathrm{ds}_{\mathcal{E}}$ to $U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U)$ is the map

$$U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) \to U^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$$

induced by the map $\mathrm{id}_{U^\vee} \otimes \varphi_z\colon U^\vee \otimes \mathcal{E}_z \to U^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$ (recall that $U \subset K_{\mathcal{E},z}$), hence its cokernel is $U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$. Furthermore, the morphism

$$T_z Z \to U^\vee \otimes K_{\mathcal{F},z}^\vee$$

induced by $\mathrm{ds}_{\mathcal{E}}$ coincides with the map (A.3), hence this morphism is surjective if and only if the morphism φ is $(r_{\mathcal{E}} - r)$-regular at z. This proves the first part of the proposition.

To prove the second part, note that the morphism $p_{\mathcal{E}}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ is proper by construction and surjective by definition. Moreover, it is étale over $D_r \setminus D_{r-1}$, because the restriction of $\mathrm{ds}_{\mathcal{E}}$ to the relative tangent space

$$U^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/U) = K_{\mathcal{E},z}^\vee \otimes (\mathcal{E}_z/K_{\mathcal{E},z})$$

is injective, and it is injective over $D_r \setminus D_{r-1}$ because for any point $z \in D_r \setminus D_{r-1}$ the space $K_{\mathcal{E},z}$ has dimension exactly $r_{\mathcal{E}} - r$, hence the only subspace of dimension $r_{\mathcal{E}} - r$ that it contains is the space $U = K_{\mathcal{E},z}$. Therefore, the morphism $p_{\mathcal{E}}\colon \widetilde{D}_{r,\mathcal{E}} \to D_r$ is an isomorphism over $D_r \setminus D_{r-1}$. The last part is obvious. QED

A.4. **Hilbert schemes of quadrics in X.** Let $S_r(X)$ be the Hilbert scheme of quadrics of dimension $r-1$ inside $X \subset \mathbb{P}^n$.

Proposition A.7. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. If $n \geq 2r+1$ the Hilbert scheme $S_r(X)$ is a smooth geometrically connected scheme of expected dimension $(r+1)(n-\frac{3}{2}r-1)+1$ over k. Moreover, $S_r(X)$ is birational to $G_r(X)$, and if $F_r(X) = \varnothing$ then $S_r(X) \cong G_r(X)$. Finally, the subscheme $S_r^\circ(X) \subset S_r(X)$ parameterizing smooth quadrics is open and dense in $S_r(X)$.*

Proof. Consider the Grassmannian $Z := \mathrm{G}(r+1, V)$, let $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}$ be its tautological bundle, and consider the morphism

$$\mathcal{E} := \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} S^2\mathcal{U}^\vee =: \mathcal{F}^\vee$$

induced by the pencil of quadrics. Note that the zero locus D_0 of φ is precisely the Hilbert scheme $F_r(X)$. Let $D = D_1$ be the degeneracy locus of φ, so that we have the inclusions

$$F_r(X) = D_0 \subset D_1 \subset \mathrm{G}(r+1, V).$$

Consider the Springer resolutions of D_1 :

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathrm{G}(r+1, V) \quad \text{and} \quad \widetilde{D}_{1,\mathcal{F}} \subset \mathrm{G}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(r_{\mathcal{F}}-1, S^2\mathcal{U}) \cong \mathbb{P}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(S^2\mathcal{U}^\vee),$$

First, note that by definition $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}}$ is the zero locus of the global section of the vector bundle $\mathcal{O}(1) \boxtimes S^2\mathcal{U}^\vee$, induced by φ. Thus,

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}} \cong G_r(X). \tag{A.4}$$

On the other hand, note that $\mathbb{P}_{\mathrm{G}(r+1,V)}(S^2\mathcal{U}^\vee)$ is the Hilbert scheme of $(r-1)$-dimensional quadrics in $\mathbb{P}(V)$, and its subscheme $\widetilde{D}_{1,\mathcal{F}}$ parameterizes those quadrics that lie on X, hence

$$\widetilde{D}_{1,\mathcal{F}} \cong S_r(X). \tag{A.5}$$

Now we check that both φ and $\varphi^\vee$ satisfy the assumptions of Proposition A.6 for $r = 1$. Note that

$$r_{\mathcal{E}} - r = 2 - 1 = 1 \qquad \text{and} \qquad r_{\mathcal{F}} - r = \tbinom{r+1}{2} - 1 = \tfrac{r^2+3r}{2}.$$

By Proposition A.1 and (A.4) the scheme $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}}$ is smooth, hence by Proposition A.6 the morphism φ is 1-regular at every geometric point of $D_1 \setminus D_0$, and by Remark A.5 the dual morphism $\varphi^\vee$ is $((r^2+3r)/2)$-regular at every geometric point of $D_1 \setminus D_0$. On the other hand, Lemma A.3 implies that the natural morphism

$$T_z Z = U^\vee \otimes (V/U) \to S^2U^\vee \oplus S^2U^\vee = \mathcal{E}_z^\vee \otimes \mathcal{F}_z^\vee$$

is surjective at every geometric point $z = [U]$ of $D_0 = F_r(X)$, hence the morphism $\varphi^\vee$ is also $((r^2+3r)/2)$-regular at every point of D_0. Applying Proposition A.6 again we conclude that $S_r(X) \cong \widetilde{D}_{1,\mathcal{F}}$ is smooth.

Since $G_r(X)$ is smooth and geometrically connected by Proposition A.1, it is irreducible. It is easy to see that the fibers of $p_{\mathcal{E}} \colon G_r(X) \to D_r$ over $D_0 = F_r(X)$ are isomorphic to $\mathbb{P}^1$, hence

$$\begin{aligned}\dim(p_{\mathcal{E}}^{-1}(D_0)) = \dim(F_r(X)) + 1 = (r+1)(n-2r-2)+1 \\ < (r+1)(n-\tfrac{3}{2}r-1)+1 = \dim(G_r(X)),\end{aligned}$$

hence $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}} \setminus p_{\mathcal{E}}^{-1}(D_0)$ is dense in $\widetilde{D}_{1,\mathcal{E}}$, and hence $D_1 \setminus D_0$ is dense in D_1. Therefore, the morphisms $G_r(X) \to D_1$ and $S_r(X) \to D_1$ are both birational, hence $S_r(X)$ is birational to $G_r(X)$, and even isomorphic if $D_0 = F_r(X) = \varnothing$. It also follows that

$$\dim(S_r(X)) = \dim(G_r(X)) = (r+1)(n - \tfrac{3}{2}r - 1) + 1.$$

Moreover, the above argument shows that $D_1 \setminus D_0$ is geometrically irreducible and its (isomorphic) preimage is dense in $S_r(X)$, hence $S_r(X)$ is geometrically connected.

Finally, we consider the subscheme $S_r^\circ(X) \subset S_r(X)$ parameterizing smooth quadrics. Since smoothness is an open condition, $S_r^\circ(X)$ is open in $S_r(X)$, so we only need to check it is dense, and since $S_r(X)$ is irreducible, it is enough to check that $S_r^\circ(X) \neq \varnothing$. For this we may (and will) assume that k is algebraically closed.

Let $Q \subset \mathbb{P}^n$ be any smooth quadric containing X. Let $F_r(Q)$ be the Hilbert scheme of linear spaces $\mathbb{P}^r$ (linearly embedded into $\mathbb{P}^n$) contained in Q, and let $L_r(Q) \subset Q \times F_r(Q)$ be the universal linear space. Note that $F_r(Q)$ and $L_r(Q)$ are homogeneous spaces of the orthogonal group associated with Q ; in particular, the projection $L_r(Q) \to Q$ is a smooth morphism. Therefore, $L_r(Q) \times_Q X$ is smooth over k. On the other hand, the projection

$$L_r(Q) \times_Q X \to F_r(Q)$$

is a quadric fibration. If it is not flat then $F_r(X) \neq \varnothing$, hence X contains a $\mathbb{P}^r$, and a fortiori a smooth quadric of dimension $r-1$. On the other hand, if it flat then Lemma A.9 below implies that there is a k-point $[\mathbb{P}^r]$ of $F_r(Q)$ such that the fiber over it is a smooth quadric of dimension $r-1$. It remains to note that this fiber is the intersection $X \cap \mathbb{P}^r$, hence a smooth quadric inside X. QED

Remark A.8. Let $SF_r(X) \subset S_r(X)$ be the subscheme of quadrics contained in X together with their linear span. Then one can check that there is a diagram of birational maps

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}^1 \times F_r(X)}(G_r(X)) \arrow[r, equal] \arrow[dl] & \mathrm{Bl}_{SF_r(X)}(S_r(X)) \arrow[dr] & \\ G_r(X) & & & S_r(X), \end{tikzcd}$$

where the diagonal arrows are blowups, and that the induced birational map

$$S_r(X) \dashrightarrow G_r(X)$$

is a standard flip.

In the proof of Proposition A.7 we used the following lemma.

Lemma A.9. *Let k be a field of characteristic not equal to 2. Let $f\colon \mathcal{Q} \to Z$ be a flat quadric fibration. If $\mathcal{Q}$ and Z are smooth over k there is a dense open subset $Z_0 \subset Z$ such that the morphism $\mathcal{Q}_{Z_0} \to Z_0$ is smooth.*

Proof. We will argue by induction on relative dimension of $\mathcal{Q}$ over Z.

If $\dim(\mathcal{Q}/Z) = 0$, the map f is a double covering, and since characteristic of k is not equal to 2, we can locally represent $\mathcal{Q}$ as a hypersurface $\{y^2 = \varphi(z)\} \subset \mathbb{A}^1 \times Z$, where $\varphi(z)$ is not a zero divisor. Therefore, the subset $Z_0 = \{\varphi(z) \neq 0\} \subset Z$ is the required dense open subset.

Now assume $\dim(\mathcal{Q}/Z) > 0$. The question is local over Z, so we may assume that $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V) \times Z$ is given by a quadratic equation in homogeneous coordinates of $\mathbb{P}(V)$ with coefficients functions on Z. Moreover, shrinking Z if necessary we can choose a point $P_0 \in \mathbb{P}(V)$ such that $(P_0 \times Z) \cap \mathcal{Q} = \varnothing$. Consider the linear projection $\mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V')$ with center P_0, and the induced morphism

$$\pi\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{P}(V') \times Z.$$

The choice of the point P_0 ensures that π is a double covering, and its branch divisor $\mathcal{Q}' \subset \mathbb{P}(V') \times Z$ is a flat quadric fibration over Z. The smoothness of $\mathcal{Q}$ over k implies the smoothness of $\mathcal{Q}'$ over k. But $\dim(\mathcal{Q}'/Z) = \dim(\mathcal{Q}/Z) - 1$, hence by induction hypothesis there is a dense open subset $Z_0 \subset Z$ such that $\mathcal{Q}'_{Z_0} \to Z_0$ is smooth. It is clear that $\mathcal{Q}_{Z_0}$ is the double covering of $\mathbb{P}(V') \times Z_0$ ramified over $\mathcal{Q}'_{Z_0}$, hence it is also smooth over Z_0. QED

Références

[AC17] C. Araujo et C. Casagrande, On the Fano variety of linear spaces contained in two odd-dimensional quadrics, Geometry & Topology **21** (2017) 3009-3041. 10

[ABB14] A. Auel, M. Bernardara, M Bolognesi, Fibrations in complete intersections of quadrics, Clifford algebras, derived categories, and rationality problems. J. Math. Pures Appl. (9) 102 (2014), no. 1, 249–291. 21, 22

[CT88] J.-L. Colliot-Thélène, *Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 88-89, Progr. Math., t. 91 (1990), 43–55. 2, 12

[CTCS80] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. J. reine angew. Math. **320** (1980), 150–191. 18

[CTSa80] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, in *Journées de géométrie algébrique d'Angers* (Juillet 1979), éd. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff (1980), 223–237. 1

[CTSaSD87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I*, J. reine angew. Math. **373** (1987) 37-107. *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II*, J. reine angew. Math. **374**(1987), 72-168. 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 27

[CTSk93] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, Groupes de Chow des zéro-cycles des fibrés en quadriques, Journal of K-theory **7** (1993) 477–500. 5

[CTSk21] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, The Brauer–Grothendieck group, *The Brauer–Grothendieck group*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, **71**. Springer, Cham, 2021. 1, 5

[CoTs88] D. F. Coray et M. A. Tsfasman, Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988) 25–87. 9

[CV21] B. Creutz and B. Viray, Quadratic points on intersections of two quadrics, arXiv :2106.08560v4 [math.NT], to appear in Algebra & Number Theory. 2, 3, 4, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 27

[DM98] O. Debarre et L. Manivel, Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète, Math. Annalen **312** (1998) 549–574. 10

[FK18] A. Fonarev et A. Kuznetsov, Derived categories of curves as components of Fano manifolds. J. Lond. Math. Soc. (2) 97 (2018), no. 1, 24–46. 29

[Ha94] D. Harari, Méthode des fibrations et obstruction de Manin. Duke Math. J. 75 (1994), no. 1, 221–260. 2, 12, 13

[HWW21] Y. Harpaz, D. Wei et O. Wittenberg, Rational points on fibrations with few non-split fibres, prépublication, 2021. 13

[H24] H. Hasse, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper. J. reine angew. Math. **153** (1924), 113–130. 12

[HT21] B. Hassett et Yu. Tschinkel, Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène. L'Enseignement mathématique **67** (2021), no. 1-2, 1-44. 4, 22

[HB18] R. Heath-Brown, Zeros of pairs of quadratic forms, J. reine angew. Math. **739** (2018), 41–80. 2, 4, 5, 14, 26

[IP22] J. Iyer et R. Parimala, Period-index problem for hyperelliptic curves, tapuscrit, Janvier 2022. 2, 20, 23, 27

[Ka08] B. Kahn, Formes quadratiques sur un corps, Cours spécialisés **15**, Société mathématique de France 2008. 5, 22

[Ku08] A. Kuznetsov, Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics. Adv. Math. 218 (2008), no. 5, 1340-1369. 30

[Ku11] A. Kuznetsov, Scheme of lines on a family of 2-dimensional quadrics : geometry and derived category. Math. Z. 276 (2014), no. 3–4, 655–672. 28

[Lam73] T. -Y. Lam, The Algebraic Theory of Quadratic Forms, Benjamin/Cummings, 1973. 5, 13

[Lam05] T. -Y. Lam, Introduction to Quadratic Forms over Fields, Graduate Studies in Mathematics **67**, Amer. Math. Soc. (2005). 5, 13

[Leep] D. Leep, The Amer–Brumer theorem over arbitrary fields, prépublication. 6

[Li68] S. Lichtenbaum, The Period-Index Problem for Elliptic Curves, Amer. J. Math. **90**, no. 4 (1968) 1209–1223. 4, 14

[Li69] S. Lichtenbaum, Duality Theorems for Curves over p-adic Fields, Invent. math. **7** (1969) 120–136. 4, 14, 16

[N75] P.E. Newstead, Rationality of moduli spaces of stable bundles, Math. Ann.**215** (1975), 251–268 10

[Reid72] M. Reid. The complete intersection of two or more quadrics, Thesis, Trinity College, Cambridge, June 1972. 6, 21, 32

[Sal88] P. Salberger, Zero-cycles on rational surfaces over number fields, Invent. math. 91 (1988) 505–524. 2, 12

[Sal89] P. Salberger, Some new Hasse principles for conic bundle surfaces, in Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–1988, (1989) 283-305. 2, 12

[Sal93] P. Salberger, On the intersection of two quadrics containing a conic, preprint (1993) arXiv :2305.02289 2, 3, 12, 13

[SalSk91] P. Salberger et A.N. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, Duke Math. J. **63** no. 2 (1991) 517–536. 2

[ZT17] Zhiyu Tian, Hasse principle for three classes of varieties over global function fields. Duke Math. J. **166** (2017), no. 17, 3349–3424. 2

[XW18] Xiaoheng Wang, Maximal linear spaces contained in the base loci of pencils of quadrics. Alg. Geom. **5** (3) (2018) 359–397. 10, 14, 15, 19, 21, 23, 25

[Wi07] O. Wittenberg, Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1, Springer LNM **1901** (2007). 2

[Wi15] O. Wittenberg, Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields in *Algebraic Geometry : Salt Lake City 2015*, Part 2, p. 597– 635, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **97**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. 1

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: `jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr`

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Laboratory of Algebraic Geometry, NRU HSE, Moscow, Russia

Email address: `akuznet@mi-ras.ru`