Espaces homogènes sur les corps de fonctions de courbes sur un corps local

Travail en commun avec R. Parimala et V. Suresh

Jean-Louis Colliot-Thélène (CNRS et Université Paris-Sud)

Institut Fields pour la recherche dans les sciences mathématiques

École de printemps et atelier sur les torseurs, les motifs et les invariants cohomologiques

Toronto, le 16 mai 2013

Le contexte classique

K corps de nombres, Ω les places de K, K_v complété de K en la place v

$\mathrm{Br}\ K_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, isomorphisme si v place finie

La loi de réciprocité de la théorie du corps de classes globale : on a un *complexe*

$$0 \to \mathrm{Br}\ K \to \oplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}\ K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

qui est de fait une suite exacte.

G un K-groupe algébrique linéaire

$$Ш^1(K,G) = \mathrm{Ker}[H^1(K,G) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(K_v,G)]$$

C'est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes E/K sous G avec $E(K_v) \neq$ pour tout $v \in \Omega$

Théorème (Kneser, Harder, Chernousov)
(i) Si G est un K-groupe semisimple simplement connexe, $Ш^1(K,G) = 0$: le principe de Hasse vaut pour les espaces principaux homogènes.
(ii) Si Z est une variété projective espace homogène d'un K-groupe linéaire connexe, le principe de Hasse vaut pour Z.

Accouplement de Brauer-Manin

X/K variété projective, lisse, géom. connexe. Soit $X(\mathbb{A}_K) = \prod_v X(K_v)$. On note $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}\ X}$ le noyau à gauche de l'accouplement

$$X(\mathbb{A}_K) \times (\mathrm{Br}\ X/\mathrm{Br}\ K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{P_v\}, A) \mapsto \sum_{v \in \Omega} A(P_v) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Obstruction de réciprocité au principe local-global (Manin 1970) : *La loi de réciprocité implique*

$$X(K) \subset X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}\ X} \subset X(\mathbb{A}_K)$$

Théorème (Sansuc)
E/K espace principal homogène de G/K linéaire connexe, $E \subset X$ une compactification lisse. Alors $X(K)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}\, X}$.

Corollaire (Sansuc) *Dans chacun des cas suivants :*
(i) G est un groupe adjoint
(ii) G est quasi-simple
(iii) La K-variété G est K-rationnelle,
on a $\text{Ш}^1(K, G) = 0$ et l'approximation faible vaut pour G.

En effet, dans ces cas, $\mathrm{Br}\, X = \mathrm{Br}\, K$.

On a $\text{Ш}^1(K, \mathbb{Z}/n) = 0$ – via Tchebotarev.

Il existe $G = T$ un K-tore avec $\text{Ш}^1(K, T) \neq 0$ (Hasse)
Il existe μ module galoisien fini avec $\text{Ш}^1(K, \mu) \neq 0$
Il existe μ module galoisien fini avec $\text{Ш}^2(K, \mu) \neq 0$
Il existe G un K-groupe semisimple avec $\text{Ш}^1(K, G) \neq 0$ (Serre)

Sansuc : Les exemples avec T et G s'interprètent au moyen de l'obstruction de Brauer-Manin

Cadre pour cet exposé

$\mathcal{X}$ schéma régulier intègre de dimension 2
K corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{X}$
R anneau local intègre, hensélien, corps résiduel k,
$\mathrm{car}.k$: bonne pour les problèmes considérés.
$p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ un morphisme projectif surjectif

Cas semi-global R anneau de valuation discrète, F corps des fractions de R, fibre générique $\mathcal{X}_\eta/F$ courbe projective lisse géométriquement connexe (situation considérée dans les exposés de Hartmann et Krashen)
Exemples : $K = k((t))(x)$, $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{k[[t]]}$.

Cas local $\dim R = 2$, $p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ birationnel. $0 \in \operatorname{Spec} R$ point fermé, $\mathcal{X}_0/k$ fibre spéciale.
Exemple : $R = k[[x, y]]$, $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} R$.

Ω ensemble des valuations discrètes de rang 1 sur K, T_v hensélisé, K_v corps des fractions de T_v; elles sont centrées sur $\mathcal{X}$, pour $v \in \Omega$ on a $R \subset T_v$

Théorème (Grothendieck, Artin 1968; ...) *Dans le cas local comme dans le cas semi-global, on a*

$$\mathrm{Br}\ K \hookrightarrow \prod_{v\in\Omega} \mathrm{Br}\ K_v.$$

G un K-groupe algébrique linéaire

$$Ш^1(K, G) := \mathrm{Ker}[H^1(K, G) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(K_v, G)]$$

Problème. Soit G/K un groupe algébrique linéaire connexe.
A-t-on $Ш^1(K, G) = 0$?

Problème. Soit μ/K un module galoisien fini. Pour $i = 1, 2...$,
a-t-on $Ш^i(K, \mu) = 0$?

Pour K le corps des fonctions d'une courbe sur un corps p-adique, dans (CT, Parimala, Suresh 2009), on a proposé :

Conjecture. Soit G/K un groupe algébrique semisimple simplement connexe. Alors $Ш^1(K, G) = 0$.

Conjecture. Le principe local-global vaut pour les variétés projectives espaces homogènes de K-groupes linéaires connexes.

Résultats connus avant décembre 2012

• $Ш^1(K, \mathbb{Z}/2) \neq 0$ possible (cas local, Jaworski 2001; cas semi-global, réinterprétation de calcul de S. Saito 1985, voir CT, Parimala, Suresh 2009)
• Cas semi-global $Ш^i(K, \mu_n^{\otimes i-1}) = 0$ pour $i \geq 2$ (Harbater, Hartmann, Krashen 2012)

R complet, $k = \overline{k}$
• Cas semiglobal, G/K linéaire connexe K-*rationnel*, $Ш^1(K, G) = 0$ (Harbater, Hartmann, Krashen 2012)
• Cas local, G/K linéaire connexe simplement connexe, ou adjoint, ou K-*rationnel*, $Ш^1(K, G) = 0$ (CT, Gille, Parimala 2004; Borovoi, Kunyavskiĭ 2004)

Théorème principal de l'exposé (CT, Parimala, Suresh, déc. 2012/janv. 2013)

Soit $k = \mathbb{C}$. *Sur* $K = \mathbb{C}((x))(t)$ *et sur* $K = \mathbb{C}((x,y))$ *,*
(a) il existe un K*-groupe algébrique linéaire connexe* G *avec* $Ш^1(K,G) \neq 0$.
(b) il existe un module galoisien fini μ/K *avec* $Ш^2(K,\mu) \neq 0$.

Pour (a), on a des exemples avec G un K-tore et avec G un K-groupe semisimple.

Réductions

Par réduction des scalaires à la Weil, il suffit d'établir $Ш^1(K, G) \neq 0$ et $Ш^2(K, \mu) \neq 0$ pour K le corps des fonctions d'une courbe convenable sur $\mathbb{C}((t))$ et pour un corps extension finie convenable de $\mathbb{C}((x, y))$.

Réductions connues : *il suffit de trouver un exemple avec un K-tore*, car un exemple sur une ligne en donne un sur la ligne suivante.

- Un exemple avec $Ш^1(K, T) \neq 0$ pour T un K-tore
- Un exemple de module galoisien fini μ avec $Ш^2(K, \mu) \neq 0$
- (Serre) Un exemple de groupe semisimple connexe G/K avec $Ш^1(K, G) \neq 0$.

Quelle obstruction au principle local-global ?

Cas local ou cas semi-global, $\mathcal{X}$ une surface régulière intègre comme ci-dessus, $n \in O_{\mathcal{X}}^{\times}$, on suppose $\mathbb{Z}/n \simeq \mu_n$.
Loi(s) de réciprocité : *complexe* de Bloch-Ogus

$$0 \to H^2(K, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\{\partial_\gamma\}} \oplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\{\partial_{\gamma,x}\}} \oplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n \to 0$$

Homologie de ce complexe (modulo la conjecture de Gersten)

- $\mathrm{Br}\ \mathcal{X}[n] \simeq \mathrm{Br}\ \mathcal{X}_0[n]$, zéro si $k = \overline{k}$,
- sous-groupe de $H^3(\mathcal{X}, \mathbb{Z}/n) \simeq H^3(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z}/n)$, zéro si $k = \overline{k}$,
- $CH_0(\mathcal{X})/n$ zéro car $CH_0(\mathcal{X}) = 0$

"Analogue" de la suite exacte de la théorie du corps de classes

Obstruction de réciprocité

Z/K variété projective, lisse, géométriquement connexe
$\alpha \in \mathrm{Br}\ Z[n]$, $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$
L'application composée

$$\sigma_\alpha : Z(K_\gamma) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}\ K_\gamma[n] \xrightarrow{\partial_\gamma} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/n)$$

est nulle pour presque tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$.
Le composé

$$\rho_\alpha : \prod_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_\gamma) \xrightarrow{\sigma_\alpha} \oplus_\gamma H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\{\partial_{\gamma,x}\}} \oplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/n$$

s'annule sur l'image diagonale de $Z(K)$ dans $\prod_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} Z(K_\gamma)$.

On définit

$$[\prod_{\gamma} Z(K_\gamma)]^{\mathrm{Br}\ Z} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Br}\ Z} \mathrm{Ker}\rho_\alpha.$$

Obstruction de réciprocité

$$Z(K) \subset [\prod_{\gamma} Z(K_\gamma)]^{\mathrm{Br}\ Z} \subset \prod_{\gamma} Z(K_\gamma)$$

analogue de l'obstruction de Brauer-Manin dans notre contexte.

Dans le cas local et dans le cas semi-global, on va exhiber $\mathcal{X}/R$, un K-tore T, un espace principal homogène E de T, une K-compactification lisse Z de E avec $\prod_\gamma Z(K_\gamma) \neq \emptyset$ et $[\prod_\gamma Z(K_\gamma)]^{\mathrm{Br}\ Z} = \emptyset$, et donc $Z(K) = \emptyset$.

Soient $a, b, c \in K^\times$.
On définit le K-tore T par l'équation

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - by_2^2)(x_3^2 - aby_3^2) = 1$$

et E/K par l'équation

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - by_2^2)(x_3^2 - aby_3^2) = c.$$

(longue histoire, voir les exercices de Cassels-Fröhlich)
Soit Z une K-compactification lisse de E. On a $\mathrm{Br}\ Z/\mathrm{Br}\ K = \mathbb{Z}/2$ engendré par l'algèbre de quaternions $\alpha = ((x_1^2 - ay_1^2), b)$. Comme $E(K_\gamma)$ est dense dans $Z(K_\gamma)$, on se contente d'évaluer α sur $E(K_\gamma)$.

Pour tous les $\{P_\gamma\} \in \prod_\gamma E(K_\gamma)$ il faut évaluer les sommes

$$\sum_{x \in \gamma} \partial_{\gamma,x} \partial_\gamma(\alpha(P_\gamma)) \in \oplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/2.$$

On suppose désormais $k = \overline{k}$. Les corps résiduels $\kappa(\gamma)$ sont alors de dimension cohomologique 1, les K_γ sont "comme des corps locaux".

Hensel donne un critère simple pour décider si $E(K_\gamma) \neq \emptyset$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$, l'image de l'application composée

$$E(K_\gamma) \to \mathrm{Br}\ K_\gamma \to \kappa(\gamma)^\times / \kappa(\gamma)^{\times 2}$$

est alors un ensemble explicite formé de 1 ou 2 éléments.

Proposition. *Soit R un anneau semi-local régulier de dimension 2 avec 3 idéaux maximaux m_j, $j = 1, 2, 3$, avec $m_1 = (\pi_2, \pi_3)$ etc. Les π_i définissent les côtés d'un triangle de sommets les m_j. On pose $a = \pi_2\pi_3$, $b = \pi_3\pi_1$, $c = \pi_1\pi_2\pi_3$. Soit E*

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - by_2^2)(x_3^2 - aby_3^2) = c.$$

Alors $E(K) = \emptyset$.

Démonstration. Soient R_i le hensélisé en π_i, et $R_i \subset K_i$, et κ_i le corps résiduel.

On calcule le composé

$$\prod_i E(K_i) \xrightarrow{\alpha} \oplus_i \mathrm{Br}\ K_i[2] \xrightarrow{\{\partial_i\}} \oplus_i \kappa_i^\times/\kappa_i^{\times 2} \xrightarrow{\{\partial_{i,j}\}} \oplus_j \mathbb{Z}/2.$$

On trouve dans $(\mathbb{Z}/2)^3$:
$E(K_1)$ a pour image $(0,0,1)$ et $(0,1,0)$
$E(K_2)$ a pour image $(0,0,0)$ et $(1,0,1)$
$E(K_3)$ a pour image $(0,0,0)$ et $(1,1,0)$
Aucune des sommes verticales de triplets ne fait $(0,0,0)$.
Pour les autres points $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$, on voit que l'image de $E(K_\gamma) \to \kappa_\gamma^\times/\kappa_\gamma^{\times 2}$ est égale à 1, et donc ne contribue pas aux sommes

$$\sum_{m_j \in \gamma} \partial_{\gamma,m_j}\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma)) \in \oplus_j \mathbb{Z}/2.$$

Ainsi $(0,0,0)$ n'est pas dans l'image de l'application composée.

$$\prod_i E(K_i) \xrightarrow{\alpha} \oplus_i \mathrm{Br}\ K_i[2] \xrightarrow{\{\partial_i\}} \oplus_i\ \kappa_i^\times/\kappa_i^{\times 2} \xrightarrow{\{\partial_{i,j}\}} \oplus_j\ \mathbb{Z}/2$$

Par réciprocité sur $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\, R$ on conclut $E(K) = \emptyset$.

Exemple "semi-global"

Soit $R = \mathbb{C}[[t]]$. Soit $\mathcal{X}/R$ le modèle propre régulier minimal (Kodaira, Néron) de la courbe elliptique d'équation affine

$$y^2 = x^3 + x^2 + t^3.$$

La fibre spéciale $\mathcal{X}_0$ est consiste en trois droites L_i formant triangle. On choisit des $\pi_i \in K^\times$ avec $\mathrm{div}(\pi_i) = L_i + D_i$ de façon raisonnable, assurant qu'aucun D_i ne contient un sommet du triangle, et qu'en tout point $x \in \mathcal{X}^{(2)}$ l'un des π_i est inversible. On pose $a = \pi_2\pi_3$, $b = \pi_3\pi_1$, $c = \pi_1\pi_2\pi_3$. Soit E

$$(x_1^2 - ay_1^2)(x_2^2 - by_2^2)(x_3^2 - aby_3^2) = c.$$

Alors $E(K_v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in \Omega$, mais $E(K) = \emptyset$.

Exemple "local"

On prend pour $\mathcal{X}$ une désingularisation de $\operatorname{Spec} R$ avec

$$R = \mathbb{C}[[x, y, z]]/(xyz + x^4 + y^4 + z^4).$$

Et on prend pour E la K-variété d'équation

$$(X_1^2 - yzY_1^2)(X_2^2 - xzY_2^2)(X_3^2 - xyZ_3^2) = xyz(x + y + z).$$

Avec un peu plus d'efforts, on fabrique un exemple semi-global avec
• $R = \mathbb{F}[[t]]$, $\mathbb{F}$ un corps fini convenable,
ou
• R l'anneau des entiers d'un corps p-adique,
$\mathcal{X}$ une R-courbe régulière propre, et E un espace principal homogène d'un K-tore du type vu ci-dessus.

Il faudra confronter ces exemples, qui font intervenir tout le modèle $\mathcal{X}$, avec les résultats de Harari et Szamuely (exposé de Harari) qui ne font intervenir que la fibre générique $\mathcal{X}_\eta/K$.

Aussi bien dans le cas local que dans le cas semi-global, avec un corps résiduel k quelconque, on peut demander si les conjectures mentionnées au début pour k fini (CT, Parimala, Suresh 2009) valent :

Problème. *Soit G/K un groupe algébrique semisimple simplement connexe. A-t-on $\text{Ш}^1(K, G) = 0$?*

Lorsque le corps résiduel k est fini, tant dans le cas semi-global que dans le cas local, ceci a été établi pour beaucoup de types de groupes algébriques indépendamment par Yong Hu et par R. Preeti.

Problème *Le principe local-global vaut-il pour les variétés projectives espaces homogènes de K-groupes linéaires connexes ?*

Le cas des quadriques est établi dans CT, Parimala, Suresh 2009, en utilisant les résultats de Harbater, Hartmann, Krashen et la K-rationalité de $SO(q)$.

On peut se demander si l'obstruction au principe local-global utilisée dans les exemples est la seule obstruction (analogue du théorème de Sansuc).

Théorème. *On se place dans l'une des situations semi-globale ou locale* $p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$. *On suppose que* R *est une* k*-algèbre,* $k = \overline{k}$, *car. 0. Soient* $a, b, c \in K^\times$. *Soit* E *la* K*-variété définie par*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abZ_3^2) = c$$

et Z *une* K*-compactification lisse de* E. *Soit* $\alpha = (X_1^2 - aY_1^2, b) \in \operatorname{Br} Z$. *Supposons que la réunion des supports des diviseurs de* a, b *et* c *sur* $\mathcal{X}$ *est un diviseur à croisements normaux.*
S'il existe une famille $\{P_\gamma\} \in \prod_\gamma E(K_\gamma)$ *telle que la famille* $\{\partial_\gamma(\alpha(P_\gamma))\}$ *soit dans le noyau de*

$$\oplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\{\partial_{\gamma,x}\}} \oplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/2$$

alors $E(K) \neq \emptyset$.

Démonstration (esquisse)

Comme $k = \overline{k}$, on a l'*exactitude* du complexe

$$0 \to \mathrm{Br}\ K[2] \xrightarrow{\{\partial_\gamma\}} \oplus_{\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\{\partial_{\gamma,x}\}} \oplus_{x \in \mathcal{X}^{(2)}} \mathbb{Z}/2 \to 0.$$

On a $\partial_\gamma : \mathrm{Br}\ K[2] \overset{\simeq}{\to} H^1(\kappa(\gamma), \mathbb{Z}/2)$. Il existe donc $\beta \in \mathrm{Br}\ K[2]$ d'image $\alpha(P_\gamma) \in \mathrm{Br}\ K_\gamma$ pour tout $\gamma \in \mathcal{X}^{(1)}$. On montre que l'image de β est nulle dans $\mathrm{Br}\ K[\sqrt{b}]$. [Idée : c'est clair pour $\alpha = (X_1^2 - aY_1^2, b)$, donc pour les $\alpha(P_\gamma)$.]
On a donc $\beta = (b, \rho)$, avec $\rho \in K^\times$.

Ceci permet une *Descente*. On obtient que la K-variété d'équations

$$X_1^2 - aY_1^2 = \rho.(U^2 - bV^2) \neq 0$$

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2) = c.(X_3^2 - abY_3^2) \neq 0,$$

qui se projette sur E, a des solutions dans tous les K_γ.
Un changement de variables
$(U + \sqrt{b}V)(X_2 + \sqrt{b}Y_2) = X_4 + \sqrt{b}Y_4)$ transforme ce système d'équations en

$$X_1^2 - aY_1^2 = \rho.(U^2 - bV^2) \neq 0$$

$$\rho.(X_4^2 - bY_4^2) = c.(X_3^2 - abY_3^2) \neq 0,$$

Ceci est le *produit* de deux K-variétés, chacune cône affine épointé sur une quadrique lisse de dimension 3, donnée par une forme quadratique dont les coefficients sont "à croisements normaux" sur $\mathcal{X}$. On utilise cela pour voir que chacune a des points dans tous les K_v, puis dans K (CTPaSu 2009). Par projection, on obtient $E(K) \neq \emptyset$. QED

Corollaire. *On se place dans l'une des situations semi-globale ou locale* $p : \mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$. *On suppose que* R *est une* k*-algèbre,* $k = \overline{k}$, *car. 0. Soient* $a, b, c \in K^\times$. *Soit* E *la* K*-variété définie par*

$$(X_1^2 - aY_1^2)(X_2^2 - bY_2^2)(X_3^2 - abZ_3^2) = c$$

et Z *une* K*-compactification lisse. Supposons que la réunion des supports des diviseurs de* a, b *et* c *sur* $\mathcal{X}$ *est un diviseur à croisements normaux. Si le diagramme des composantes de la fibre spéciale est un* **arbre**, *et si* $\prod_\gamma E(K_\gamma) \neq \emptyset$, *alors* $E(K) \neq \emptyset$.

Idée de la démonstration : on choisit une famille $\{P_\gamma\}$ cohérente en les γ appartenant à la fibre spéciale $\mathcal{X}_0$.

FIN