Une généralisation du théorème d'Amitsur

On utilise la cohomologie étale. On renvoie à [CTSa87] pour la théorie des tores flasques.
Soit k un corps, k_s une clôture séparable, $G := Gal(k_s/k)$. On note $X_s = X \times_k k_s$.

THÉORÈME. *Soit M un k-groupe de type multiplicatif lisse. Soit X une k-variété lisse géométriquement intègre, telle que $k_s^\times = H^0(X_s, \mathbf{G}_m)$ et $\mathrm{Pic}(X_s) = H^1(X_s, \mathbf{G}_m)$ est de type fini. Soit $k(X)$ le corps des fonctions. L'application de restriction $H^2(k, M) \to H^2(k(X), M)$ a un noyau fini.*

Proposition A [CTSa87 Lemma 0.6, Prop. 1.3]. *Soit k un corps. Soit M un k-groupe de type multiplicatif lisse. Il existe une suite exacte*

$$1 \to M \to F \to P \to 1$$

de k-groupes de type multplicatif avec P un k-tore quasi-triivial et F un k-tore flasque.

Le théorème suivant est une généralisation de l'injectivité du groupe de Brauer d'une variété lisse intègre dans le groupe de Brauer de son corps des fonctions.

Théorème B [CTSa87, Theorem 2.2 (ii) p. 161] *Soit X une k-variété lisse intègre. Soit $k(X)$ son corps des fonctions. Soit F un k-tore flasque. L'application de restriction $H^2(X, F) \to H^2(k(X), F)$ est injective.*

Proposition C. *Soit X une k-variété géométriquement intègre telle $k_s^\times = H^0(X_s, \mathbf{G}_m)$. Soit T un k-tore et $\hat{T}$ son groupe des caractères de T_s, qui est un G-réseau. Si $Hom_G(\hat{T}, \mathrm{Pic}(X_s)$ est de type fini, en particulier si $\mathrm{Pic}(X_s)$ est de type fini, le noyau de $H^2(k, T) \to H^2(X, T)$ est fini.*

Démonstration. La suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(k, H^q(X_s, T)) \Longrightarrow H^n(X, T)$ donne la suite exacte

$$H^1(X, T) \to (H^1(X_s, T))^G \to H^2(k, T) \to H^2(X, T).$$

Le noyau de $H^2(k, T) \to H^2(X, T)$ est annulé par un entier positif (comme on voit par restriction à un point fermé de X). Le groupe $H^1(X_s, T)$ est une somme direct d'exemplaires de $\mathrm{Pic}(X_s)$, donc de type fini, donc aussi $(H^1(X_s, T)^G$. QED

Remarque. Supposons X/k projective lisse géométriquement inègre sur k de caractéristique zéro. On a $k_s^\times = H^0(X_s, \mathbf{G}_m)$. Dans chacun des cas suivants, le groupe $(H^1(X_s, T)^G = Hom_G(\hat{T}, \mathrm{Pic}(X_s)$ est de type fini.

(a) $H^1(X, O_X) = 0$. Dans ce cas $\mathrm{Pic}(X_s)$ est un groupe abélien de type fini.

(b) Le corps k est de type fini sur $\mathbf{Q}$ (Mordell-Weil, Néron, Severi).

THÉORÈME. *Soit M un k-groupe de type multiplicatif lisse. Soit X une k-variété lisse géométriquement intègre, telle que $k_s^\times = H^0(X_s, \mathbf{G}_m)$. Supposons que pour toute extension sous-extension finie $k \subset K \subset k_s$, le groupe $\mathrm{Pic}(X_s)^{Gal(k_s/K)}$ est de type fini, condition satisfaite si le groupe abélien $\mathrm{Pic}(X_s)$ est de type fini. Soit $k(X)$ le corps des fonctions. L'application de restriction $H^2(k, M) \to H^2(k(X), M)$ a un noyau fini.*

Démonstration. Soit

$$1 \to M \to F \to P \to 1$$

une suite exacte comme dans la proposition A. On considère la composition des flèches

$$\phi : H^2(k, M) \to H^2(k, F) \to H^2(X, F) \to H^2(k(X), F).$$

Elle se factorise par

$$H^2(k, M) \to H^2(k(X), M) \to H^2(k(X), F).$$

Le noyau de $H^2(k, M) \to H^2(k(X), M)$ est donc contenu dans le noyau de ϕ. Comme $H^1(k, P) = 0$ (Hilbert 90), la flèche $H^2(k, M) \to H^2(k, F)$ est injective. D'après la proposition C, le noyau de $H^2(k, F) \to H^2(X, F)$ est fini. D'après le théorème B, la flèche $H^2(X, F) \to H^2(k(X), F)$ est injective. QED

Comme indiqué ci-dessus, l'hypothèse sur le groupe de Picard est satisfaite si X/k est projective, lisse, géométriquement intègre et on a au moins une des hypothèses : $H^1(X, O_X) = 0$ ou k de type fini sur $\mathbf{Q}$.

Remarque. On notera que le défaut éventuel d'injectivité de $H^2(k,M) \to H^2(k(X),M)$ est borné par $\mathrm{Ker}[H^2(k,F) \to H^2(X,F)]$, lui-même quotient fini du groupe de type fini $Hom_G(\hat{F}, \mathrm{Pic}(X_s))$. Si l'on part de $M = \mu_n$, avec n inversible dans k, on peut prendre

$$1 \to \mu_n \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m \to 1$$

avec l'application $x \mapsto x^n$ comme suite

$$1 \to M \to F \to P \to 1.$$

et l'on trouve la borne $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)]$, soit encore $\mathrm{Pic}(X_s)^G/\mathrm{Pic}(X)$.

Mumbai, 4 avril 2026

[CTSa87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications, J. of Algebra **106** (1987) 148–205.