Contemporary Mathematics
Volume **571**, 2012
http://dx.doi.org/10.1090/conm/571/11321

Quelques cas d'annulation du troisième groupe de cohomologie non ramifiée

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. On établit la nullité du troisième groupe de cohomologie non ramifiée pour certaines variétés munies d'un pinceau de quadriques ou d'intersections de deux quadriques. Sur les complexes, ceci permet d'obtenir la validité de la conjecture de Hodge entière en degré 4 pour de telles variétés.
Abstract. The third unramified cohomology group is shown to vanish on certain varieties equipped with a pencil of quadrics or of intersections of two quadrics. Over the complex field, this establishes the integral Hodge conjecture in degree 4 for such varieties.

1. Notations et rappels

Cet article apporte un complément à des textes récents de C. Voisin et l'auteur [**4**], de B. Kahn et l'auteur [**3**] et de C. Voisin [**10**]. Les notations sont celles de ces articles. La cohomologie des corps ici utilisée est la cohomologie galoisienne, dont nous utilisons librement les propriétés [**9**]. Pour F un corps et M un module discret sur le groupe de Galois absolu de F, et $i \geq 0$ un entier, on note $H^i(F, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne à valeurs dans M. Pour les propriétés de la cohomologie non ramifiée des variétés et de leurs corps de fonctions, on consultera [**1**]. Pour X une variété intègre sur un corps k, on note $k(X)$ son corps des fonctions. Pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, et l un nombre premier distinct de la caractéristique de k, on note $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)$ la limite inductive sur n des groupes de racines de l'unité tordus $\mu_{l^n}^{\otimes j}$, et on note

$$H^i_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) \subset H^i(k(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$$

le sous-groupe formé des éléments $\xi \in H^i(k(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ dont tous les résidus $\delta_A(\xi)$ sont nuls, où A parcourt l'ensemble des anneaux de valuation discrète de rang 1 contenant k et de corps des fractions $k(X)$.

Lemme 1.1. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2 et soit Z une quadrique lisse sur F, de dimension au moins 1. Pour tout l premier impair distinct de la caractéristique, pour tout entier $i \geq 0$, et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'application de restriction naturelle $H^i(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) \to H^i_{nr}(F(Z), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Il existe une extension quadratique séparable L/F sur laquelle Z acquiert un L-point, donc est L-birationnelle à un espace projectif. Ceci

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14C35; Secondary 14E08, 14F99.

implique

$$H^i(L, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(L(Z), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j)),$$

et le résultat annoncé s'obtient par un argument de trace.

PROPOSITION 1.2 ([**2**, Thm. 3.2, p. 60]). *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_F$, $n \geq 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques. Si X possède un point rationnel sur F, alors X est F-birationnelle à une F-variété géométriquement intègre Z munie d'un morphisme $Z \to \mathbf{P}^1_F$ dont la fibre générique est une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^{n-2}_{F(\mathbf{P}^1)}$.*

Rappelons la définition d'une quadrique d'Albert sur un corps F de caractéristique différente de 2. C'est une quadrique lisse de dimension 4 définie par une forme quadratique diagonale $< a, b, -ab, -c, -d, cd >$, avec $a, b, c, d \in F^\times$.

THÉORÈME 1.3. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Soit Z une quadrique lisse sur F, de dimension $d \geq 1$, qui n'est pas une quadrique d'Albert anisotrope. Pour tout l premier différent de la caractéristique, l'application de restriction naturelle sur la cohomologie galoisienne*

$$H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3(F(Z), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

induit une surjection

$$H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \twoheadrightarrow H^3_{nr}(F(Z), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

DÉMONSTRATION. Pour $l \neq 2$, cela résulte du lemme 1.1. Pour $l = 2$, cas où il y a aussi des variantes plus délicates avec les coefficients $\mathbb{Z}/2$, plusieurs auteurs (Suslin, Merkur'ev, Peyre, Sujatha, Kahn, Rost) ont contribué au théorème ci-dessus. L'énoncé général fait l'objet de [**5**, §10], article auquel on se référera pour le détail des différentes contributions au sujet.

REMARQUE 1.4. Comme il est expliqué dans [**8**, Prop. 3], grâce à des travaux de B. Kahn, on dispose d'un énoncé analogue au théorème 1.3 pour les variétés de Severi-Brauer d'indice premier. Ceci permet d'établir pour les fibrations en de telles variétés les analogues de tous les énoncés donnés ici pour les fibrations en coniques.

2. Un théorème général

THÉORÈME 2.1. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et soit l un nombre premier distinct de la caractéristique de k. Soit Y une k-variété géométriquement intègre. Soit X une k-variété connexe projective et lisse de dimension d qui est k-birationnelle à une k-variété géométriquement intègre Z munie d'un k-morphisme dominant $Z \to Y$ de fibre générique une quadrique lisse Q sur le corps $k(Y)$. Supposons*

$$\dim(Q) = d - \dim(Y) \geq 1.$$

Dans chacun des cas suivants :

(a) k est séparablement clos et $\dim(Y) \leq 2$,

(b) k est un corps de l-dimension cohomologique 1, Q n'est pas une quadrique d'Albert anisotrope, et $\dim(Y) \leq 1$,

(c) k est un corps C_1 et $\dim(Y) \leq 1$,

on a $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.

Démonstration. Supposons d'abord $\dim(Q) \geq 3$.

Si k est un corps C_1 et $\dim(Y) \leq 1$, alors $k(Y)$ est un corps C_2. La quadrique Q, de dimension au moins 3, possède donc un point rationnel sur $k(Y)$, donc, comme elle est lisse, est $k(Y)$-birationnelle à un espace projectif sur $k(Y)$.

Supposons k séparablement clos et $\dim(Y) \leq 2$. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le corps $\overline{k}(Y)$ est un corps C_2, donc la quadrique Q, de dimension au moins 3, possède un point rationnel sur $\overline{k}(Y)$. Comme l'extension $\overline{k}(Y)/k(Y)$ est de pro-degré impair, un théorème bien connu de T. A. Springer implique que Q possède un point rationnel sur $k(Y)$, donc comme elle est lisse, est $k(Y)$-birationnelle à un espace projectif.

On a donc dans ces deux cas

$$H^3(k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(k(Y)(Q)/k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

Supposons $\dim(Q) \leq 2$. La quadrique Q n'est donc pas une quadrique d'Albert. D'après le théorème 1.3, l'application de restriction

$$H^3(k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3_{nr}(k(Y)(Q)/k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est surjective.

Sous les hypothèses du théorème, la l-dimension cohomologique de $k(Y)$ est au plus 2. On a donc $H^3(k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$. D'après ce qui précède, on a donc

$$H^3_{nr}(k(Y)(Q)/k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0.$$

On a $k(X) = k(Y)(Q)$ et l'inclusion

$$H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \subset H^3_{nr}(k(Y)(Q)/k(Y), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

On a donc bien $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.

3. Sur les complexes

Corollaire 3.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés connexes projectives et lisses sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Dans chacun des cas suivants :*

(a) $\dim(Y) \leq 2$ *et la fibre générique de f est une quadrique lisse de dimension au moins* 1,

(b) $Y = \Gamma$ est une courbe et la fibre générique de f est une intersection complète lisse de deux quadriques de dimension au moins 2 sur le corps $\mathbb{C}(\Gamma)$,

on a $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et la conjecture de Hodge entière vaut pour les classes de Hodge entières de degré 4 sur X : toute telle classe dans $H^4_{\mathrm{Betti}}(X, \mathbb{Z})$ est l'image d'un cycle algébrique de codimension 2 sur X.

Démonstration. Soit $Z^4(X)$ le quotient du groupe des classes de Hodge dans $H^4_{\mathrm{Betti}}(X, \mathbb{Z})$ par le sous-groupe des classes de cycles algébriques.

Dans chacun des deux cas considérés, le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur X est supporté sur une surface. Le théorème 1.1 de [**4**] donne

$$H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} Z^4(X).$$

Dans le cas (a), le théorème 2.1(a) ci-dessus donne

$$H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0.$$

Dans le cas (b), comme $\mathbb{C}(\Gamma)$ est un corps C_1, la fibre générique de f possède un point rationnel sur $\mathbb{C}(\Gamma)$. La proposition 1.2 montre alors que cette fibre générique est $\mathbb{C}(\Gamma)$-birationnelle à une fibration en quadriques $Z \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}(\Gamma)}$ de dimension relative au moins 1 au-dessus de $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}(\Gamma)}$, à fibre générique lisse. La $\mathbb{C}$-variété X est donc birationnelle à l'espace total d'une fibration $Z \to S = \mathbf{P}^1 \times \Gamma$ dont la fibre générique est une quadrique lisse $Q/\mathbb{C}(S)$ de dimension au moins 1. On a l'inclusion

$$H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H^3_{nr}(\mathbb{C}(S)(Q)/\mathbb{C}(S), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Ce dernier groupe est, d'après les théorèmes 1.3 et 2.1, un quotient du groupe $H^3(\mathbb{C}(S), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, lequel est nul car $\mathbb{C}(S)$ est de dimension cohomologique 2.

Remarque 3.2. Le cas (a) est mis ici pour mémoire, il a déjà été établi dans [**4**, Cor. 8.2]. Dans le cas (b), pour une famille de dimension relative $d = 2$, l'énoncé est un cas particulier de [**4**, Thm. 8.14]. Pour une famille de dimension relative $d = 3$, l'énoncé obtenu généralise le Cor. 1.7 de [**10**], établi par C. Voisin par des méthodes géométriques, au prix d'hypothèses restrictives sur les fibres singulières de $X \to \Gamma$. Ici on ne fait aucune hypothèse sur ces fibres. Le cas de la dimension relative $d \geq 4$ est facile : une quadrique lisse de dimension au moins 3 sur $\mathbb{C}(\Gamma)$ possède un point rationnel sur $\mathbb{C}(\Gamma)$, donc est $\mathbb{C}(\Gamma)$-birationnelle à un espace projectif sur $\mathbb{C}(\Gamma)$. La variété X est donc $\mathbb{C}$-birationnelle à un produit $\mathbf{P}^d \times \Gamma$. Pour une fibration de $\mathbb{C}(\Gamma)$-variétés $Z \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{C}(\Gamma)}$ de fibre générique une quadrique lisse de dimension 1 ou 2, la $\mathbb{C}(\Gamma)$-variété Z n'est pas nécessairement $\mathbb{C}(\Gamma)$-birationnelle à un espace projectif sur $\mathbb{C}(\Gamma)$, comme on voit en calculant le groupe de Brauer non ramifié de Z. Mais c'est semble-t-il une question ouverte de savoir si une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}(\Gamma)}$ est $\mathbb{C}(\Gamma)$-birationnelle à un espace projectif sur $\mathbb{C}(\Gamma)$.

Soit maintenant X une variété connexe, projective et lisse munie d'une fibration $X \to \Gamma$ sur une courbe Γ, dont la fibre générique est une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^{d+1}_{\mathbb{C}(\Gamma)}$. Pour $d = 2$, on peut, soit par la géométrie complexe (Voisin, cf. [**4**, Thm. 6.1] ou [**10**, Thm. 1.3]), soit par la K-théorie algébrique [**4**, Thm. 8.14], montrer que la conclusion du corollaire ci-dessus vaut encore. Pour $d = 3$, sous des hypothèses restrictives sur les fibres singulières de $X \to \Gamma$, ceci vaut encore pour X. C'est là un résultat récent de C. Voisin [**10**, Thm. 2.11]. Ce résultat, obtenu par des méthodes géométriques, semble hors d'atteinte des méthodes de K-théorie algébrique.

4. Sur les corps finis

Corollaire 4.1. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique différente de 2 et soit l premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Soit X une $\mathbb{F}$-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Dans chacun des cas suivants :*

(a) il existe un $\mathbb{F}$-morphisme dominant $f : X \to C$ de X vers une $\mathbb{F}$-courbe C projective, lisse et géométriquement intègre, et la fibre générique de f est une quadrique lisse de dimension au moins 1 sur $\mathbb{F}(C)$,

(b) la $\mathbb{F}$-variété X est une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$ et $n \geq 4$,

on a $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.

Démonstration. L'énoncé (a) est une application immédiate du théorème 2.1(c), puisqu'un corps fini est un corps C_1. Comme $\mathbb{F}$ est C_1, toute variété X comme en (b) admet un point $\mathbb{F}$-rationnel. La proposition 1.2 montre que X est $\mathbb{F}$-birationnelle à une $\mathbb{F}$-variété géométriquement intègre Z munie d'un $\mathbb{F}$-morphisme dominant $Z \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{F}}$ de fibre générique une quadrique lisse de dimension au moins 1.

On a l'inclusion

$$H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \subset H^3_{nr}(\mathbb{F}(Z)/\mathbb{F}(\mathbf{P}^1), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

Le théorème 1.3 montre que l'application de restriction

$$H^3(\mathbb{F}(\mathbf{P}^1), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3_{nr}(\mathbb{F}(Z)/\mathbb{F}(\mathbf{P}^1), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

est surjective. Mais $H^3(\mathbb{F}(\mathbf{P}^1), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$, car le corps $\mathbb{F}(\mathbf{P}^1)$ est de l-dimension cohomologique 2.

Remarque 4.2. Soit X une variété projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps $\mathbb{F}$. Soit l un premier distinct de la caractéristique de $\mathbb{F}$.

C'est un théorème de théorie du corps de classes supérieur (cf. [**3**, Prop. 3.1]) que pour X de dimension 2, on a $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$.

En dimension au moins 3, comme il est expliqué dans [**3**], la situation est la suivante. On conjecture que $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est un groupe fini. On ne connaît pas une seule variété $X/\mathbb{F}$ de dimension au plus 4 avec $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \neq 0$. On connaît des variétés de dimension 5 sur un corps fini, fibrées en quadriques de dimension 3 au-dessus d'une surface, donc géométriquement rationnelles, avec $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \neq 0$ (Pirutka [**7**]). On conjecture que l'on a

$$H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

pour les variétés de dimension 3 qui sont géométriquement uniréglées, par exemple les variétés fibrées en surfaces cubiques au-dessus d'une courbe.

Supposons la caractéristique de $\mathbb{F}$ impaire. Un théorème délicat de Parimala et Suresh [**6**] établit $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ pour les variétés de dimension 3 fibrées en coniques au-dessus d'une surface. Le corollaire 4.1 montre que l'on a $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ pour les variétés fibrées en quadriques de dimension au moins 1 au-dessus d'une courbe, et aussi pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$ pour $n \geq 5$. Ces dernières sont des variétés géométriquement rationnelles. Elle sont en fait $\mathbb{F}$-birationnelles à un espace projectif sur leur corps de base $\mathbb{F}$, ce qui donne une démonstration directe du Corollaire 4.1 (b). C'est facile à voir pour $n \geq 6$ ([**2**, Thm. 3.4]), car dans ce cas, X est birationnelle à une famille de quadriques de dimension au moins 3 sur $\mathbf{P}^1_{\mathbb{F}}$, et $\mathbb{F}(\mathbf{P}^1)$ est un corps C_2. Le cas $n = 5$ est une conséquence de deux faits. Le premier est bien connu (cf. [**2**, Prop. 2.2]) : sur un corps K, si une intersection complète lisse X de deux quadriques dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_K$ avec $n \geq 4$ contient une droite de $\mathbf{P}^n_K$ définie sur K, alors la K-variété X est K-birationnelle à un espace projectif. Le second fait est moins connu : sur un corps fini $\mathbb{F}$, une intersection complète lisse X de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{F}}$ contient une droite, définie sur $\mathbb{F}$, de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$. La méthode donnée ici pour établir (b) est néanmoins intéressante, elle s'applique encore à certaines intersections complètes singulières de deux quadriques.

References

1. J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) p. 1–64. MR1327280 (96c:14016)
2. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces, I, Crelle **373** (1987) 37–107. MR870307 (88m:11045a)
3. J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis, `arXiv:1104.3350v2 [math.AG]`.

4. J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, `arXiv:1005.2778v2 [math.AG]`, à paraître dans Duke Mathematical Journal.
5. B. Kahn, M. Rost et R. Sujatha, Unramified cohomology of quadrics. I, Amer. J. Math. **120** (1998) 841–891. MR1637963 (2000b:11041)
6. R. Parimala et V. Suresh, Degree three cohomology of function fields of surfaces, `arXiv:1012.5367v1 [math.NT]`.
7. A. Pirutka, Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis : `arXiv :math/1004.1897v2 [math.AG]`, à paraître dans Algebra & Number Theory.
8. A. Pirutka, Cohomologie non ramifiée en degré trois d'une variété de Severi-Brauer, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **349** (2011) 369–373. MR2788371
9. J-P. Serre, Cohomologie galoisienne, 5ème éd., révisée et complétée, Springer LNM **5** (1994). MR1324577 (96b:12010)
10. C. Voisin, Abel-Jacobi maps, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal, `arXiv:1005.5621v2 [math.AG]`, à paraître dans Journal of Algebraic Geometry.

CNRS, UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

E-mail address: `jlct@math.u-psud.fr`