UNE REMARQUE

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Lemme 0.1. — *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soient G un F-groupe semisimple simplement connexe E un espace principal homogène de G, et X une E-variété projective lisse géométriquement connexe birationnelle à E. Alors :*

(i) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$ est un isomorphisme.

(ii) La flèche naturelle $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(X)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $g = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Comme G est semisimple simplement connexe, on a

$$\mathrm{Br}F \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Br}G.$$

On a $\overline{F}^* = \overline{F}[E]^*$ et $\mathrm{Pic}(\overline{E}) = 0$. La suite exacte bien connue donne alors $\mathrm{Br}(F) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Br}(E)$. Pour X comme dans l'énoncé, il existe un ouvert non vide $U \subset E$ et un F-morphisme birationnel $U \to X$. Comme X est projectif et E lisse, on peut supposer que U contient tous les points de codimension 1 de E. Par pureté du groupe de Brauer, la restriction $\mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(U)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, la flèche $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(U)$ est injective, comme on voit en passant au corps des fonctions de X et U, et en utilisant l'injectivité de $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(X))$. Ceci établit le point (ii). □

Proposition 0.2. — *Soient k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$, X et Y deux k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes et $f : X \to Y$ un morphisme dominant dont la fibre générique $X_\eta/k(Y)$ est $k(Y)$-birationnelle à un espace principal homogène d'un $k(Y)$-groupe G semisimple simplement connexe.*

Alors :

(i) En tout point y de codimension 1 de Y la fibre $X_y/k(y)$ contient une composante géométriquement intègre de multiplicité 1.

(ii) L'application $f^* : \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(X)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Lorsque la fibre générique X_η contient un ouvert espace homogène principal d'un $k(Y)$-groupe comme dans l'énoncé, l'énoncé (i) est une application du théorème 4.2 de [**1**], dont la démonstration dans le cas qui nous intéresse ici repose essentiellement sur le théorème de Bruhat et Tits que tout espace principal homogène d'un groupe semisimple simplement connexe sur un corps $F((t))$ avec F de dimension cohomologique 1 est trivial. L'énoncé (i) dans le cas général résulte alors de la Proposition 3.9 (b) de [**2**].

On dispose des inclusions $\mathrm{Br}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k(Y))$ et $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(X_\eta)$. D'après le lemme 0.1, la flèche

$$\mathrm{Br}(k(Y)) \to \mathrm{Br}(X_\eta)$$

est un isomorphisme. Quand on combine avec la partie (i), on voit que tout élément α de $\mathrm{Br}(X)$ a son image dans $\mathrm{Br}(X_\eta)$ qui vient d'un unique élément β de $\mathrm{Br}(k(Y)$, et que tous les résidus de β aux points de codimension 1 de Y sont nuls (voir [**2**, §4]), donc qui par la pureté pour le le groupe de Brauer appartient à $\mathrm{Br}(Y)$. □

Corollaire 0.3. — *Soient k un corps, $\mathrm{car}(k) = 0$, H un k-groupe linéaire non nécessairement connexe et $r_i : H \hookrightarrow G_i$ des plongements de H dans des k-groupes semisimples simplement connexes. Alors*

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(G_1/H)) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(k(G_2/H)).$$

Démonstration. — On considère le plongement diagonal $H \to G_1 \times G_2$. La k-variété $X = (G_1 \times G_2)/H$ se projette sur $X_1 = G_1/H$ et sur $X_2 = G_2/H$. La première projection fait de X un G_2-torseur sur X_1, la second de X un G_1-torseur sur X_2. Il existe des k-compactifications lisses X^c, X_1^c et X_2^c de X, X_1 et X_2 et des morphismes $X^c \to X_1^c$ et $X^c \to X_2^c$ étendant $X \to X_1$ et $X \to X_2$. Une application de la proposition 0.2 montre alors $\mathrm{Br}(X_1^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}(X^c)$ et $\mathrm{Br}(X_2^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}(X^c)$. □

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ, Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes, J. Algebraic Geom. 15 (2006), 733–752.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences (cours au CIME, Cetraro, septembre 2007), in Arithmetic Geometry (CIME 2007), Springer LNM 2009 (2011), p. 1–44.

---

25 septembre 2012

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE • *E-mail :* jlct@math.u-psud.fr