



Variétés réelles fibrées en quadriques presque de Pfister

Jean-Louis Colliot-Thélène, Federico Scavia

► To cite this version:

Jean-Louis Colliot-Thélène, Federico Scavia. Variétés réelles fibrées en quadriques presque de Pfister. 2026. [⟨hal-05682664⟩](#)

HAL Id: hal-05682664

<https://hal.science/hal-05682664v1>

Preprint submitted on 6 Jul 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

VARIÉTÉS RÉELLES FIBRÉES EN QUADRIQUES PRESQUE DE PFISTER

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET FEDERICO SCAVIA

ABSTRACT. Let $\mathbb{R}$ be the field of real numbers, let $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ be a non-constant positive polynomial, and let $n \geq 2$ be an integer. Let $X/\mathbb{R}$ be a smooth projective model of the affine variety given by $\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - up(u) = 0$. We show that X is universally CH_0 -trivial. In the case $n = 2$ and under restrictive assumptions on the polynomial $p(u)$, this result had been obtained by Pirutka and the first author. Examples of Benoist and Pirutka show that this result does not extend to an arbitrary real closed field. We extend their examples to higher dimension. To obtain our results, we first generalize a criterion of universal CH_0 -triviality over an arbitrary field obtained by Pirutka and the first author.

RÉSUMÉ. Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels, soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable, non constant, strictement positif et soit $n \geq 2$ un entier. Soit $X/\mathbb{R}$ un modèle projectif et lisse de la variété affine d'équation $\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - u.p(u) = 0$. Nous montrons que la variété X est universellement CH_0 -triviale. Dans le cas $n = 2$ et sous des hypothèses restrictives sur le polynôme $p(u)$, ce résultat avait été obtenu par Pirutka et le premier auteur. D'après des exemples de Benoist et Pirutka, on sait que ce résultat ne s'étend pas à un corps réel clos arbitraire. On étend leurs exemples en dimension supérieure. Pour obtenir nos résultats, nous commençons par généraliser un critère de CH_0 -trivialité universelle sur un corps quelconque obtenu par Pirutka et le premier auteur.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
Notations	4
2. Formes de Pfister et cohomologie galoisienne	4
2.1. Rappels sur les formes de Pfister	4
2.2. Le groupe des normes	5
2.3. Groupe des normes des formes presque de Pfister	6
2.4. Fibrés en quadriques admissibles	7
3. Un critère de CH_0 -trivialité universelle	8
4. Un critère de CH_0 -trivialité universelle : le cas réel	14
5. Démonstration du théorème 5.2	15
6. Fibrations en quadriques non stablement rationnelles	16
Références	19

Date: 6 juillet 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. 14E08; 14M20, 14P10, 14P25, 14F20.

Key words and phrases. Rationality, real connectedness, semi-algebraic geometry, specialisation, unramified cohomology, quadratic forms, Chow groups.

1. INTRODUCTION

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement rationnelle sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Si X est rationnelle ou même simplement stablement rationnelle, l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ est connexe (donc non vide). La connexité de $X(\mathbb{R})$ implique la rationalité de X en dimension 2, mais dès la dimension 3 elle ne l'implique pas, elle n'implique même pas la rationalité stable, ni même la CH_0 -trivialité universelle [CTP24, Prop. 11.1].

Soit maintenant X une fibration en quadriques réelle générique, c'est-à-dire que X est une $\mathbb{R}$ -variété projective et lisse munie d'un morphisme plat $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ dont toute fibre géométrique est une quadrique de dimension ≥ 1 avec au plus un point singulier. Supposons $X(\mathbb{R})$ connexe. D'après Hassett-Tschinkel [HT21] (cf. [CTP24, Section 1.2]), il existe des fibrations en surfaces quadriques réelles génériques $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ telles que $X(\mathbb{R})$ est connexe mais X n'est pas rationnelle. On ne sait pas si la connexité de $X(\mathbb{R})$ entraîne la rationalité stable de X , ou même si elle entraîne la CH_0 -trivialité universelle pour X .

Dans plusieurs articles antérieurs, le cas particulier des fibrations X données par une équation affine

$$(1.1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - u.p(u) = 0$$

avec $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ séparable, non constant, de degré pair, strictement positif sur $\mathbb{R}$ (ce qui assure la connexité de $X(\mathbb{R})$) a été étudié. La projection $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ est induite par la coordonnée u .

Pirutka et le premier auteur [CTP24] ont donné un critère algébrique général équivalent à la CH_0 -trivialité universelle pour X et ils ont utilisé ce critère pour montrer la CH_0 -trivialité universelle dans certains cas. Par exemple, supposons $p(u) = u^2 + au + b$ positif, c'est-à-dire $b > a^2/4$. Dans [CTP24], on établit la CH_0 -trivialité universelle si l'on a $b \geq a^2/3$, et pour un ensemble dénombrable dense (pour la topologie euclidienne) de couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a^2/4 < b < a^2/3$.

Sur un corps réel clos quelconque R , on dispose d'une notion de connexité semi-algébrique de $X(R)$ qui généralise la connexité topologique usuelle de $X(\mathbb{R})$ si $R = \mathbb{R}$. Si $R := \cup_{n \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/n}))$ est le corps réel clos des séries de Puiseux réelles, avec t infiniment petit positif, et

$$p(u) = (u + 1)^2 + t = u^2 + 2u + 1 + t \in R[u]$$

(donc $X(R)$ semi-algébriquement connexe), Benoist et Pirutka [BP24] utilisent le critère de [CTP24], qui vaut sur tout corps réel clos, pour établir que la R -variété X donnée par (1.1) n'est pas universellement CH_0 -triviale.

Il est facile de voir [CTP24, Remarque 12.3] que toute R -variété d'équation

$$\sum_{j=1}^N x_j^2 = u.p(u)$$

avec $p(u) \in R[u]$ positif est R -rationnelle si l'entier $N \geq 2$ est pair.

Notre théorème principal est le suivant. Il étend le résultat de [CTP24] dans deux directions : dimension des fibres et condition optimale sur $p(u)$.

Théorème 1.1 (Théorème 5.2). *Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable, non constant, de degré pair, strictement positif sur $\mathbb{R}$. Soit X un*

modèle projectif et lisse de la fibration en quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ d'équation affine

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - u.p(u) = 0.$$

Alors X est universellement CH_0 -triviale.

Le théorème 1.1 est optimal : si le signe de $p(u)$ n'est pas constant, alors $X(\mathbb{R})$ est non vide et n'est pas connexe, donc d'après [CTI81] $CH_0(X)/2$ n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corollaire 1.2. *Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable, non constant, de degré pair, strictement positif sur $\mathbb{R}$. Soit X un modèle projectif et lisse de la fibration en quadriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ d'équation affine (1.1) :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - u.p(u) = 0.$$

Alors X est universellement CH_0 -triviale.

Le corollaire 1.2 s'applique par exemple à $p(u) = u^2 + au + b$ pour tout $b > a^2/4$.

Le théorème 1.1 et le corollaire 1.2 ne s'étendent pas aux corps réels clos non-archimédiens, comme le montre l'exemple de Benoist et Pirutka mentionné ci-dessus, où $b - a^2/4 = t$ est infiniment petit positif.

Les énoncés ci-dessus sur le corps $\mathbb{R}$ des réels se déduisent par une méthode élémentaire (Lemme 5.1) du théorème suivant, lequel vaut sur tout corps réel clos R .

Théorème 1.3 (Théorème 4.3). *Soit R un corps réel clos, soit $p(u) \in R[u]$ séparable, unitaire, non constant, de degré pair, tel que $p(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in R$. Soit $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ une fibration en quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}_R^1 = \text{Spec}(R[u])$ par l'équation affine*

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - u.p(u) = 0.$$

Soit Δ la R -courbe projective et lisse d'équation

$$w^2 = vp(-v).$$

Soit $W := X \times_R \Delta$. Alors la classe

$$(u + v, -1, \dots, -1) \in H^{n+1}(R(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

appartient au sous-groupe $H_{nr}^{n+1}(R(W)/R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) *Cette classe est nulle.*
- (ii) *La fonction $u + v$ est une somme de 2^n carrés dans $R(W)$.*
- (iii) *Pour tout corps F contenant R , on a $A_0(X_F) = 0$.*

Le théorème 1.3 est un cas particulier d'un énoncé plus général (voir le théorème 3.5). Il s'agit d'une extension d'un résultat du premier auteur et Pirutka [CTP24] (où $n = 2$). Le nouvel ingrédient est la proposition 2.5, extension due à Parimala aux formes presque de Pfister de dimension 2^n (voir la définition 2.4) d'un résultat du premier auteur et Skorobogatov [CTS93, Proposition 2.3] dans le cas $n = 2$.

Comme deuxième application du théorème 1.3, on étend en dimension supérieure les exemples de variétés semi-algébriquement connexes non-stablement rationnelles sur le corps des séries de Puiseux réelles dus à Benoist et Pirutka [BP24]; voir le théorème 6.1.

Notations. Soit k un corps. Une k -variété est un k -schéma séparé de type fini. Une k -variété intègre est dite *k -rationnelle* si elle est k -birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}_k^n$, c'est-à-dire si son corps des fonctions $k(X)$ est transcendant pur sur k . Une k -variété intègre X est dite *stablement k -rationnelle* s'il existe des espaces projectifs $\mathbb{P}_k^n$ et $\mathbb{P}_k^m$ tels que $X \times_k \mathbb{P}_k^n$ soit k -birationnel à $\mathbb{P}_k^m$.

Pour X une k -variété, on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Si X est propre, on écrit $\deg: CH_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ pour l'application degré et $A_0(X)$ pour le noyau de cet homomorphisme. On dit qu'une k -variété propre géométriquement intègre X est *universellement CH_0 -triviale* si pour tout corps F contenant k la flèche $\deg_F: CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Sous l'hypothèse que la k -variété X , de corps des fonctions $k(X)$, est lisse et possède un zéro-cycle de degré 1, ceci est équivalent à l'énoncé : $A_0(X_{k(X)}) = 0$ [ACTP17, Lemma 1.3]. Ceci équivaut aussi à l'existence d'une décomposition de la diagonale. Si une k -variété géométriquement intègre propre et lisse est stablement k -rationnelle, alors elle est universellement CH_0 -triviale.

Soit M un module galoisien discret de torsion, première à la caractéristique de k et soit K/k une extension de corps. On note $H_{\text{nr}}^i(K/k, M) \subset H^i(K, M)$ le sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne formé des éléments qui sont non ramifiés par rapport à toute valuation discrète sur K triviale sur k .

Si $\text{car}(k) \neq 2$, pour $a \in k^\times$ on note $(a) \in k^\times/k^{\times 2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ la classe de a , et pour $a_1, \dots, a_n \in k^\times$ on note $(a_1, \dots, a_n) \in H^n(k, \mathbb{Z}/2)$ le cup-produit $(a_1) \cup \dots \cup (a_n)$.

Remerciements. Les auteurs remercient l'Institut de Sciences Mathématiques Lodha de Mumbai pour son hospitalité lors du programme thématique sur les points rationnels, les cycles algébriques et le principe local-global. Ils remercient particulièrement R. Parimala pour leur avoir donné la démonstration de la proposition 2.5.

2. FORMES DE PFISTER ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE

2.1. Rappels sur les formes de Pfister. Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Pour tout $a \in F^\times$, on note $\langle\langle a \rangle\rangle := \langle 1, -a \rangle$ la forme quadratique binaire $x^2 - ay^2$ sur le corps F . Pour tout entier $n \geq 1$ et tous $a_1, \dots, a_n$ dans $F^\times$, on a la forme de Pfister en 2^n variables

$$(2.1) \quad \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle := \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle = \sum_{I \subset [n]} a_I x_I^2,$$

où $[n] := \{1, \dots, n\}$ et pour tout $I \subset [n]$, x_I est une variable et $a_I := (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} a_i$.

Rappelons que, par définition, un élément $a \in F$ est représenté par une forme quadratique $q: V \rightarrow F$ s'il existe $v \in V$ tel que $q(v) = a$.

Proposition 2.1. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2, soit $n \geq 1$ un entier et soient $a_1, \dots, a_n \in F^\times$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *La forme quadratique $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ est isotrope.*
- (2) *La forme quadratique $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ est hyperbolique.*
- (3) *L'élément a_n est représenté par la forme $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle$.*
- (4) *Le symbole $(a_1, \dots, a_n) \in H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ est nul.*

L'équivalence entre (1), (2) et (3) est due à Pfister. Le fait que (1)-(3) entraînent (4) est classique. Le fait que (4) entraîne (1)-(3) utilise la démonstration par Voevodsky et Rost de la conjecture de Milnor.

Démonstration. (1) $\implies$ (2). Voir [Lam05, Chapter X, Theorem 1.7].

(2) $\implies$ (3). Si la forme $\varphi := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ est hyperbolique, alors la sous-forme $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle \perp \langle -a_n \rangle$ de dimension $2^{n-1} + 1 > 2^{n-1} = \dim(\varphi)/2$ est isotrope. On conclut par [Lam05, Chapter I, Corollary 3.5].

(3) $\implies$ (1). Si a_n est représenté par la forme $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle$, alors la forme $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle \perp \langle -a_n \rangle$ est isotrope. Comme $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle \perp \langle -a_n \rangle$ est une sous-forme de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, cette dernière est aussi isotrope.

(2) $\iff$ (4). D'après un théorème de Voevodsky et Rost [Voe03, Corollary 7.5], l'application norme résidu $K_n^M(F)/2 \rightarrow H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ qui envoie un symbole de Milnor $\{u_1, \dots, u_n\}$ sur le symbole galoisien $(u_1, \dots, u_n)$ est un isomorphisme. Pour tout $r \geq 0$, soit $I^r(F)$ la puissance r -ième de l'idéal fondamental $I(F)$ dans l'anneau de Witt de F . D'après la conjecture de Milnor sur les formes quadratiques, démontrée par Orlov–Vishik–Voevodsky [OVV07, Theorem 4.1], l'homomorphisme $K_n^M(F)/2 \rightarrow I^n(F)/I^{n+1}(F)$ qui envoie $\{u_1, \dots, u_n\}$ sur la classe de la forme de Pfister $\langle\langle u_1, \dots, u_n \rangle\rangle \in I^n(F)$ est bijectif. On déduit alors que le symbole $(a_1, \dots, a_n) \in H^n(F, \mathbb{Z}/2)$ est nul si et seulement si la forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ appartient à $I^{n+1}(F)$. Par [Kah08, Corollaire 3.3.2] (conséquence du Hauptsatz de Arason-Pfister [Kah08, Théorème 3.3.1]), cette dernière condition est équivalente au fait que $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ soit hyperbolique. $\square$

2.2. Le groupe des normes. Soit F un corps. Étant donné une F -variété intègre X , on note $N_X(F) \subset F^\times$ le sous-groupe engendré par les normes $N_{L/F}(L^\times)$ pour L/F variant parmi les extensions finies de corps telles que $X(L) \neq \emptyset$; voir par exemple [CTS93, Définition p. 479].

Si $\text{car}(F) \neq 2$ et q est une forme quadratique non dégénérée de rang $r \geq 3$ sur F , la quadrique X d'équation $q = 0$ est une F -variété projective lisse géométriquement intègre de dimension $r - 2$, et on pose $N_q(F) := N_X(F)$. Donc $N_q(F)$ est le sous-groupe engendré par les normes $N_{L/F}(L^\times)$ pour L/F variant parmi les extensions finies de corps telles que q_L est isotrope sur L .

Proposition 2.2. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2, soit $q: V \rightarrow F$ une forme quadratique non dégénérée de rang ≥ 3 .*

- (1) *Le groupe $N_q(F)$ est engendré par les produits non nuls $q(v_1).q(v_2) \in F^\times$ où $v_1, v_2 \in V$.*
- (2) *Si q représente 1, alors $N_q(F)$ est engendré par les valeurs non nulles de la forme q .*
- (3) *Si q est de Pfister, alors $N_q(F)$ est le groupe des valeurs non nulles de q .*

Démonstration. (1) Voir [CTS93, Lemme 2.2], dont la démonstration utilise le principe de la norme de Knebusch [Lam05, Chapter VII, Theorem 5.1].

(2) Ceci est une conséquence directe de (1).

(3) Comme toute forme de Pfister représente 1, d'après (2) le groupe $N_q(F)$ est engendré par les valeurs non nulles de la forme q . Par [Lam05, Chapter X, Theorem 1.8], le sous-ensemble de $F^\times$ des valeurs non nulles d'une forme de Pfister sur F est un sous-groupe de $F^\times$ et donc coïncide avec $N_q(F)$. $\square$

Compte tenu de la proposition 2.2, la proposition 2.1 a la conséquence suivante.

Corollaire 2.3. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2, soit $n \geq 1$ un entier, soient $a_1, \dots, a_n \in F^\times$ et soit $\varphi := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. L'application*

$$F^\times \rightarrow H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/2), \quad z \mapsto (z, a_1, \dots, a_n)$$

a pour noyau le sous-groupe $N_\varphi(F)$.

Démonstration. Soit $z \in F^\times$. Le symbole $(z, a_1, \dots, a_n) \in H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/2)$ est nul si et seulement si z est une valeur de φ (proposition 2.1), si et seulement si z appartient à $N_\varphi(F)$ (proposition 2.2(3)). $\square$

2.3. Groupe des normes des formes presque de Pfister. Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Par définition, la *partie pure* d'une forme de Pfister $\varphi := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ de rang au moins égal à 4 est, avec les notations de (2.1), la sous-forme

$$(2.2) \quad \psi := \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} a_I x_I^2.$$

On a $\varphi = \langle 1 \rangle \perp \psi$.

Définition 2.4. Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Une forme quadratique q sur F de rang au moins égal à 4 est dite *forme presque de Pfister* (« almost Pfister form » en anglais) si q est isométrique à une forme quadratique $\langle c \rangle \perp \psi$, où $c \in F^\times$ et ψ est la partie pure d'une forme de Pfister.

La proposition suivante étend aux formes de Pfister quelconques [CTS93, Proposition 2.3], qui porte sur les formes de Pfister de degré 2 (normes d'algèbres de quaternions) et joue un rôle clé dans [CTP24]. Sa démonstration nous a été communiquée par Parimala.

Proposition 2.5 (Parimala). *Soit F un corps de caractéristique différente de 2, soit φ une forme de Pfister anisotrope de dimension ≥ 4 sur F , soit ψ la partie pure de φ , soit $c \in F^\times \setminus F^{\times 2}$, soit $q = \langle c \rangle \perp \psi$ la forme presque de Pfister correspondante et soit $L := F(\sqrt{c})$. Alors $N_q(L) = N_\varphi(L)$ et $N_q(L) \cap F^\times = N_q(F)$.*

Autrement dit, l'application

$$F^\times / N_q(F) \rightarrow L^\times / N_q(L) = L^\times / N_\varphi(L)$$

induite par l'inclusion $F \hookrightarrow L$ est injective.

Démonstration. Comme la forme φ est de Pfister, il existe un entier $n \geq 2$ et des éléments $a_1, \dots, a_n \in F^\times$ tels que $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. Comme c est un carré dans $L = F(\sqrt{c})$, la forme q_L est isométrique à $\langle 1 \rangle \perp \psi_L$ et donc à φ_L . Ceci entraîne $N_q(L) = N_\varphi(L)$.

L'inclusion $N_q(F) \subset N_q(L) \cap F^\times$ est évidente. Soit $\lambda \in F^\times \cap N_\varphi(L)$: on doit montrer que λ appartient à $N_q(F)$. Notons V le F -espace vectoriel sous-jacent à φ et $B : V \times V \rightarrow F$ la forme bilinéaire associée à φ . Par hypothèse, il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $\lambda = \varphi_L(v_1 + \sqrt{c}v_2)$ dans L , ce qui équivaut à

$$(2.3) \quad \lambda = \varphi(v_1) + c\varphi(v_2), \quad B(v_1, v_2) = 0$$

dans F . Si $\varphi(v_1) = 0$, alors $\lambda = c\varphi(v_2)$ appartient à $N_q(F)$ d'après la proposition 2.2. Si $\varphi(v_2) = 0$, alors $\lambda = \varphi(v_1) \in N_\varphi(F)$ d'après la proposition 2.2(3). Comme, pour toute extension M/F , la quadrique de Pfister φ_M (de rang au moins 4) est isotrope si et seulement si sa partie pure ψ_M est isotrope (ceci car ψ est une voisine de φ) et ψ est une sous-forme de q , on a $N_\varphi(F) = N_\psi(F) \subset N_q(F)$. Donc $\lambda \in N_q(F)$ dans ce cas. On peut donc supposer que v_1 et v_2 vérifient

$$(2.4) \quad \lambda = \varphi(v_1) + c\varphi(v_2), \quad B(v_1, v_2) = 0, \quad \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \neq 0$$

dans F . On a

$$\lambda.\varphi(v_2) = \varphi(v_1).\varphi(v_2) + c(\varphi(v_2))^2.$$

Pour établir l'énoncé voulu, il suffit de montrer :

- (i) $\varphi(v_2) \in N_q(F)$,
- (ii) le produit $\varphi(v_1).\varphi(v_2)$ est représenté par ψ sur F .

Pour (i), si sur un corps M/F la forme de Pfister φ_M est isotrope, alors la forme φ_M est hyperbolique, ce qui implique que la forme ψ_M est isotrope, donc que la forme q_M est isotrope. Ainsi $N_\varphi(F) \subset N_q(F)$. Comme par ailleurs pour la forme de Pfister φ le groupe $N_\varphi(F)$ coïncide avec le groupe des valeurs non nulles de φ sur le corps F , ceci établit (i).

Pour (ii), comme $B(v_1, v_2) = 0$ et $\varphi(v_1).\varphi(v_2) \neq 0$, on peut écrire une décomposition orthogonale

$$\langle \varphi(v_1), \varphi(v_2) \rangle \perp \theta \simeq \varphi.$$

Multiplions par $\varphi(v_1)$. Comme φ est une forme de Pfister, par [Lam05, Chapter X, Theorem 1.8] on a une isométrie $\varphi(v_1).\varphi \simeq \varphi$ et donc

$$\langle 1, \varphi(v_1).\varphi(v_2) \rangle \perp \varphi(v_1)\theta \simeq \varphi(v_1).\varphi \simeq \varphi = \langle 1 \rangle \perp \psi.$$

Par le théorème de simplification de Witt [Lam05, Chapter I, Theorem 4.1], on déduit

$$\langle \varphi(v_1).\varphi(v_2) \rangle \perp \varphi(v_1)\theta \simeq \psi.$$

Ainsi $(\varphi(v_1).\varphi(v_2)) \in F^\times$ est représenté par ψ sur F . □

Corollaire 2.6. *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.5, l'application*

$$F^\times \rightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2), \quad z \mapsto (z, a_1, \dots, a_n)$$

a pour noyau le sous-groupe $N_q(F)$.

Démonstration. D'après le corollaire 2.3 et l'égalité $N_\varphi(L) = N_q(L)$, l'application $L^\times \rightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2)$ donnée par $z \mapsto (z, a_1, \dots, a_n)$ a pour noyau $N_q(L)$. Donc la flèche $F^\times \rightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2)$ donnée par $z \mapsto (z, a_1, \dots, a_n)$ a pour noyau $N_q(L) \cap F^\times$, qui coïncide avec $N_q(F)$ par la proposition 2.5. □

2.4. Fibrés en quadriques admissibles. La définition suivante est tirée de [CTS93, Définition 3.1].

Définition 2.7. Soient k un corps parfait de caractéristique différente de 2 et $d \geq 0$ un entier. On appelle *fibré en quadriques admissible* de dimension relative d un morphisme propre surjectif $\pi: X \rightarrow C$, où C est une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur k et X est une k -variété intègre de dimension $d+1$, tel que la fibre générique de π est une quadrique lisse sur $k(C)$, et tel que, pour tout point fermé $P \in C$, il existe un isomorphisme au-dessus de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{C,P}$ identifiant la restriction de X avec un $\mathcal{O}_{C,P}$ -schéma projectif donné par une équation homogène $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = 0$, où les coefficients $a_i \in \mathcal{O}_{C,P}$ satisfont $0 \leq v_P(a_i) \leq 1$ pour tout i et $v_P(a_i) = 0$ pour $i \leq \frac{n+1}{2}$, où $v_P: k(C)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la valuation discrète normalisée en P .

La définition qui suit vient de [CTS93, Définition 1.3].

Définition 2.8. Soit k un corps, soit C une courbe projective, lisse, intègre sur k , de point générique η , soit X une k -variété intègre et soit $\pi : X \rightarrow C$ un morphisme propre dominant. Nous noterons $k(C)_{dn}^\times$ le sous-groupe de $k(C)^\times$ formé par les fonctions f qui en tout point fermé $P \in C$ s'écrivent comme produit d'une unité en P par un élément de $N_{X_\eta}(k(C))$.

Le théorème suivant est [CTS93, Théorème 4.2].

Théorème 2.9. Soit k un corps parfait de caractéristique différente de 2, soit $p : X \rightarrow C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative ≥ 1 , soit $\eta \in C$ le point générique et soit $f \in k(C)^\times$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe un zéro-cycle z sur X tel que $\text{div}_C(f) = \pi_*(z)$.
- (b) La fonction f appartient au sous-groupe $k(C)_{dn}^\times$.
- (c) Pour tout point fermé P de C tel que la fibre X_P n'ait pas de point $k(P)$ -rationnel (en particulier, $X_P/k(P)$ est lisse sur $k(P)$), la multiplicité de f en P est paire.

De plus, on a un isomorphisme

$$(2.5) \quad k(C)_{dn}^\times / (k^\times \cdot N_{X_\eta}(k(C))) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[\pi_* : CH_0(X) \rightarrow CH_0(C)]$$

qui à la classe d'une fonction $f \in k(C)^\times$ telle que $\text{div}(f) = \pi_*(z)$ associe la classe du zéro-cycle z dans le groupe de Chow $CH_0(X)$.

3. UN CRITÈRE DE CH_0 -TRIVIALITÉ UNIVERSELLE

Situation 3.1. Soit k un corps parfait de caractéristique différente de 2, soit $d \geq 1$ un entier, soit $p(t) \in k[t]$ un polynôme séparable, unitaire, non constant de degré $2d$ tel que $p(0) \neq 0$ et soit $p'(t) := t^{2d} \cdot p(1/t) \in k[t]$.

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $[n] := \{1, \dots, n\}$. Soient $a_1, \dots, a_n \in k^\times$, et pour tout $I \subset [n]$ posons $a_I := (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} a_i$. Soit $\mathbb{P}_k^1$ le recollement de $\text{Spec}(k[u])$ et $\text{Spec}(k[u'])$ via $u' = 1/u$, et soit X le recollement de la k -variété définie par l'équation

$$(3.1) \quad \left\{ \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} a_I x_I^2 - u \cdot p(u) x^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}_k^{2^n-1} \times_k \text{Spec}(k[u])$$

avec la k -variété définie par l'équation

$$(3.2) \quad \left\{ \sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} a_I y_I^2 - u' \cdot p'(u') y^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}_k^{2^n-1} \times_k \text{Spec}(k[u'])$$

via l'identification

$$u' = 1/u, \quad y = x, \quad y_I = (u')^{d+1} x_I \text{ pour tout } I \subset [n] \text{ non vide.}$$

On dispose d'un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ qui sur l'ouvert (3.1) (resp. (3.2)) de X est induit par la projection sur $\text{Spec}(k[u])$ (resp. $\text{Spec}(k[u'])$). Le morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ est une fibration en quadriques admissible sur $\mathbb{P}_k^1$, au sens de la définition 2.7, de dimension relative $2^n - 2$.

Soit $\rho : \Delta \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ la courbe hyperelliptique discriminant, donnée par l'équation affine

$$w^2 = -u \cdot p(u).$$

L'objectif de cette section est la démonstration du théorème 3.5, qui est un critère de CH_0 -trivialité universelle dans la situation 3.1. Il s'agit d'une extension de [CTP24, Théorème 3.5] en dimension supérieure.

La proposition qui suit est une variante de [CTS93, Théorèmes 4.2 et 4.3] (cf. [CTP24, Théorème 2.4]).

Proposition 3.2. *Dans la situation 3.1, on a une injection*

$$\Psi: A_0(X) \hookrightarrow H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \text{Im}(H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cup (a_1, \dots, a_n))$$

qui, pour tout zéro-cycle de degré zéro z sur X , envoie $[z] \in A_0(X)$ sur la classe du symbole $(\rho^*(f), a_1, \dots, a_n)$, où $f \in k(u)^\times$ satisfait $\text{div}(f) = \pi_*(z)$.

Démonstration. Soient $K := k(\mathbb{P}_k^1) = k(u)$ et $L := k(\Delta) = K(\sqrt{-u.p(u)})$. Considérons la forme de Pfister $\varphi := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ sur k . Écrivons $\varphi = \langle 1 \rangle \perp \psi$, où ψ est la partie pure de φ (cf. (2.2)), et considérons la forme quadratique presque de Pfister $q = \langle -u.p(u) \rangle \perp \psi_K$ sur K (cf. définition 2.4). La fibre générique Y/K de π est isomorphe à la quadrique définie par $q = 0$. Son changement de base Y_L/L est isomorphe à la quadrique définie par $\varphi = 0$.

L'application d'image directe $\pi_*: CH_0(X) \rightarrow CH_0(\mathbb{P}_k^1) = \mathbb{Z}$ coïncide avec l'application degré, et donc son noyau est le sous-groupe $A_0(X)$. Pour tout zéro-cycle de degré zéro z sur X , soit $f_z \in K_{dn}^\times$ (cf. définition 2.8) tel que $\text{div}(f_z) = \pi_*(z)$. D'après le théorème 2.9, on a un isomorphisme

$$(3.3) \quad A_0(X) \xrightarrow{\sim} K_{dn}^\times / (k^\times . N_q(K))$$

qui, à tout zéro-cycle de degré zéro z sur X , envoie $[z] \in A_0(X)$ sur la classe de f_z modulo $k^\times . N_q(K)$.

Si φ_K est isotrope, alors ψ_K est isotrope, donc q est isotrope. Par suite $N_q(K) = K^\times$, et l'isomorphisme (3.3) donne $A_0(X) = 0$. Il n'y a alors rien à démontrer. De fait, dans ce cas, X est une variété k -rationnelle, car la fibre générique est une quadrique lisse avec un point $k(\mathbb{P}_k^1)$ -rationnel. On suppose donc φ_K anisotrope. De plus, $-up(u) \notin K^{\times 2}$, car sa valuation en $u = 0$ est impaire.

Soit $\alpha := (a_1, \dots, a_n) \in H^n(k, \mathbb{Z}/2)$, et soit $M \subset H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2)$ l'image de l'application $k^\times \rightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2)$ donnée par $e \mapsto (e)_L \cup \alpha_L$. Comme φ_K est anisotrope, le corollaire 2.6, appliqué à $F = K$, à $c = -u.p(u)$ et à $L = K(\sqrt{-u.p(u)}) = k(\Delta)$, montre que le noyau de l'application

$$K^\times \longrightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2), \quad f \mapsto (\rho^* f) \cup \alpha_L$$

est précisément $N_q(K)$. Ainsi le cup-produit avec α_L induit une injection

$$(3.4) \quad K_{dn}^\times / (k^\times N_q(K)) \longrightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2) / M.$$

En composant (3.3) et (3.4), on obtient l'application injective

$$\Psi: A_0(X) \hookrightarrow H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2) / M.$$

Par construction, pour tout zéro-cycle de degré zéro z sur X , l'application Ψ envoie $[z] \in A_0(X)$ sur la classe de $(\rho^*(f_z), a_1, \dots, a_n)$ modulo M . Comme les éléments de M sont des cup-produits de classes constantes, on a $M \subset H_{nr}^{n+1}(L/k, \mathbb{Z}/2)$. Il reste à vérifier que l'image de Ψ est contenue dans $H_{nr}^{n+1}(L/k, \mathbb{Z}/2) / M$.

Soit donc $f \in K_{dn}^\times$. Comme Δ est une courbe projective lisse de corps des fonctions L , il suffit de vérifier que, pour tout point fermé $Q \in \Delta$, le résidu de $(\rho^* f) \cup \alpha_L \in H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2)$ en Q est nul. Posons $P = \rho(Q)$. Comme la classe

$\alpha_L = (a_1, \dots, a_n)_L$ provient de k , elle est non ramifiée en Q , et la formule du résidu donne

$$\partial_Q((\rho^* f) \cup \alpha_L) = v_Q(\rho^* f) \cdot \alpha_{k(Q)} = e(Q/P)v_P(f) \cdot \alpha_{k(Q)}$$

dans $H^n(k(Q), \mathbb{Z}/2)$, où $e(Q/P)$ est l'indice de ramification de ρ en Q .

Si Q est un point de ramification de ρ , alors $e(Q/P) = 2$ et le résidu ci-dessus est nul. Supposons maintenant que Q ne soit pas ramifié au-dessus de P . Si $v_P(f)$ est pair, le résidu est encore nul. On peut donc supposer $v_P(f)$ impair. Comme $f \in K_{dn}^\times$, le théorème 2.9, appliqué à la fibration admissible π , implique alors que la fibre X_P possède un point rationnel sur $k(P)$. Comme Q n'est pas ramifié au-dessus de P , l'élément $-up(u)$ est une unité en P , et son image dans $k(Q)$ est un carré. Par conséquent, après extension des scalaires de $k(P)$ à $k(Q)$, la forme quadratique définissant la fibre X_P devient isomorphe à

$$\langle 1 \rangle \perp \psi_{k(Q)} = \varphi_{k(Q)}.$$

Puisque $X_P(k(P)) \neq \emptyset$, cette forme est isotrope sur $k(Q)$. La forme φ étant une forme de Pfister, elle est donc hyperbolique sur $k(Q)$, et la proposition 2.1 donne

$$\alpha_{k(Q)} = (a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \text{dans } H^n(k(Q), \mathbb{Z}/2).$$

Le résidu en Q est donc nul dans ce cas aussi. Donc $(\rho^* f) \cup \alpha \in H_{nr}^{n+1}(L/k, \mathbb{Z}/2)$, comme voulu. $\square$

Lemme 3.3. *On se place dans la situation 3.1. Soit $c_\infty \in \mathbb{P}_k^1(k)$ le point à l'infini, défini par $u' = 0$. La fibre $\pi^{-1}(c_\infty)$ est un cône sur une quadrique de sommet $m_\infty \in X(k)$. Soit $m \in X(k)$ d'image $\pi(m) = c \in \mathbb{A}^1(k) = k$ avec $c.p(c) \neq 0$.*

(1) *Soit Ψ l'application de la proposition 3.2. Alors*

$$\Psi([m - m_\infty]) = (u - c, a_1, \dots, a_n)$$

dans $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/\text{Im}(H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cup (a_1, \dots, a_n))$.

(2) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *On a $[m - m_\infty] = 0$ dans $A_0(X)$.*
- (ii) *Il existe $e \in k^\times$ tel que $(e(u - c), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.*
- (iii) *On a $(c(c - u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.*
- (iv) *On a $(p(c).(c - u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.*

Si $(p(u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k(u), \mathbb{Z}/2)$, alors (i)-(iv) sont équivalentes à :

- (v) *On a $(c - u, a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.*

Démonstration. Pour (1), il suffit de noter que le diviseur de la fonction $u - c \in k(\mathbb{P}_k^1)_{dn}^\times$ sur $\mathbb{P}_k^1$ est $c - c_\infty = \pi_*(m - m_\infty)$ et d'utiliser la description de Ψ donnée dans la proposition 3.2. On passe à (2).

- (i) $\iff$ (ii). Ceci suit de (1) et de l'injectivité de Ψ (proposition 3.2).
- (ii) $\iff$ (iii). Si (iii) vaut, alors (ii) est satisfaite avec $e = -c$.

Dans la notation de la situation 3.1, la courbe Δ est donnée par $w^2 = -u.p(u)$; elle possède donc le point k -rationnel P d'équation $w = u = 0$. Si (ii) est satisfaite, par spécialisation de l'égalité de (ii) en P on obtient $(-c, a_1, \dots, a_n) = (e, a_1, \dots, a_n)$ dans $H^{n+1}(k, \mathbb{Z}/2)$, ce qui avec l'égalité de (ii) implique (iii).

(iii) $\iff$ (iv). Comme $c.p(c) \neq 0$ est représenté par la partie pure de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, on a

$$(3.5) \quad (c.p(c), a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \text{dans } H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$$

et donc $(c.(c-u), a_1, \dots, a_n) = (p(c).(c-u), a_1, \dots, a_n)$ dans $H^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.

(iv) $\iff$ (v). Supposons $(p(u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k(u), \mathbb{Z}/2)$. Alors $(p(c), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k, \mathbb{Z}/2)$, par évaluation en $u = c$. Ainsi, (iv) est équivalent à (v). $\square$

Situation 3.4. On se place dans la situation 3.1. Dans l'équation de Δ , nous faisons maintenant le changement de variables $u = -v$. La nouvelle équation est donc

$$(3.6) \quad w^2 = v.p(-v).$$

Soit $W := X \times_k \Delta$ et soient $\pi_1: W \xrightarrow{\text{pr}_1} X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_k^1$ et $\pi_2: W \xrightarrow{\text{pr}_2} \Delta \xrightarrow{\rho} \mathbb{P}_k^1$. On note encore $u := \pi_1^*(u) \in k(W)$ et $v := \pi_2^*(v) \in k(W)$.

Théorème 3.5. *Dans la situation 3.4, supposons $(p(u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k(u), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors :*

(1) *La classe*

$$(u + v, a_1, \dots, a_n) \in H^{n+1}(k(W), \mathbb{Z}/2)$$

appartient à $H_{nr}^{n+1}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$.

(2) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *On a $A_0(X_{k(X)}) = 0$.*

(b) *Pour tout corps F contenant k , on a $A_0(X_F) = 0$.*

(c) *Pour le corps $F = k(\Delta)$, l'application $H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

(d) *L'application $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

(e) *On a $(u + v, a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k(W), \mathbb{Z}/2)$.*

(f) *La fonction $u + v \in k(W)$ est représentable sur $k(W)$ par la forme quadratique $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$.*

Démonstration. (1) Soit $L := k(W)$, soit $A \subset L$ un anneau de valuation discrète contenant k , de corps des fractions L , et soit κ son corps résiduel. Soit $\omega: L^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation discrète associée. Notons $\partial: H^{n+1}(L, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^n(\kappa, \mathbb{Z}/2)$ l'application résidu. On veut montrer $\partial(u + v, a_1, \dots, a_n) = 0$. On a :

$$\partial(u + v, a_1, \dots, a_n) = \omega(u + v)(a_1, \dots, a_n)_\kappa \text{ dans } H^n(\kappa, \mathbb{Z}/2).$$

Si $(a_1, \dots, a_n)_\kappa = 0$ ou si $\omega(u + v)$ est pair, le résidu est nul. On suppose désormais

$$(3.7) \quad (a_1, \dots, a_n)_\kappa \neq 0, \quad \omega(u + v) \equiv 1 \pmod{2}$$

et on veut aboutir à une contradiction. D'après la proposition 2.1, $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ ne représente pas zéro sur κ , donc tout élément de $L^\times$ représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ a une valuation paire. Encore par la proposition 2.1, l'hypothèse $(p(u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dit que $p(u)$ est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $k(u)$, il l'est donc aussi dans L . De même, $p(-v)$ est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $k(v)$ donc dans L . Comme $u.p(u)$ est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $k(X)$ et donc dans L , la proposition 2.2(3) entraîne que u est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans L , et donc l'entier $\omega(u)$ est pair. Par ailleurs $v.p(-v)$ est un carré dans $k(\Delta)$ et donc dans L , donc v est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans L . Ainsi l'entier $\omega(v)$ est pair.

Comme on a $\omega(u+v) \geq \inf(\omega(u), \omega(v))$, avec égalité si $\omega(u) \neq \omega(v)$, de $\omega(u)$ pair, $\omega(v)$ pair et $\omega(u+v)$ impair on déduit l'existence d'un entier m tel que

$$(3.8) \quad \omega(u+v) > \omega(u) = \omega(v) = 2m.$$

On a donc trois cas à considérer : (i) $m > 0$, (ii) $m < 0$ et (iii) $m = 0$.

(i) Supposons $m > 0$. Alors on a $p(u) \in A^\times$, et la réduction de $p(u)$ est l'image de $p(0)$ dans κ . Ainsi il existe un élément non nul z dans le complété $\hat{L}$ de L tel que $p(u) = p(0).z^2$ dans $\hat{L}$. On regarde l'égalité (3.1) dans L :

$$\sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} a_I x_I^2 = u.p(u)$$

En divisant les x_I par z , on en déduit que dans le complété $\hat{L}$ de L , il existe $f_I \in \hat{L}$ avec

$$\sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} a_I f_I^2 = u.p(0),$$

et donc $u.p(0)$ est représenté par la partie pure de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $\hat{L}$. D'autre part, comme $m > 0$, on a $p(-v) \in A^\times$ et l'image de $p(-v)$ dans κ est $p(0)$. De (3.6) on déduit alors que $v.p(0)$ est un carré non nul dans $\hat{L}$. On conclut que $(u+v).p(0)$ est représenté par la forme $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $\hat{L}$, et donc que l'on a $\partial(u+v, a_1, \dots, a_n) = 0$, en contradiction avec (3.7).

(ii) Supposons $m < 0$. Alors $p(u)$ est le produit de u^{2d} et d'un élément de $A^\times$ d'image 1 dans κ . De même $p(-v)$ est le produit de v^{2d} et d'un élément de $A^\times$ d'image 1 dans κ . Donc $p(u)$ et $p(-v)$ sont des carrés dans $\hat{L}^\times$. De (3.1) on déduit que u est représenté par la partie pure de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans $\hat{L}$. De (3.6) on déduit que v est un carré dans $\hat{L}^\times$. On conclut que $u+v$ est représenté par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ sur $\hat{L}$, et donc que

$$\partial(u+v, a_1, \dots, a_n) = 0,$$

en contradiction avec (3.7).

(iii) Supposons $m = 0$. Alors $u, v \in A^\times$, et donc en particulier $k[u] \subset A$ et $k[v] \subset A$. Montrons que l'image de $p(u)$ dans κ est non nulle. Considérons l'idéal premier

$$\mathfrak{p}_u := \mathfrak{m}_A \cap k[u] \subset k[u].$$

Si $\mathfrak{p}_u = (0)$, alors tout élément non nul de $k[u]$ a une image non nulle dans κ , et en particulier l'image de $p(u)$ est non nulle. Supposons donc $\mathfrak{p}_u \neq (0)$. Alors $\mathfrak{p}_u = (q(u))$ pour un polynôme irréductible $q(u)$. Si l'image de $p(u)$ dans κ était nulle, on aurait $p(u) \in \mathfrak{p}_u$, donc $q(u)$ divise $p(u)$ dans $k[u]$. Comme p est séparable, le facteur irréductible q intervient dans p avec multiplicité 1. L'inclusion $k[u] \subset A$ induit une inclusion $k_u \subset \kappa$, où $k_u := k[u]/(q(u))$. Le résidu en q du symbole par hypothèse nul

$$(p(u), a_1, \dots, a_n) \in H^{n+1}(k(u), \mathbb{Z}/2)$$

est donc

$$(a_1, \dots, a_n)_{k_u} \in H^n(k_u, \mathbb{Z}/2).$$

Cette classe est donc nulle. Donc $(a_1, \dots, a_n)_\kappa = 0$ dans $H^n(\kappa, \mathbb{Z}/2)$, ce qui contredit (3.7). Ainsi l'image de $p(u)$ dans κ est non nulle.

Comme $m = 0$, par (3.8) u et $-v$ ont la même image dans κ , et donc $p(u)$ et $p(-v)$ ont aussi la même image dans κ . Donc l'image de $p(-v)$ dans κ est non nulle. Par conséquent

$$\omega(p(u)) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(p(-v)) = 0.$$

Pour tout $a \in A$, on écrit $\bar{a} \in \kappa$ pour la classe de a dans le corps résiduel. De l'équation (3.1) on déduit que l'unité $u.p(u) \in A^\times$ est représentée par la partie pure de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dans L , et donc aussi dans l'anneau de valuation discrète A ; voir [CLRR80, Theorem 4.5]. Donc $\bar{u}.p(\bar{u}) \in \kappa^\times$ est représenté par la partie pure de $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. De même, de l'équation (3.6) on déduit que $\bar{v}.p(-\bar{v}) \in \kappa^\times$ est un carré. Ainsi $\bar{u}.p(\bar{u}) + \bar{v}.p(-\bar{v})$ est représenté non trivialement par $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ sur le corps κ .

Comme on a $u, v \in A$, on a $u + v \in A$, et donc par (3.8) on a $\omega(u + v) > 0$. On a alors $\bar{u} + \bar{v} = 0$ dans κ , donc

$$\bar{u}.p(\bar{u}) + \bar{v}.p(-\bar{v}) = 0.$$

On conclut que $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ représente 0 de façon non triviale sur κ , ce qui donne une contradiction avec (3.7).

(2) Comme dans le lemme 3.3, soit $c_\infty \in \mathbb{P}_k^1(k)$ le point à l'infini, donné par $u' = 0$, et soit m_∞ le sommet du cône $\pi^{-1}(c_\infty)$. Pour toute extension F/k et tout $m \in X(F)$ d'image $\pi(m) = c \in \mathbb{A}_k^1(F)$ avec $c.p(c) \neq 0$, d'après le lemme 3.3, après le changement de variable $u = -v$ sur Δ , la classe $[m - m_\infty] \in A_0(X_F)$ est nulle si et seulement si la classe

$$(c + v, a_1, \dots, a_n) \in H_{nr}^{n+1}(F(\Delta)/F, \mathbb{Z}/2)$$

est nulle.

Soit maintenant $\eta_X \in X$ le point générique de X . Comme $\pi(\eta_X)$ est le point générique de $\mathbb{P}_k^1$, on applique ce qui précède à $F = k(X)$ et au $k(X)$ -point $\eta_X \in X(k(X))$. L'image de η_X dans $\mathbb{A}_k^1(k(X))$ est $u \in k(X)$. On obtient donc que la classe $\eta_X - m_\infty$ dans $A_0(X_{k(X)})$ est nulle si et seulement si la classe

$$(u + v, a_1, \dots, a_n) \in H_{nr}^{n+1}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$$

est nulle.

(a) $\iff$ (b). Ceci suit, par exemple, d'un théorème de Merkurjev [Mer08, Theorem 2.11 (1) $\iff$ (4)].

(b) $\iff$ (e). Soit $m_\infty \in X(k)$ comme dans le lemme 3.3. Si (b) est satisfaite, alors $[m_{\text{gén}} - m_\infty] = 0$ dans $A_0(X_{k(X)})$ et donc (e) vaut par la première partie de la preuve. Inversement, si (e) est satisfaite, alors $[m_{\text{gén}} - m_\infty] = 0$ dans $A_0(X_{k(X)})$ et donc $[m_{\text{gén}}] \in CH_0(X_{k(X)})$ provient de $CH_0(X)$. La classe $[m_{\text{gén}}]$ coïncide avec la classe $\xi \in CH_0(X_{k(X)})$ considérée dans [Mer08, Theorem 2.11(4)]; voir [Mer08, §2.3]. La condition (b) suit alors de [Mer08, Theorem 2.11 (4) $\implies$ (3)].

(e) $\iff$ (f). Ceci suit de la proposition 2.1.

(a) $\implies$ (c). Ceci suit de [Mer08, Theorem 2.11 (3) $\implies$ (1)].

(c) $\implies$ (d). Par hypothèse la flèche $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(k(W)/k(\Delta), \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme. Comme $X(k) \neq \emptyset$, la projection $W = X \times_k \Delta \rightarrow \Delta$ admet une section. La cohomologie non ramifiée étant fonctorielle contravariante par morphismes de k -variétés lisses connexes [CT95, Theorem 4.1.1, Remark 4.1.2], on en déduit que l'application naturelle $H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme, et donc (d).

(d) $\implies$ (e). D'après (1), la condition (d) entraîne que la classe

$$(u + v, a_1, \dots, a_n) \in H_{nr}^{n+1}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$$

est l'image d'une classe $\alpha \in H_{nr}^{n+1}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$. Soit $x \in X(k)$ le k -point défini par $u = 0$ et $x_I = 0$ pour tout $I \subset [n]$ non vide, et soit $s = (x, \text{id}_\Delta) : \Delta \rightarrow W$. Par fonctorialité, la classe α coïncide avec la spécialisation de $(u + v, a_1, \dots, a_n)$ en s , et donc

$$\alpha = s^*((u + v, a_1, \dots, a_n)) = (v, a_1, \dots, a_n).$$

Comme $v.p(-v) = w^2$ est un carré dans $k(\Delta)$ par (3.6) et $(p(u), a_1, \dots, a_n) = 0$ dans $H^{n+1}(k(u), \mathbb{Z}/2)$ par hypothèse, on a

$$(v, a_1, \dots, a_n) = (p(-v), a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Ainsi (d) implique (e). $\square$

4. UN CRITÈRE DE CH_0 -TRIVIALITÉ UNIVERSELLE : LE CAS RÉEL

Situation 4.1. Dans la situation 3.4, on suppose que $k = R$ est un corps réel clos et que $p(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in R$, et on pose $a_i = -1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Donc $a_I = 1$ pour tout $I \subset [n]$.

Dans ce cas, X est le recollement de la R -variété définie par l'équation

$$(4.1) \quad \left\{ \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - u.p(u)x^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}_R^{2^n-1} \times_R \text{Spec}(R[u])$$

avec la R -variété définie par l'équation

$$(4.2) \quad \left\{ \sum_{i=1}^{2^n-1} y_i^2 - u'.p'(u')y^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{P}_R^{2^n-1} \times_R \text{Spec}(R[u'])$$

via l'identification

$$u' = 1/u, \quad y = x, \quad y_i = (u')^{d+1}x_i.$$

Le morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ est donné par $u = 1/u'$. La courbe hyperelliptique $\rho : \Delta \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ est donnée par l'équation affine

$$(4.3) \quad w^2 = v.p(-v).$$

On dispose encore du produit $W := X \times_R \Delta$, des morphismes $\pi_1 : W \xrightarrow{\text{pr}_1} X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_R^1$ et $\pi_2 : W \xrightarrow{\text{pr}_2} \Delta \xrightarrow{\rho} \mathbb{P}_R^1$. On note encore $u := \pi_1^*(u) \in R(W)$ et $v := \pi_2^*(v) \in R(W)$.

Remarque 4.2. On se place dans la situation 4.1. Comme $p(u)$ est positif sur R , c'est une somme de deux carrés dans $R[u]$. L'équation

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 - u.p(u)t^2 = 0$$

donne que u est une somme de 2^n carrés dans $R(X)$. De même, l'équation $w^2 = v.p(-v)$ donne que v est une somme de deux carrés dans $R(\Delta)$. Donc $u + v$ est une somme de $2^n + 2$ carrés dans $R(W)$.

Le théorème suivant généralise [CTP24, Théorème 4.8].

Théorème 4.3. Dans la situation 4.1, la classe

$$(u + v, -1, \dots, -1) \in H^{n+1}(R(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

appartient au sous-groupe $H_{nr}^{n+1}(R(W)/R, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) On a $A_0(X_{R(X)}) = 0$.
- (b) Pour tout corps F contenant R , on a $A_0(X_F) = 0$.
- (c) Pour le corps $F = R(\Delta)$, l'application $H^{n+1}(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.
- (d) L'application $\mathbb{Z}/2 = H_{nr}^{n+1}(R(\Delta)/R, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{nr}^{n+1}(R(W)/R, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.
- (e) On a $(u + v, -1, \dots, -1) = 0$ dans $H^{n+1}(R(W)/R, \mathbb{Z}/2)$
- (f) La fonction $u + v \in R(W)$ est une somme de 2^n carrés dans $R(W)$.

Démonstration. Comme $p(u)$ est positif, c'est une somme de deux carrés dans $R(u)$ et donc $(p(u), -1, \dots, -1) = 0$ dans $H^{n+1}(R(u), \mathbb{Z}/2)$. Le fait que le groupe $H_{nr}^{n+1}(R(\Delta)/R, \mathbb{Z}/2)$ dans (d) est cyclique d'ordre 2 suit du fait que $\Delta(R)$ est semi-algébriquement connexe (car $p(u)$ est positif sur R) et de [CTP90, Theorem 2.3.1]. L'assertion est alors un cas particulier du théorème 3.5. $\square$

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2

Le lemme suivant permet d'éviter les calculs particuliers utilisés dans la preuve des théorèmes 5.1 et 5.3 de [CTP24].

Lemme 5.1. Soient R un corps réel clos archimédien et $p(t) \in R[t]$ un polynôme strictement positif sur R . Considérons le polynôme

$$r_N(u, v) := \frac{u^{2N+1}p(u) + v^{2N+1}p(-v)}{u + v} \in R[u, v].$$

Il existe un entier $N \geq 0$ tel que $r_N(u, v) \geq 0$ sur R^2 .

Démonstration. Comme le corps R est archimédien, on le considère comme un sous-corps ordonné de $\mathbb{R}$. Si p avait une racine dans $\mathbb{R}$, cette racine serait algébrique sur R , donc appartiendrait à R , puisque R est réel clos. On déduit que p n'a pas de racine sur $\mathbb{R}$ et donc qu'il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. On peut donc supposer $R = \mathbb{R}$.

Soit $2d$ le degré de p et soit $p'(t)$ la dérivée de $p(t)$ par rapport à t . Comme p est strictement positif, la fonction $t \mapsto tp'(t)/p(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left(-\frac{tp'(t)}{p(t)} \right) = -2d.$$

On déduit que la fonction $t \mapsto -tp'(t)/p(t)$ est bornée. Il existe un entier positif N tel que $2N + 1 > -tp'(t)/p(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme p est strictement positif, ceci équivaut à $(2N + 1)p(t) + tp'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $f(t) := t^{2N+1}p(t)$. On a

$$f'(t) = (2N + 1)t^{2N}p(t) + t^{2N+1}p'(t) = t^{2N}((2N + 1)p(t) + tp'(t)) \geq 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$r_N(u, v) = \frac{f(u) - f(-v)}{u - (-v)}.$$

Comme f est croissante, si $u > -v$ alors $f(u) \geq f(-v)$, et si $u < -v$ alors $f(u) \leq f(-v)$. Donc $r_N(u, v) \geq 0$ si $u \neq -v$. Par continuité, $r_N(u, v) \geq 0$. $\square$

Théorème 5.2. *Soit R un corps réel clos archimédien. Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $p(u) \in R[u]$ un polynôme séparable, non constant, de degré pair, tel que $p(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in R$. Soit X un modèle projectif et lisse de la fibration en quadriques sur $\mathbb{P}_R^1$ dont l'équation affine est*

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = u \cdot p(u).$$

Alors X est universellement CH_0 -triviale.

Démonstration. On se place dans la situation 4.1. La courbe Δ est donnée par $w^2 = v \cdot p(-v)$. D'après le théorème 4.3, il suffit de montrer que la fonction $u + v$ est une somme de 2^n carrés dans $R(W)$.

Par le lemme 5.1, il existe $N \geq 0$ tel que

$$r_N(u, v) = \frac{u^{2N+1}p(u) + v^{2N+1}p(-v)}{u + v} \geq 0$$

sur R^2 . D'après Hilbert [Hil93] (voir [Lan06, p. 282]), généralisé par Pfister [Pf67], $r_N(u, v)$ est alors une somme de 4 carrés dans $R(u, v)$.

Sur W , on a

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = u \cdot p(u) \quad \text{et} \quad w^2 = v \cdot p(-v).$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} (u^N x_i)^2 + (v^N w)^2 = u^{2N+1}p(u) + v^{2N+1}p(-v) = (u + v)r_N(u, v).$$

Le membre de gauche est une somme de 2^n carrés dans $R(W)$ et le facteur $r_N(u, v)$ est une somme de 4 carrés dans $R(u, v)$, donc dans $R(W)$. Comme le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés (Euler), $u + v$ est une somme de 2^n carrés dans $R(W)$. On conclut par le théorème 4.3. $\square$

6. FIBRATIONS EN QUADRIQUES NON STABLEMENT RATIONNELLES

Le théorème 4.3 nous permet d'étendre en dimension supérieure le théorème 1.1 de [BP24], dont nous suivons de très près la démonstration.

Théorème 6.1. *Soit $R := \bigcup_{q \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/q}))$ le corps réel clos des séries de Puiseux réelles et soit $n \geq 2$. Les modèles projectifs et lisses de la R -variété algébrique définie par l'équation*

$$(6.1) \quad \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = (u-1)(u^2+t)$$

ne sont pas universellement CH_0 -triviaux, ni donc stablement R -rationnels.

Remarque 6.2. Soit $e \geq 0$. On peut vérifier que le théorème 6.1 vaut pour tout modèle projectif et lisse d'une variété algébrique sur R définie par l'équation plus générale

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = (u-1)(u^2+t) \prod_{j=1}^e (ju^2+1)$$

qui dans le cas $n = 2$ avait été traitée par Benoist–Pirutka [BP24, Theorem 1.1].

Remarque 6.3. L'exemple du théorème 6.1 est birationnel à l'hypersurface cubique singulière X sur R définie par l'équation homogène

$$v \left(\sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 \right) - (u-v)(u^2+tv^2) = 0.$$

Pour $m \geq 1$, soit K_m le corps des fonctions du $\mathbb{R}[[s]]$ -sous-schéma de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}[[s]]}^{2^n+2}$, de coordonnées $(u, v, w, x_1, \dots, x_{2^n-1})$, défini par les équations

$$(6.2) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = (u-1)(u^2+s^{4m}), \\ w^2 = (v+1)(v^2+s^{4m}). \end{cases}$$

La proposition suivante est l'ingrédient clé de la preuve du théorème 6.1.

Proposition 6.4. *Pour tout $m \geq 1$, la classe*

$$(u+v, \underbrace{-1, \dots, -1}_n) \in H^{n+1}(K_m, \mathbb{Z}/2)$$

n'appartient pas à $H_{nr}^{n+1}(K_m/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. Considérons le $\mathbb{R}[[s]]$ -schéma Z défini par les équations

$$(6.3) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i'^2 = (s^{2m}u' - 1)(u'^2 + 1), \\ w'^2 = (s^{2m-1}v' + 1)(v'^2 + s^2). \end{cases}$$

Le changement de variables

$$x_i = s^{2m}x_i' \quad (1 \leq i \leq 2^n-1), \quad u = s^{2m}u', \quad w = s^{2m-1}w', \quad v = s^{2m-1}v'$$

induit un isomorphisme birationnel entre (6.2) et (6.3). On a

$$(u+v, \underbrace{-1, \dots, -1}_n) = (s^{2m-1}(su' + v'), \underbrace{-1, \dots, -1}_n).$$

Le diviseur de Cartier $D := \{s = 0\} \subset Z$ est la variété algébrique réelle définie par

$$(6.4) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i'^2 + u'^2 + 1 = 0, \\ w'^2 - v'^2 = 0. \end{cases}$$

Il a deux composantes irréductibles, que l'on note D_1 et D_2 , définies respectivement par $w' = v'$ et par $w' = -v'$. Comme D est lisse au point générique de D_1 , le schéma Z est régulier au point générique de D_1 . Soit ω la valuation discrète du corps des fonctions de Z associée à D_1 , et soit ∂_ω l'application résidu correspondante.

Puisque $\omega(s^{2m-1}(su' + v')) = 2m - 1$ est impair, on obtient

$$(6.5) \quad \partial_\omega(s^{2m-1}(su' + v'), \underbrace{-1, \dots, -1}_n) = \underbrace{(-1, \dots, -1)}_n \quad \text{dans } H^n(\mathbb{R}(D_1), \mathbb{Z}/2).$$

D'après la proposition 2.1, la classe de droite est nulle si et seulement si -1 est somme de 2^{n-1} carrés dans $\mathbb{R}(D_1)$. Comme D_1 est stablement birationnelle à la quadrique réelle anisotrope de dimension $2^n - 1$, d'après Pfister [Lam05, Chapter XI, Theorem 2.6] son corps des fonctions a niveau 2^n . Ainsi -1 n'est pas somme de 2^{n-1} carrés dans $\mathbb{R}(D_1)$, et le résidu (6.5) est non nul. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 6.1.

Preuve du théorème 6.1. Soit W la variété algébrique sur $\mathbb{R}((t))$ définie par le système

$$(6.6) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2^n-1} x_i^2 = (u-1)(u^2+t), \\ w^2 = (v+1)(v^2+t). \end{cases}$$

Pour tout $m \geq 1$, en appliquant la proposition 6.4 avec $s = t^{1/4m}$, on voit que la classe

$$(u+v, \underbrace{-1, \dots, -1}_n) \in H^{n+1}(\mathbb{R}((t^{1/4m}))(W), \mathbb{Z}/2)$$

est ramifiée sur $\mathbb{R}$, et en particulier n'est pas nulle. Il s'ensuit que la classe

$$(u+v, \underbrace{-1, \dots, -1}_n) \neq 0 \quad \text{dans } H^{n+1}(R(W), \mathbb{Z}/2).$$

En effet, si cette classe était nulle dans $H^{n+1}(R(W), \mathbb{Z}/2)$, elle serait nulle dans $H^{n+1}(\mathbb{R}((t^{1/m}))(W), \mathbb{Z}/2)$ pour un entier $m > 0$ convenable, et a fortiori dans $H^{n+1}(\mathbb{R}((t^{1/4m}))(W), \mathbb{Z}/2)$, contradiction.

D'autre part, le changement de variable $u \mapsto u+1$ montre que l'équation (6.1) est du type considéré dans la situation 4.1, avec

$$p(u) = ((u+1)^2 + t) = u^2 + 2u + 1 + t.$$

Le théorème 4.3, appliqué après les changements de variables $u \mapsto u+1$ et $v \mapsto v-1$, montre que cette classe appartient à $H_{nr}^{n+1}(R(W)/R, \mathbb{Z}/2)$. Le même théorème donne que l'annulation de cette classe est équivalente à la CH_0 -trivialité universelle pour les modèles projectifs et lisses de la variété définie par (6.1). Comme nous venons de montrer que la classe est non nulle, ces modèles ne sont pas universellement CH_0 -triviaux. $\square$

Remarque 6.5. Soit $R := \bigcup_{q \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/q}))$ le corps des séries de Puiseux réelles, où t est strictement positif et infiniment petit. En dimension $6 = 2^3 - 2$, d'autres exemples de fibrations en quadriques génériques $X \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ non CH_0 -triviales pour lesquelles $X(R)$ est semi-algébriquement connexe ont été construits dans [CTPS26, Théorème 5.3].

RÉFÉRENCES

- [ACTP17] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala. Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane. Dans *Brauer groups and obstruction problems*, volume 320 de *Progr. Math.*, pages 29–55. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. [4](#)
- [BP24] O. Benoist et A. Pirutka. On the rationality of some real threefolds. *arXiv:2412.13624*, 2024. À paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*. [2](#), [3](#), [16](#), [17](#)
- [CLRR80] M. D. Choi, T. Y. Lam, B. Reznick et A. Rosenberg. Sums of squares in some integral domains. *J. Algebra*, 65(1):234–256, 1980. [13](#)
- [CT95] J.-L. Colliot-Thélène. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, volume 58 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–64. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. [13](#)
- [CTI81] J.-L. Colliot-Thélène et F. Ischebeck. L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(15):723–725, 1981. [3](#)
- [CTP90] J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala. Real components of algebraic varieties and étale cohomology. *Invent. math.* 101:81–99, 1990. [15](#)
- [CTP24] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka. Certaines fibrations en surfaces quadriques réelles. À paraître dans *Comm. Math. Helv.*. *arXiv:2406.00463*, 2024. [2](#), [3](#), [6](#), [9](#), [14](#), [15](#)
- [CTPS26] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pirutka et F. Scavia. Variétés réelles semi-algébriquement connexes non stablement rationnelles. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, 13:1061–1098, 2026. [18](#)
- [CTS93] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques. *K-Theory*, 7(5):477–500, 1993. [3](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#)
- [Hil93] D. Hilbert. Über ternäre definite Formen. *Acta Math.*, 17(1):169–197, 1893. [16](#)
- [HT21] B. Hassett et Y. Tschinkel. Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields. *Enseign. Math.*, 67(1-2):1–44, 2021. Avec un appendice par Jean-Louis Colliot-Thélène. [2](#)
- [Kah08] B. Kahn. *Formes quadratiques sur un corps*, volume 15 de *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2008. [5](#)
- [Lam05] T. Y. Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*, volume 67 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. [5](#), [7](#), [18](#)
- [Lan06] E. Landau. Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate. *Math. Ann.*, 62(2):272–285, 1906. [16](#)
- [Mer08] A. Merkurjev. Unramified elements in cycle modules. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 78(1):51–64, 2008. [13](#)
- [OVV07] D. Orlov, A. Vishik et V. Voevodsky. An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms. *Ann. of Math. (2)*, 165(1):1–13, 2007. [5](#)
- [Pf67] A. Pfister. Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. *Invent. math.*, 4:229–237, 1967. [16](#)
- [Voe03] V. Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$ -coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):59–104, 2003. [5](#)

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, CNRS, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY, 91405, ORSAY, FRANCE.

Courriel: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr

CNRS, INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD, 93430, VILLETANEUSE, FRANCE

Courriel: scavia@math.univ-paris13.fr