Unverzweigte dritte Kohomologie und ganzzahlige Hodge-Vermutung

(Gemeinsame Arbeit mit Claire Voisin)

Jean-Louis Colliot-Thélène (CNRS et Université Paris-Sud)

Algebraische Geometrie und Arithmetik
Essen
16-20 Februar, 2010

Sei $X/\mathbb{C}$ eine projektive glatte Mannigfaltigkeit der Dimension d.
Sei $H^i_B(X, R(j)) := H^{2i}_B(X(\mathbb{C}), R(j))$, wobei $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, und $R(j) = R \otimes (\mathbb{Z}.(2\pi\sqrt{-1})^{\otimes i})$.
Für alle $i \geq 0$, es gibt Zykelabbildungen mit Werten in der Betti Kohomologie

$$\mathrm{c}^i : CH^i(X) \to H^{2i}_B(X, \mathbb{Z}(i)).$$

Sei $H^{2i}_{alg}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2i}_B(X, \mathbb{Z}(i))$ das Bild.
Mittels der Einbettung $H^{2i}_B(X, \mathbb{Q}) \subset H^{2i}_B(X, \mathbb{C}(i))$ wird die Untergruppe $H^{2i}_{Hdg}(X, \mathbb{Q})$ der Klassen vom Typ (i, i) definiert.

Die Gruppe $H^{2i}_{Hdg}(X,\mathbb{Z}) \subset H^{2i}_B(X,\mathbb{Z}(i))$ ist als Urbild von $H^{2i}_{Hdg}(X,\mathbb{Q})$ in $H^{2i}_B(X,\mathbb{Z}(i))$ definiert.
Dann ist $H^{2i}_{alg}(X,\mathbb{Z}) \subset H^{2i}_{Hdg}(X,\mathbb{Z}) \subset H^{2i}_B(X,\mathbb{Z}(i))$
Nach der klassischen Hodge-Vermutung sollte der Quotient $H^{2i}_{Hdg}(X,\mathbb{Z})/H^{2i}_{alg}(X,\mathbb{Z})$ endlich sein.

Triviale Bemerkung : Die Einbettung

$$Z^{2i}(X) := H^{2i}_{Hdg}(X,\mathbb{Z})/H^{2i}_{alg}(X,\mathbb{Z}) \subset H^{2i}_B(X,\mathbb{Z}(i))/H^{2i}_{alg}(X,\mathbb{Z})$$

induziert einen Isomorphismus auf Torsionsgruppen.

Man weiß :

Für $i = 0, 1, d$ ist $Z^{2i}(X) = 0$.
$i = 1$: Satz von Lefschetz über $(1,1)$-Klassen.
In diesem Fall hat man eine Einbettung $NS(X) \subset H^2_B(X, \mathbb{Z}(1))$, die einen Isomorphismus $NS(X)\{\mathrm{tor}\} \xrightarrow{\simeq} H^2_B(X, \mathbb{Z}(1))\{\mathrm{tor}\}$ induziert.

Für $i = d - 1$ ist $Z^{2i}(X)$ endlich (folgt aus dem schweren Satz von Lefschetz und dem Fall $d = 1$).

Für $i = 2$, gegeben eine Varietät V der Dimension 3 mit einem Morphismus $f : V \to X$, so daß $f_* : \mathrm{CH}_0(V) \to \mathrm{CH}_0(X)$ surjektiv ist, dann ist $Z^4(X) = H^4_{Hdg}(X, \mathbb{Z})/H^4_{alg}(X, \mathbb{Z})$ endlich (Bloch-Srinivas).

Man weiß, daß die integrale Hodge-Vermutung allgemein nicht gilt : es gibt Beispiele, wo $Z^4(X) = H^4_{Hdg}(X, \mathbb{Z})/H^4_{alg}(X, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Genauer : es gibt Beispiele (Atiyah-Hirzebruch), wo die endliche Gruppe $Z^4(X)\{\mathrm{tors}\} \neq 0$.

Meistens sagt man das, und dann, Schluß.

Fragen, die wir trotzdem in diesem Vortrag besprechen wollen :

Gibt es eine systematische Methode, die Gruppe $Z^4(X)\{\mathrm{tors}\}$ **zu berechnen ?**

Gibt es Klassen von Varietäten, für welche $Z^4(X)\{\mathrm{tors}\} = 0$ **?**
[C. Voisin hat dies für rationale Varietäten bewiesen.]

Wenn X **rational zusammenhängend ist, ist die endliche Gruppe** $Z^4(X) = 0$ **?** (Frage von C. Voisin, 2004)

Diese Fragen werden wir teilweise beantworten. Wir werden uns auf Methoden und Ergebnisse der algebraischen K-Theorie stützen.

Bloch–Ogus-Theorie und Betti-Kohomologie (1974)

Sei X eine komplexe Varietät. Sei X_{cl} die klassische Topologie auf $X(\mathbb{C})$. Es gibt einen Morphismus von Siten $h : X_{cl} \to X_{Zar}$. Eine abelsche Gruppe A definiert eine konstante Garbe A auf $X(\mathbb{C})$. Für $i \in \mathbb{N}$, die Garbe

$$\mathcal{H}^i(A) := R^i h_* A$$

auf X_{Zar} ist die Garbe, die zur Prägarbe $U \mapsto H^i_B(U, A)$ assoziiert ist.

Es gibt die Spektralfolge

$$E_2^{pq} = H^p(X_{Zar}, \mathcal{H}^q(A)) \Longrightarrow H^n_B(X, A).$$

Sei $i_D : D \hookrightarrow X$ eine integrale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, mit Funktionenkörper $\mathbb{C}(D)$.
Sei

$$H^i(\mathbb{C}(D), A) := \varinjlim_{U \subset D, U \neq \emptyset} H^i(U(\mathbb{C}), A).$$

Sie definiert eine konstante Garbe auf D, die ihrerseits die Garbe $i_{D_*} H^i(\mathbb{C}(D), A)$ auf X_{Zar} definiert.
Falls $E \subset D$ der Kodimension 1 ist, dann gibt es eine Residuenabbildung

$$H^i(\mathbb{C}(D), A) \to H^{i-1}(\mathbb{C}(E), A(-1)).$$

Hauptsatz der Bloch–Ogus Theorie (Gersten-Vermutung für Kohomologie)

Sei X eine glatte irreduzible Varietät über $\mathbb{C}$. Dann gibt es für alle $i \in \mathbb{N}$ eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \to \mathcal{H}^i_X(A) \to i_{X*}H^i(\mathbb{C}(X), A) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\substack{D \text{ integral} \\ \mathit{codim}\, D=1}} i_{D*}H^{i-1}(\mathbb{C}(D), A(-1))$$

$$\xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\substack{D \text{ integral} \\ \mathit{codim}\, D=i}} i_{D*}A_D(-i) \to 0.$$

Hier werden die Abbildungen ∂ mittels der obigen Residuenabbildungen definiert.

Definition
Sei X eine komplexe Varietät, und A eine abelsche Gruppe. Die i-te *unverzweigte Kohomologiegruppe* von X mit Werten in A ist die Gruppe

$$H^i_{nr}(X, A) := H^0(X, \mathcal{H}^i(X, A)).$$

Sei X über $\mathbb{C}$ irreduzibel, glatt und projektiv. Vor der Bloch-Ogus-Theorie verstand man schon H^1_{nr} und H^2_{nr} (Grothendieck).

$$H^2_{nr}(X, \mu_n) \simeq \mathrm{Br}(X)[n] \qquad \text{birational} \quad \text{invariant}$$

Exakte Sequenz

$$0 \to NS(X) \to H^2_B(X, \mathbb{Z}(1)) \to H^2_{nr}(X, \mathbb{Z}(1)) \to 0.$$

$$H^2_{nr}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{(b_2-\rho)}.$$

Exakte Sequenz

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(b_2-\rho)} \to H^2_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^3_B(X, \mathbb{Z})\{\mathrm{tor}\} \to 0.$$

und $b_2 - \rho = 0$ dann und nur dann, wenn $H^2(X, O_X) = 0$.

Aus dem Haupsatz der Bloch–Ogus-Theorie folgt :
Sei X glatt und irreduzibel. Dann ist

$$H^i_{nr}(X, A) = Ker[H^i(\mathbb{C}(X), A) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\substack{D \text{ integral} \\ codim\, D=1}} H^{i-1}(\mathbb{C}(D), A(-1))].$$

Im Besonderen : Wenn $U \subset X$ alle Punkte der Kodimension 1 enthält, dann hat man $H^i_{nr}(X, A) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(U, A)$.

Woraus folgt : wenn X und Y glatt, irreduzibel, projektiv und birational zueinander sind, dann ist $H^i_{nr}(X, A) \simeq H^i_{nr}(Y, A)$. Für $i \geq 1$ verschwinden diese Gruppen auf $X = \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Weiter :

Sei X glatt. Dann ist $H^r(X_{Zar}, \mathcal{H}^i(A)) = 0$ für $r > i$.

Sei X über $\mathbb{C}$ glatt, irreduzibel, projektiv. Dann hat man

$$\mathrm{CH}^i(X)/n \xrightarrow{\simeq} H^i_{Zar}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}/n(i)))$$

und

$$\mathrm{CH}^i(X)/\mathrm{alg} \xrightarrow{\simeq} H^i_{Zar}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(i))).$$

Sei X über $\mathbb{C}$ glatt, irreduzibel. Sei A eine abelsche Gruppe. Exakte Sequenz

$$H^3(X(\mathbb{C}), A) \to H^3_{nr}(X, A) \xrightarrow{d_2} H^2(X_{Zar}, \mathcal{H}^2_X(A)) \to H^4(X(\mathbb{C}), A)$$

Sei X überdies projektiv. Dann hat man die exakte Sequenz :

$$H^3_B(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2)) \to CH^2(X)/alg \xrightarrow{c^2} H^4_B(X, \mathbb{Z}(2))$$

Also (Definition von $\mathrm{Griff}^2(X)$)

$$0 \to \mathrm{Griff}^2(X) \to CH^2(X)/alg \xrightarrow{c^2} H_B^4(X, \mathbb{Z}(2))$$

und

$$H_B^3(X, \mathbb{Z}(2)) \to H_{nr}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Griff}^2(X) \to 0$$

Bloch–Kato-Vermutung

F Körper der Characteristik Null.
Abbildung (Tate) von der Milnor-K-Theorie zur Galois-Kohomologie :

$$K_i^M(F)/n \longrightarrow H^i(F, \mu_n^{\otimes i})$$

Vermutung $BK_{i,n}$: Es ist immer ein Isomorphismus.

Wenn dies für alle i und n gilt, dann ist

$$H^{i+1}(F, \mu_n^{\otimes i}) \hookrightarrow H^{i+1}(F, \mu_{nm}^{\otimes i})$$

also

$$H^{i+1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = \bigcup_n H^{i+1}(F, \mu_n^{\otimes i}).$$

$$K_i^M(F)/n \xrightarrow{\simeq} H^i(F, \mu_n^{\otimes i}) \quad ?$$

Was bekannt ist :

$i = 1$: Hilberts Satz 90 (Kummertheorie)
$i = 2$: Merkurjev und Suslin (auf Russisch, 1982)
$i = 3, n = 2^m$: Merkurjev und Suslin, Rost (1990)
$i > 4, n = 2^m$: Voevodsky (2003)
$i > 4$: Voevodsky, Rost 2003-2010
(Voevodsky, arXiv 0805.4430v2, 10.2.2010)
Die Vermutung wird im Vortrag angenommen

Satz

Sei X eine komplexe Varietät. Multiplikation durch $n > 0$ induziert kurze exakte Sequenze von Zariski Garben

$$0 \to \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}(j)) \stackrel{\times n}{\to} \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}(j)) \to \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}/n(j))) \to 0,$$

also sind die Gruppen $H^i_{nr}(X, \mathbb{Z}(j)) = H^0(X, \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}(j)))$ ohne Torsion.

Folgt aus der Bloch-Kato-Vermutung, und weiterer Arbeit (..., M. Kerz 2009).

Korollar

Sei X eine komplexe, glatte, projektive Varietät. Wenn es eine Varietät Y der Dimension r gibt, so daß die Abbildung $CH_0(Y) \to CH_0(X)$ surjektiv ist, dann ist $H^i_{nr}(X, \mathbb{Z}(j)) = 0$ für $i > r$.

Beweis : Korrespondenzmethode von Bloch-Srinivas zeigt, dass diese Gruppen Torsionsgruppen sind.

Für X glatt, Injektivität von $\mathcal{H}^3(X, \mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}^3(X, \mathbb{Z}(j))$ folgt aus Merkurjev-Suslin: dies ist eine Bemerkung von Bloch und Srinivas (1983). Für $\dim(X) = 3$ ist $\mathcal{H}^4(X, \mathbb{Z}(j)) = 0$ (Lefschetz), also hat man schon die ganze exakte Sequenz. Dies ist eine Bemerkung von Barbieri-Viale (1992).

Jetzt kommen wir zum Hauptsatz des Vortrages.

Sei X eine glatte Varietät über $\mathbb{C}$.

(i) Für $n > 1$, exakte Sequenz

$$0 \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2)))/n \to H^3_{nr}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \to Z^4(X)[n] \to 0$$

(ii) Exakte Sequenz

$$0 \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2)))\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to Z^4(X)\{\mathrm{tor}\} \to 0.$$

Beweis

Weil die Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(X_{Zar}, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(2))) \Longrightarrow H_B^n(X, \mathbb{Z}(2))$$

nach dem Satz von Boch–Ogus im ersten Quadrant liegt, wenn man die Filtrierung auf $H_B^4(X, \mathbb{Z}(2))$, die die Spektralsequenz liefert, betrachtet, dann bekommt man die exakte Sequenz

$$0 \to H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2))) \to [H_B^4(X, \mathbb{Z}(2))/H_{alg}^4(X, \mathbb{Z}(2))]$$
$$\to H^0(X, \mathcal{H}_X^4(\mathbb{Z}(2))).$$

Da die Gruppe $H_{nr}^4(X, \mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{H}_X^4(\mathbb{Z}(2)))$ torsionsfrei ist, erhält man

$$H^1(X, \mathcal{H}_X^3(\mathbb{Z}(2)))\{\mathrm{tor}\} \xrightarrow{\simeq} Z^4(X)\{\mathrm{tor}\}.$$

Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \to \mathcal{H}^3_X(\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}^3_X(\mathbb{Z}(2)) \to \mathcal{H}^3_X(\mu_n^{\otimes 2}) \to 0$$

erhält man die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbb{Z}(2)))/n \to H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mu_n^{\otimes 2})) \\ \to H^1(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbb{Z}(2)))[n] \to 0, \end{aligned}$$

also die angekündigte exakte Sequenze

$$0 \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2)))/n \to H^3_{nr}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \to Z^4(X)[n] \to 0$$

$$0 \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2))) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \to Z^4(X)\{\mathrm{tor}\} \to 0.$$

1) Für Varietäten der Dimension 3 mit $H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}(2))) = 0$, etwa unirationale Varietäten der Dimension 3, wurde dieses Argument schon 1992 (auf Italienisch) von Barbieri-Viale gegeben.

2) Aus der Sequenz und der Bloch–Ogus Theorie schließt man heraus, daß die Gruppe $Z^4(X)\{\mathrm{tor}\}$ birational invariant ist.
C. Voisin hatte schon gemerkt, dass die Gruppen $Z^4(X)$ und $Z^{2d-2}(X)$ birational invariant sind. Ihr Beweis war ganz anders. Sie brachte den Beweis auf den Fall von Aufblasungen von glatten Untervarietäten zurück.

Zur Gruppe $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z})$

Wir haben die exakte Sequenz

$$H^3_B(X,\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X,\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Griff}^2(X) \to 0.$$

Wie schon erwähnt, wenn $CH_0(X)$ von einer Fläche dargestellt ist, dann ist $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z}(2)) = 0$. Dann hat man einen Isomorphismus von endlichen Gruppen

$$H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\simeq} Z^4(X).$$

Frage : Wenn $H^3(X,O_X) = 0$, ist $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z}(2)) = 0$?
Diese Frage hat eine enge Verbindung mit einer Vermutung von Nori und mit der verallgemeinerten Hodge-Vermutung.

Varietäten mit $H^3_{nr}(X, \mu_n^{\otimes 2}) \neq 0$ **oder** $Z^4(X) \neq 0$

Atiyah und Hirzebruch (1962); Totaro (1997) : Topologische Methode. Torsion in $H^4_B(X,\mathbb{Z})$. Kommt nicht von $H^4_{alg}(X,\mathbb{Z})$. Beispiele mit $Dim(X) \geq 7$.

Kollár (1990). Spezialisierungsmethode. Für $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ sehr allgemeine Hyperfläche vom Grad p^3 mit $p \neq 2, 3$, $H^4_B(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ und $H^4_{alg}(X,\mathbb{Z}) \subset p\mathbb{Z}$. Also $Z^4(X) \neq 0$ und $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z}/p) \neq 0$.

Bloch und Esnault (1996); Schoen (2002). Arithmetische Methode (p-adische Kohomologie, Hilberts Irreduzibilitätssatz). Beispiele mit $Dim(X) = 3$. $Griff^2(X)/n \neq 0$, bzw. $Griff^2(X)/n$ unendlich. Also dasselbe für $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z})/n$ und $H^3_{nr}(X,\mathbb{Z}/n)$. Unklar : $Z^4(X) \neq 0$?

Könnte die Lage bei rational zusammenhängenden Varietäten besser sein ? (Frage von C. Voisin, 2004). Antwort (CT/Voisin 2009) : Nein.

Eine unirationale Varietät mit $H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}/2) = Z^4(X)[2] \neq 0$

Sei F ein Körper, $Char.(F) = 0$, $f, g, h \in F^*$, dann Q/F die 3-dimensionale Quadrik, die durch die Gleichung $X^2 - fY^2 - gZ^2 + fgT^2 - hW^2 = 0$ in $\mathbf{P}^5_F$ definiert ist.

Satz (Arason, 1974, auf Deutsch) *Der Kern von* $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ *ist* 0 *oder* $\mathbb{Z}/2$, *und wird von dem Cup-Produkt* $(f) \cup (g) \cup (h)$ *erzeugt.*

[Ähnliche Ergebnisse : Für H^1, Hilbert, für H^2, Witt. Für H^n, $n \geq 4$, Jacob, Rost, Voevodsky.]

Satz (CT/Ojanguren, 1988, auf Französisch) *Sei* $F = \mathbb{C}(x, y, z)$*. Dann kann man solche* $f, g, h = h_1 h_2$ *finden, so daß die Klasse* $(f) \cup (g) \cup (h_1) \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ *beim Übergang zu* $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$ *nicht verschwindet, wird aber auf einem beliebigen glatten* $X/\mathbb{C}$ *mit* $\mathbb{C}(X) = F(Q)$ *unverzweigt.*

Dafür werden Residuen bezüglich diskrete Bewertungen von Rang 1 benutzt.

[Später hat E. Peyre viele andere Beispiele von unirationalen Varietäten mit $H^i_{nr}(X, \mathbb{Z}/n) \neq 0$ für geeignetes i gegeben.]

1-dimensionale Version des Arguments, mit H^1_{nr}
(Abhyankar's lemma – Verzweigung isst Verzweigung auf)

Sei Γ die Kurve $y^2 = x(x-1)(x+1)$. Der Funktionenkörper $L = \mathbb{C}(\Gamma)$ ist eine 0-dimensionale Quadrik über $F = \mathbb{C}(x)$. Die Klasse $(x) \in F^*/F^{*2} = H^1(F, \mathbb{Z}/2)$ verschwindet nicht in L^*/L^2, denn der Kern ist $\mathbb{Z}/2.(x(x-1)(x+1))$, und die Klassen x und $(x(x-1)(x+1))$ haben verschiedene Bewertungen mod. 2 and der Stelle $x-1$ von $\mathbb{C}(x)$. Die Klasse x ist aber unverzweigt in $H^1(L, \mathbb{Z}/2)$, denn ihre Verzweigung in $\mathbb{C}(x)$ wird überall von der Verzweigung von $x(x-1)(x+1)$ absorbiert.

Beispiele von Artin-Mumford (1970) : hier benutzt man die Gruppe $H^2_{nr}(X, \mathbb{Z}/2)$ und als Verzweigungsort kann man eine geeignete Konfiguration von 10 Geraden in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ nehmen. In CT/Ojanguren wird für H^3_{nr} eine geeignete Konfiguration von 36 Ebenen in $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ benutzt.

Satz (2010, CT/Voisin)
Es gibt eine glatte, projektive Varietät X der Dimension 3 mit $H^i(X, O_X) = 0$ für $i > 0$, und $Z^4(X)\{\mathrm{tors}\} \neq 0$.

Für diese Varietät X gibt es eine Faserung $X \to \mathbf{P}^1$ deren allgemeine Faser eine $K3$-Fläche ist.
Der Index $I(X_{eta}/\mathbb{C}(\mathbf{P}^1)) \neq 1$.

Einzelheiten ziemlich kompliziert, im Prinzip geht das Argument auf die Spezialierungsmethode von Kollár zurück.

Varietäten, für welche $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ und $Z^4(X) = 0$.

Zwei Sätze, die mit Methoden der algebraischen K-Theorie bewiesen werden.

Satz 1 (1988) *Sei $X \to S$ ein Morphismus von glatten, projektiven komplexen Varietäten, $dim(S) = 2$, allgemeine Faser ein Kegelschnitt. Dann ist $H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}/2) = 0$.*
Also auch $Z^4(X) = 0$.

Satz 2 *Sei $X \to \Gamma$ ein Morphismus von glatten, projektiven komplexen Varietäten, $dim(\Gamma) = 1$, allgemeine Faser eine rationale Fläche. Dann sind $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und $Z^4(X)$ null.*

Beweis von Satz 1. Die generische Faser X_η ist ein Kegelschnitt C über $F = \mathbb{C}(S)$. Man hat $H^3_{nr}(X, \mathbb{Z}/2)) \subset H^3_{nr}(C, \mathbb{Z}/2)$. Man betrachtet die Lokalisierungssequenz für étale Kohomologie und die Lerayspektralsequenz für $C \to Spec(F)$. Daraus folgt $F^*/Nrd(D^*) \simeq H^3_{nr}(C, \mathbb{Z}/2)$. Aber $F^*/Nrd(D^*) \hookrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ (Merkurjev-Suslin) und $H^3(F, \mathbb{Z}/2) = 0$, da *koh.Dim.*$(\mathbb{C}(S)) \leq 2$.

Beweis von Satz 2. Mittels Methoden der algebraischen K-Theorie zeigt man :

Satz (B. Kahn (1996) $+ \varepsilon$) *Sei F ein Körper der Char. Null und der koh. Dimension ≤ 1. Sei V/F eine glatte, projektive Fläche. Sei $\overline{F}$ ein algebraischer Abschluß, G die absolute Galoisgruppe und $\overline{V} = V \times_F \overline{F}$. Wenn $H^i(V, O_V) = 0$ für $i = 1, 2$ und die integrale Kohomologie hat keine Torsion, dann hat man die exakte Sequenz*

$$0 \to CH^2(V) \to CH^2(\overline{V})^G \to H^3_{nr}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

Für $\overline{V}$ rational, und allgemeiner nach einer Vermutung von Bloch, unter obigen Annnahmen, hat man $deg : CH^2(\overline{V}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$, also

$$\mathbb{Z}/I(V/F) \simeq H^3_{nr}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

wo $I(V/F)$ der Index von V ist.
Die F-birationale Klassifikation der rationalen Flächen (Iskovskikh) zeigt : über $F = \mathbb{C}(\Gamma)$, hat man $V(F) \neq \emptyset$, also $I(V/F) = 1$.
Daraus folgt $H^3_{nr}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = 0$.

Wenn V/F die generische Faser von $X \to \Gamma$ ist, dann ist $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset H^3_{nr}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = 0$. Also Satz 2.

Sätze 1 und 2 sind aber nur spezielle Fälle eines Satzes, der mit Hodgetheoretischen Methoden (infinitesimale Variationen von Hodgestrukturen) beweist wurde.

Satz (Voisin, 2004) *Sei X eine glatte, projektive komplexe Varietät der Dimension 3. Wenn durch jeden Punkt von X eine Kurve von Geschlecht Null läuft, dann ist $Z^4(X) = 0$.*
Also ist $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ für solche Varietäten.

[Das Verschwinden von $Z^4(X)$ hat C. Voisin auch für Calabi-Yau Varietäten der Dimension 3 bewiesen.]

Offene Probleme

Sei X eine glatte, projektive komplexe Varietät, $d = \mathrm{Dim}(X)$.

Wenn X rational zusammenhängend ist, und $d = 4$ oder $d = 5$, ist die endliche Gruppe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = Z^4(X)$ null ?

(Voisin, 2004) Wenn X rational zusammenhängend ist, ist $Z^{2d-2}(X) = 0$?

Allgemeiner, wenn X rational dominiert wird von $S \times Y$, mit S einer Fläche und Y rational zusammenhängend der Dimension $d - 2$, ist $Z^{2d-2}(X) = 0$?

Es gibt parallele Probleme über Varietäten über einem endlichen Körper. Analog von der Hodge-Vermutung ist die Vermutung von Tate.

In dieser Richtung werde ich hier nur ein offenes Problem erwähnen.

Sei $X/\mathbb{F}$ eine glatte projektive Varietät der Dimension d über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$. Sei ℓ prim, und prim zur Charakteristik. Wenn X geometrisch dominiert wird von dem Produkt einer Fläche und einem $\mathbf{P}^{d-2}$, ist die Gruppe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$?

Für 3-dimensionalen Varietäten $X/\mathbb{F}$ mit einer Abbildung $f : X \to S$, wobei S eine Fläche ist und die generische Faser ein Kegelschnitt ist, wurde dies vor kurzem von Parimala und Suresh angekündigt.