J. ALGEBRAIC GEOMETRY
**00** (XXXX) 000–000
S 1056-3911(XX)0000-0

# GROUPE DE PICARD ET GROUPE DE BRAUER DES COMPACTIFICATIONS LISSES D'ESPACES HOMOGÈNES

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET BORIS È. KUNYAVSKIĬ

**Abstract**

Let $k$ be a field of characteristic zero, $G$ a connected linear algebraic group over $k$ and $H$ a connected closed $k$-subgroup of $G$. Let $X$ be a smooth $k$-compactification of $Y = G/H$. We prove that the Galois lattice given by the geometric Picard group of $X$ is *flasque*. The result was known in the case $H = 1$. We compute this Galois lattice up to addition of a permutation module. When $G$ is semisimple and simply connected, the result shows that the Brauer group of $X$ is determined by the maximal toric quotient of $H$.

## Introduction

Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique. Soit $g$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur $k$. Etant donnée une $k$-variété algébrique $Z$, on note $\overline{Z} = Z \times_k \overline{k}$. À toute $k$-variété projective, lisse et géométriquement connexe $Z$, on associe le $g$-module (module galoisien) défini par le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$. Si la variété $\overline{Z}$ est unirationnelle, le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ est un groupe abélien libre de type fini. Si $Z_1$ et $Z_2$ sont deux $k$-variétés projectives, lisses et géométriquement connexes $k$-birationnellement équivalentes, les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_1)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_2)$ sont isomorphes à addition près de $g$-modules de permutation (de type fini) ([CT/San2, Prop. 2.A.1]). Le groupe de cohomologie $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Z}))$ est un invariant $k$-birationnel étroitement lié au groupe $H^2_{\text{ét}}(Z, \mathbb{G}_m)$, qui est le groupe de Brauer cohomologique de $Z$, noté $\mathrm{Br}(Z)$ (voir la Proposition 1.1 ci-dessous).

Voskresenskiĭ (1974) montra que pour tout $k$-tore $T$ et toute $k$-compactification lisse $T_c$ de $T$, le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{T}_c)$ possède la propriété remarquable suivante : pour tout sous-groupe fermé $h \subset g$, on a $\mathrm{Ext}^1_h(\mathrm{Pic}(\overline{T}_c), \mathbb{Z}) = 0$ ([Vos1] ; [Vos2, IV.4.49] ; voir aussi [CT/San1, §2] et [Vos3, §4.6]). Dans la terminologie introduite dans [CT/San1], le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{T}_c)$ est un module flasque. Un argument simple donné dans un article récent ([B/K2],

Received March 26, 2005 and, in revised form, April 21, 2005 and June 23, 2005.

2004) montre que ce résultat s'étend aux groupes linéaires connexes : pour toute $k$-compactification lisse $G_c$ d'un $k$-groupe linéaire connexe $G$, le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{G}_c)$ est flasque.

Le fait que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{G}_c)$ est flasque permet de calculer ce module, à addition près d'un $g$-module de permutation, et de donner une formule simple pour le groupe de Brauer de $G_c$, ceci purement en termes du groupe $G$, sans avoir à en exhiber une compactification lisse ([CT/San1] dans le cas des tores ; [B/K2], [CT] pour les groupes linéaires connexes).

*Dans cet article, nous montrons que des résultats analogues valent plus généralement pour les compactifications lisses d'espaces homogènes de groupes linéaires connexes, quand le stabilisateur géométrique est connexe.*

Soient $G$ un $k$-groupe connexe et $X/k$ un espace homogène de $G$. Le *stabilisateur géométrique*, c'est-à-dire le groupe d'isotropie d'un $\overline{k}$-point de $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ est bien défini à $\overline{k}$-isomorphisme non unique près. On *note* $\overline{H}$ ce groupe. Supposons le groupe $\overline{H}$ connexe. Il y a alors un $k$-tore $T$ naturellement associé au $G$-espace homogène $X$, tel que $\overline{T}$ soit le plus grand quotient torique $\overline{H}^{\mathrm{tor}}$ de $\overline{H}$. Une définition de ce $k$-*tore associé* est donnée par Borovoi dans [Bo2, 4.1]. On en trouvera une autre au §1.

Soit $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X$. La $\overline{k}$-variété $\overline{X}_c$ est unirationnelle, le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est un $g$-module continu discret $\mathbb{Z}$-libre de type fini et le groupe $\mathrm{Br}(\overline{X}_c)$ est fini. On note $\mathrm{Br}_1(X_c)$ le noyau de l'application de restriction $\mathrm{Br}(X_c) \to \mathrm{Br}(\overline{X}_c)$. Le quotient du groupe de Brauer $\mathrm{Br}_1(X_c)$ par l'image du groupe $\mathrm{Br}(k)$ est un sous-groupe du groupe fini $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c))$ (Prop. 1.1).

À tout $g$-module continu discret $M$ et tout entier naturel $i$ on associe le groupe
$$Ш^i_\omega(k, M) = \mathrm{Ker}[H^i(g, M) \to \prod_h H^i(h, M)],$$
où $h$ parcourt les sous-groupes fermés procycliques de $g$.

Le but principal de l'article est d'établir le théorème suivant (Théorème 5.1).

**Théorème A.** *Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $G$ un $k$-groupe linéaire connexe, $X$ une $k$-variété espace homogène de $G$, de stabilisateur géométrique connexe. Soit $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X$.*

(i) *Le $g$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est un $g$-module flasque, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe fermé $h \subset g$, on a $H^1(h, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z})) = 0$, soit encore $\mathrm{Ext}^1_h(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z}) = 0$.*

(ii) *Pour $h \subset g$ sous-groupe fermé procyclique, on a $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) = 0$.*

(iii) *Soit $T$ le $k$-tore associé au $G$-espace homogène $X$, et soit $\hat{T}$ son groupe des caractères. Si $G$ est un groupe linéaire quasitrivial, i.e., extension d'un $k$-tore quasitrivial par un $k$-groupe simplement connexe, alors le quotient du groupe* $\mathrm{Br}_1(X_c)$ *par l'image du groupe* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans le groupe* $Ш^1_\omega(k, \hat{T})$, *et est isomorphe à ce dernier groupe si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $k$ est un corps de nombres.*

Sous l'hypothèse de (iii), nous montrons comment le $g$-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est déterminé, à addition près d'un $g$-module de permutation, par le $k$-tore $T$ — en particulier il ne dépend pas du groupe quasitrivial $G$. Ce théorème est une extension naturelle de résultats bien connus dans le cas où $G$ est un tore algébrique (§2).

Pour $G$ semi-simple simplement connexe, l'énoncé (iii) combiné avec un théorème de Bogomolov (Théorème 1.4 ci-dessous) établit une conjecture proposée au §5 de [CT/K]. Cette conjecture était motivée par les résultats de Borovoi [Bo2] sur le principe de Hasse et l'approximation faible pour les espaces homogènes définis sur un corps de nombres.

Un ingrédient important de la démonstration est le théorème suivant (Théorème 4.2).

**Théorème B.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète de corps des fractions $K$, de corps résiduel $k$ de caractéristique nulle. Soit $G$ un $K$-groupe quasitrivial et soit $E/K$ un $G$-espace homogène de stabilisateur géométrique connexe et de tore associé trivial. Soit $X$ un $A$-schéma propre, régulier, intègre, dont la fibre générique contient $E$ comme ouvert dense. Alors il existe une composante de multiplicité 1 de la fibre spéciale de $X/A$ qui est géométriquement intègre sur son corps de base $k$.*

L'hypothèse que le tore $T$ associé est trivial ($T = 1$) équivaut au fait que le quotient du stabilisateur géométrique $\overline{H}$ par son radical unipotent est un groupe semi-simple (connexe).

Nous discutons aussi un autre invariant, à savoir l'ensemble des classes de $R$-équivalence sur les $k$-points de $X_c$. C'est l'objet du §6, où l'on obtient une minoration de l'ensemble $X_c(k)/R$ lorsque le corps $k$ est un "bon" corps de dimension cohomologique 2 (par exemple un corps $p$-adique).

Dans une première mouture du présent article, sous l'hypothèse que $G$ est semi-simple simplement connexe, nous avions établi les points (ii) et (iii) du Théorème A, et prouvé des cas particuliers du Théorème B, dont nous avions montré qu'il implique le Théorème A. Nos preuves passaient par un long détour arithmétique (réduction au cas des corps de nombres et de leurs complétés). Dans cette version primitive de l'article, un outil de base était un théorème de Borovoi [Bo1] : si $k$ est un corps $p$-adique, $G$ un $k$-groupe semi-simple simplement connexe et $X$ un espace homogène de $G$ de stabilisateur géométrique connexe sans quotient torique, alors $X(k) \neq \emptyset$. Lors d'une discussion où nous mentionnions l'énoncé du Théorème B, Ofer Gabber nous a suggéré d'utiliser une variante purement algébrique du théorème de Borovoi pour établir le théorème B, en utilisant une réduction toute différente de celle mentionnée ci-dessus.

Nous remercions vivement O. Gabber pour son importante suggestion, et P. Gille et M. Borovoi pour diverses remarques. M. Borovoi a en particulier indépendamment remarqué que l'hypothèse $G$ semi-simple simplement connexe, que nous avions imposée dans la version précédente, peut être omise de la plupart de nos énoncés.

Ce travail a été commencé lors d'un séjour de B. Kunyavskiĭ à l'Université Paris-Sud en septembre 2004. Les résultats finaux ont été exposés à la conférence "Applications of torsors to Galois cohomology and Lie theory" qui s'est tenue au BIRS, à Banff (Alberta, Canada) en avril 2005. Pour sa recherche, B. Kunyavskiĭ a aussi bénéficié du soutien partiel du Ministère de l'Absorption (Israël), de l'Institut Emmy Noether (Fondation Minerva), de la Fondation Israélienne des Sciences (ISF) fondée par l'Académie Israélienne des Sciences et des Lettres (le programme Centre d'Excellence "Group-theoretic Methods in the Study of Algebraic Varieties") et du réseau européen HPRN-CT-2002-00287.

## 1. Rappels et préliminaires

La cohomologie employée est la cohomologie étale, qui, sur un corps, donne la cohomologie galoisienne. On supposera le lecteur familier avec la théorie fine des tores algébriques ([CT/San1], [Vos2], [Vos3]), en particulier avec les notions de tore quasitrivial, de tore flasque, et avec les divers types de résolutions flasques (voir aussi [CT/San3]). On utilisera librement des résultats sur les groupes linéaires connexes quelconques que l'on peut trouver dans [San]. On utilisera librement la notion de $R$-équivalence sur les points $k$-rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps $k$ (voir [CT/San1], [Vos3]). Enfin on utilisera librement la conséquence suivante du théorème d'Hironaka : si $k$ est un corps de caractéristique zéro et $f\colon X \to Y$ est un morphisme de $k$-variétés quasiprojectives lisses intègres, il existe un morphisme $f_c\colon X_c \to Y_c$ de $k$-variétés projectives lisses intègres étendant $f$ (cf. [B/K1, 1.2.2]).

**Proposition 1.1.** *Soient $k$ un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de $k$, $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $X$ une $k$-variété géométriquement intègre telle que $\overline{k}^{\times} = \overline{k}[X]^{\times}$,* *où* $\overline{k}[X]^\times$ *est le groupe des fonctions inversibles sur* $\overline{X}$. *On a une suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^g \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^\times),$$

*où* $\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})]$. *La flèche* $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^\times)$ *est nulle dans chacun des cas suivants :* $X(k) \neq \emptyset$ *;* $k$ *est un corps* $p$*-adique ou réel ;* $k$ *est un corps de nombres.*

*Démonstration.* C'est une conséquence bien connue de la suite spectrale de Leray pour la topologie étale, le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau $\mathbb{G}_m$, et de la nullité de $H^3(g, \overline{k}^\times)$ pour chacun des corps cités. □

Soient $k$ un corps et $G$ un $k$-groupe linéaire. On note $\hat{G} = \mathrm{Hom}_{\overline{k}-\mathrm{gr}}(\overline{G}, \mathbb{G}_{m,\overline{k}})$ le groupe des caractères de $G$. C'est un $g$-module continu discret de type fini ; si $G$ est connexe, ce module n'a pas de $\mathbb{Z}$-torsion.

Soient $k$ un corps, $H$ un $k$-groupe algébrique et $Y$ une $k$-variété algébrique. Un torseur (à gauche) sur $Y$ sous $H$ est une $k$-variété $X$ équipée d'un morphisme fidèlement plat $p \colon X \to Y$ et d'une action $H \times_k X \to X$ du groupe $H$ sur $X$, respectant le morphisme $p$, et telle que le morphisme $H \times_k X \to X \times_Y X$ donné par $(h, x) \mapsto (hx, x)$ soit un isomorphisme. On a la définition analogue pour un torseur à droite. On dit parfois espace principal homogène au lieu de torseur.

**Proposition 1.2** (Sansuc [San, Prop. 6.10])**.** *Soient* $k$ *un corps de caractéristique zéro,* $H$ *un* $k$*-groupe linéaire connexe,* $Y$ *une* $k$*-variété lisse géométriquement connexe et* $f \colon X \to Y$ *un torseur sur* $Y$ *sous* $H$. *On a alors une suite exacte naturelle*

$$0 \to \overline{k}[Y]^\times \to \overline{k}[X]^\times \to \hat{H} \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}).$$

Rappelons ici que le groupe des caractères $\hat{H}$ du groupe connexe $H$ s'identifie au module galoisien $\overline{k}[H]^\times/\overline{k}^\times$ (lemme de Rosenlicht).

**Proposition 1.3.** *Soient* $k$ *un corps de caractéristique zéro et* $X/k$ *une* $k$*-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit* $F/k$ *une extension de corps, avec* $k$ *algébriquement fermé dans* $F$. *Soient* $\overline{k} \subset \overline{F}$ *des clôtures algébriques de* $k$ *et* $F$. *Soient* $g_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ *et* $g_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. *Supposons en outre que le groupe* $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ *est un groupe abélien de type fini sans torsion. Alors :*

(i) *Le groupe de Galois de* $\overline{F}$ *sur le corps composé* $L = \overline{k}.F$ *agit trivialement sur le* $g_F$*-module* $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{F})$, *qui est donc un* $g$*-module. La flèche naturelle* $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}) \to \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{F})$ *est un isomorphisme de* $g$*-modules.*

(ii) *Chacune des propriétés suivantes vaut pour le* $g_k$*-module* $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ *si et seulement si elle vaut pour le* $g_F$*-module* $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{F})$ *: être un module* *de permutation, être un facteur direct d'un module de permutation, être un module flasque, être égal à un $g$-réseau donné à addition près de modules de permutation.*

(iii) *Les groupes* $H^1(g_k, \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}))$ *et* $H^1(g_F, \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{F}))$ *sont isomorphes.*

(iv) *Le quotient de* $\mathrm{Br}_1(X)$ *par l'image de* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans le quotient de* $\mathrm{Br}_1(X_F)$ *par l'image de* $\mathrm{Br}(F)$.

*Démonstration.* L'hypothèse que $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ est un groupe de type fini sans torsion équivaut à la combinaison de deux faits : le groupe de cohomologie cohérente $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est nul et le groupe de Néron–Severi de $X \times_k \overline{k}$ est sans torsion. La nullité de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ équivaut au fait que la variété de Picard de $X$ est triviale. Le groupe de Picard de $X \times_k \overline{k}$ coïncide donc avec le groupe de Néron–Severi de $X \times_k \overline{k}$, de même pour $X \times_k \overline{F}$, et il est bien connu que le groupe de Néron–Severi ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos (ceci se déduit facilement du théorème analogue pour la cohomologie étale à coefficients de torsion). Ainsi les injections naturelles

$$\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_k L) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_k \overline{F})$$

sont des isomorphismes. Ceci établit l'énoncé (i), qui implique immédiatement l'énoncé (ii) (si $M$ est un $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-module de permutation, alors le groupe des points fixes de $M$ sous $\mathrm{Gal}(\overline{F}/L)$ est un $\mathrm{Gal}(L/F)$-module de permutation, c'est-à-dire un $g$-module de permutation). L'énoncé (iii) résulte de la suite de restriction-inflation et de la nullité de $H^1(h, M)$ pour $M$ un groupe abélien sans torsion équipé d'une action triviale d'un groupe $h$ (profini). L'énoncé (iv) résulte de (iii) et de la Proposition 1.1. □

**Remarque 1.3.1.** Par un résultat de Serre, l'hypothèse que $\mathrm{Pic}(X \times_k \overline{k})$ est un groupe de type fini sans torsion est satisfaite si la $\overline{k}$-variété $X \times_k \overline{k}$ est unirationnelle, ce qui est certainement le cas pour une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe.

**Remarque 1.3.2.** L'intérêt de la Proposition 1.3 est que, pour établir l'une des propriétés voulues pour $X/k$, on peut supposer $X(k) \neq \emptyset$. Par la proposition ci-dessus, il suffit en effet d'étudier $X \times_k F/F$, où $F = k(X)$ est le corps des fonctions de $X$. La $F$-variété $X \times_k F$ possède un point $F$-rationnel, donné par le point générique de $X/k$. C'est "l'astuce du passage au point générique". Il existe d'autres variantes. Par exemple dans [B/K2], on considère une compactification lisse $X$ d'un groupe algébrique réductif connexe $G$ non nécessairement quasidéployé, et l'on passe au corps des fonctions de la variété des sous-groupes de Borel de $G$, ce qui a pour effet de quasidéployer $G$.

Pour le théorème suivant, on renvoie à [Bog] et [CT/San4, Thm. 9.13].

**Théorème 1.4** (Bogomolov)**.** *Soient $k$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $G$ un $k$-groupe semi-simple simplement connexe et $H \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Soit $X_c$ une compactification lisse du quotient $X = G/H$. Alors* $\mathrm{Br}(X_c) = 0$. □

On peut se demander si ce théorème vaut encore si $G$ est une extension d'un tore par un groupe semi-simple simplement connexe. Si tel était le cas, on pourrait dans le théorème A remplacer $\mathrm{Br}_1(X_c)$ par $\mathrm{Br}(X_c)$.

Nous donnons maintenant une définition du *$k$-tore associé* à un espace homogène du type considéré dans cet article. Soient $G$ un $k$-groupe linéaire connexe et $X/k$ un espace homogène de $G$ de stabilisateur géométrique $\overline{H}$ connexe. Comme $X$ est géométriquement intègre, le corps $k$ est algébriquement fermé dans le corps des fonctions $k(X)$ de $X$, donc $\overline{k}(X) = k(X) \otimes_k \overline{k}$ est le corps des fonctions de $\overline{X}$, et le groupe de Galois de $\overline{k}(X)$ sur $k(X)$ s'identifie au groupe de Galois $g$ de $\overline{k}$ sur $k$. Si l'on étend le corps de base de $k$ à $k(X)$, le point générique de $X$ permet d'identifier $X_{k(X)} = X \times_k k(X)$ au quotient de $G_{k(X)}$ par un $k(X)$-sous-groupe fermé connexe $H_0$, groupe qui sur $\overline{k}(X)$ est isomorphe à $\overline{H} \times_{\overline{k}} \overline{k}(X)$. Si l'on prend le quotient du $k(X)$-groupe $H_0$ par son radical unipotent, puis le quotient du groupe obtenu par son groupe dérivé, on obtient un $k(X)$-tore $T_0$ qui sur $\overline{k}(X)$ vient de $\overline{k}$, et qui est donc déployé par l'extension $\overline{k}(X)$ sur $k(X)$. Le groupe des caractères de $T_0$ est donc de façon naturelle un $g$-réseau, donc le dual définit un unique $k$-tore $T$ tel que $T \times_k k(X) \simeq T_0$. On dira que $T$ est *le $k$-tore associé au $G$-espace homogène $X$*. Le $g$-module $\hat{T}$ des caractères de $\overline{T}$ est aussi le groupe des caractères $\hat{H}$ de $\overline{H}$. Lorsque $X$ possède un point $k$-rationnel, le choix d'un $k$-point $x \in X(k)$ détermine un $k$-groupe algébrique $H_x$, le fixateur de $x$, satisfaisant $H_x \times_k \overline{k} \simeq \overline{H}$. Si l'on quotiente $H_x$ par son radical unipotent, puis le quotient obtenu par son groupe dérivé, on obtient un $k$-tore $H_x^{\mathrm{tor}}$, le plus grand quotient torique de $H_x$, qui est isomorphe au $k$-tore $T$ associé au $G$-espace homogène $X = G/H_x$.

Terminons ce paragraphe en rappelant la définition et quelques propriétés des groupes quasitriviaux ([CT]). Les résultats annoncés dans [CT] le sont pour les groupes réductifs connexes, le cas des groupes linéaires connexes quelconques s'en déduit aisément, en caractéristique nulle. Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique, $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit $G$ un $k$-groupe linéaire connexe. Le quotient de $G$ par son radical unipotent est un $k$-groupe réductif connexe $G^{\mathrm{red}}$. Le groupe $G^{\mathrm{red}}$ est une extension d'un $k$-tore $G^{\mathrm{tor}}$ par le groupe dérivé $G^{\mathrm{ss}}$ de $G^{\mathrm{red}}$, qui est un $k$-groupe semi-simple connexe.

Le $k$-groupe $G$ est dit quasitrivial si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) Le $k$-tore $G^{\mathrm{tor}}$ est quasitrivial (son groupe des caractères est un $g$-module de permutation).

(ii) Le groupe semi-simple $G^{\mathrm{ss}}$ est simplement connexe.

Ceci équivaut ([CT, Prop. 1.11]) à la combinaison des deux propriétés suivantes :

(iii) $\hat{G} \simeq \overline{k}[G]^{\times}/\overline{k}^{\times}$ est un $g$-module de permutation.

(iv) $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$.

Pour tout $k$-groupe linéaire connexe $G$, il existe une suite exacte

$$1 \to F \to G_1 \to G \to 1,$$

où $G_1$ est un $k$-groupe linéaire connexe quasitrivial et $F$ est un $k$-tore flasque (de groupe des caractères un $g$-module flasque) central dans $G_1$.

**Lemme 1.5.** *Soit $k$ un corps de caractéristique nulle. Soient $G$ un $k$-groupe linéaire connexe et $X$ une $k$-variété qui est un espace homogène de $G$ à stabilisateur géométrique connexe. Il existe un $k$-groupe algébrique linéaire connexe quasitrivial $G_1$ tel que $X$ est un espace homogène de $G_1$ à stabilisateur connexe.*

*Démonstration.* Soit $\overline{H}$ le stabilisateur géométrique pour l'action de $G$ sur $X$. Soit

$$1 \to F \to G_1 \to G \to 1$$

une suite exacte comme ci-dessus. La $k$-variété $X$ est un espace homogène de $G_1$. Le stabilisateur géométrique pour l'action de $G_1$ sur $X$ est une extension (centrale) de $\overline{H}$ par le $\overline{k}$-tore $\overline{F}$. C'est un groupe connexe. □

## 2. Quotients de tores

**Proposition 2.1.** *Soit $k$ un corps de caractéristique zéro. Soit*

$$1 \to T \to P \to Q \to 1$$

*une suite exacte de $k$-tores, avec $P$ quasitrivial. Soit $Q_c$ une $k$-compactification lisse du $k$-tore $Q$. Soit $1 \to T \to F \to P_1 \to 1$ une suite exacte de $k$-tores avec $F$ flasque et $P_1$ quasitrivial.*

(i) *Les $g$-modules $\mathbb{Z}$-libres de type fini $\hat{F}$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ sont isomorphes à addition près de modules de permutation, et $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ est donc un $g$-module flasque.*

(ii) *On a*

$$\mathrm{Br}(Q_c)/\mathrm{Br}(k) = H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) = H^1(k, \hat{F}) = Ш^1_\omega(k, \hat{T}) = Ш^2_\omega(k, \hat{Q}).$$

(iii) $Q_c(k)/R = Q(k)/R = H^1(k, F)$.

*Démonstration.* D'après [CT/San3, (1.3.2)], pour tout $k$-tore $T$ il existe une suite exacte $1 \to T \to F \to P_1 \to 1$ du type indiqué, et le $k$-tore flasque $F$ est bien déterminé à multiplication par un $k$-tore quasitrivial près. Formons l'expulsé (en anglais : "push-out") de $T \to P$ et $T \to F$. Ceci donne naissance à un diagramme commutatif de suites exactes de $k$-tores :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & P_1 & = & P_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Comme les tores $P$ et $P_1$ sont quasitriviaux, la suite médiane verticale est scindée, d'où une suite exacte

$$1 \to F \to P \times P_1 \to Q \to 1.$$

Cette dernière suite est une résolution flasque du tore $Q$. Un résultat de Voskresenskiĭ (cf. [CT/San1, Prop. 6]) donne alors (i). La Proposition 1.1 donne la première égalité dans (ii). La seconde résulte de (i) et de l'annulation de $H^1(g, \hat{P})$ pour un $g$-module de permutation $\hat{P}$. Les deux dernières égalités de (ii) s'établissent en considérant les suites exactes de caractères associées aux suites exactes de tores de l'énoncé, et en utilisant l'annulation mentionnée à l'instant, l'annulation de $H^1(h, \hat{F})$ pour $\hat{F}$ un $g$-module flasque et $h$ un sous-groupe fermé procyclique de $g$, et l'annulation de $Ш^2_\omega(k, \hat{P})$ pour $\hat{P}$ un $g$-module de permutation. Quant à (iii), c'est une application du Théorème 2, p. 199 et de la Proposition 13, p. 203 de [CT/San1]. $\square$

## 3. Espaces homogènes de groupes linéaires connexes dont le stabilisateur géométrique n'a pas de quotient torique

**Proposition 3.1.** *Soient $k$ un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique, $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, $G$ un $k$-groupe quasitrivial, $X$ un $k$-espace homogène sous $G$ à stabilisateur géométrique $\overline{H}$ connexe. Supposons $\overline{H}^{\mathrm{tor}} = 1$. Soit $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X$. Alors :*

(i) *Le $g$-module* $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ *est stablement de permutation.*

(ii) *La flèche naturelle* $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X_c)$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Pour établir le point (i), on peut, d'après la Proposition 1.3 et la Remarque 1.3.2, supposer $X(k) \neq \emptyset$, et donc $X = G/H$ avec $H$ un $k$-groupe linéaire connexe tel que $H^{\mathrm{tor}} = 1$. D'après le théorème de Hironaka, il existe une $k$-compactification lisse $G_c$ de $G$ et un $k$-morphisme $p\colon G_c \to X_c$ étendant le $k$-morphisme naturel $p\colon G \to G/H$. Comme $G$ est quasitrivial, $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, et $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times = \hat{G}$ est un $g$-module de permutation. Sous l'hypothèse $\overline{H}^{\mathrm{tor}} = 1$, on déduit alors de la Proposition 1.2 l'égalité $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$ et le fait que la flèche naturelle $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to \overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times$ est un isomorphisme. Le $g$-module $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est en particulier un $g$-module de permutation. On dispose alors du diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times \arrow[r] & \mathrm{Div}_\infty(\overline{G}_c) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{G}_c) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{Div}_\infty(\overline{X}_c) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{Pic}(\overline{X}_c) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. C'est un théorème général de [B/K2] que le $g$-module $\mathrm{Pic}(\overline{G}_c)$ est un $g$-module flasque. Comme $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times$ est ici un $g$-module de permutation, la suite horizontale supérieure est donc scindée. La suite exacte inférieure est la rétrotirette (en anglais : "pull-back") de la suite supérieure par l'application $p^*\colon \mathrm{Pic}(\overline{X}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{G}_c)$. Elle est donc aussi scindée. Comme $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ et $\mathrm{Div}_\infty(\overline{X}_c)$ sont tous deux des $g$-modules de permutation, ceci établit le point (i).

Etablissons le point (ii). Lorsque $X(k) \neq \emptyset$, on a vu ci-dessus que les modules galoisiens $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ et $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times$ sont isomorphes. Montrons comment l'astuce du passage au point générique permet de montrer qu'il en est encore ainsi sans supposer $X(k) \neq \emptyset$. Soient $E = k(X)$ le corps des fonctions de $X$ et $L = \overline{k}(X)$ le corps des fonctions de $\overline{X}$. L'extension $L/E$ est galoisienne de groupe $g$. C'est un fait général que pour tout corps algébriquement clos $k_1$, toute extension de corps $k_1 \subset k_2$ et toute $k_1$-variété lisse connexe $X$, la flèche naturelle $k_1[X]^\times/k_1^\times \to k_2[X]^\times/k_2^\times$ est un isomorphisme. Les flèches

$\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to L[X]^\times/L^\times$ et $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times \to L[G]^\times/L^\times$, qui sont des homomorphismes de $g$-modules, sont donc des isomorphismes. La $E$-variété $X \times_K E$ possède un point rationnel, correspondant au point générique de $X$. L'argument donné au point (i) montre alors que l'on dispose d'un $g$-isomorphisme $L[X]^\times/L^\times \simeq L[G]^\times/L^\times$. Ainsi les $g$-modules $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ et $\overline{k}[G]^\times/\overline{k}^\times$ sont isomorphes. En particulier $\overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times$ est un $g$-module de permutation. Le Théorème 90 de Hilbert assure alors que la suite exacte évidente

$$1 \to \overline{k}^\times \to \overline{k}[X]^\times \to \overline{k}[X]^\times/\overline{k}^\times \to 1$$

est scindée. L'application naturelle $H^2(g, \overline{k}^\times) \to H^2(g, \overline{k}[X]^\times)$ est donc injective. Comme on a $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = 0$, la suite spectrale de Leray pour le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ et le faisceau étale $\mathbb{G}_m$ donne $H^2(g, \overline{k}[X]^\times) \simeq \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})]$. Ainsi l'application naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ est injective, a fortiori en est-il de même de l'application $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X_c)$. D'après le point (i), le $g$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est stablement de permutation, on a donc $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) = 0$. Une application de la Proposition 1.1 à $X_c$ donne alors le point (ii). □

## 4. Le Théorème B

L'énoncé suivant rassemble des propriétés connues.

**Théorème 4.1.** *Soit $k$ un corps de caractéristique zéro, de dimension cohomologique 1. Le corps $K = k((t))$ des séries formelles en une variable sur $k$ satisfait les propriétés suivantes.*

(i) *Sa dimension cohomologique est 2.*

(ii) *Sur toute extension finie de $K$, indice et exposant des algèbres simples centrales coïncident.*

(iii) *Pour tout $K$-groupe quasitrivial $G$, on a $H^1(K, G) = 1$.*

(iv) *Soient $G$ un $K$-groupe semi-simple simplement connexe, $\mu$ son centre et*

$$1 \to \mu \to G \to G^{\mathrm{ad}} \to 1$$

*l'isogénie associée. Alors la flèche de bord $H^1(K, G^{\mathrm{ad}}) \to H^2(K, \mu)$ est une bijection.*

(v) *Soient $\overline{H}$ un $\overline{K}$-groupe linéaire connexe et $L = (\overline{H}, \kappa)$ un $K$-lien. Soit $H^{\mathrm{tor}}$ le $K$-tore associé à $L$. On dispose d'une application naturelle d'ensembles $H^2(K, L) \to H^2(K, H^{\mathrm{tor}})$. Un élément $\eta \in H^2(K, L)$ est neutre si et seulement si son image dans $H^2(K, H^{\mathrm{tor}})$ est triviale.*

(vi) *Soient $G$ un $K$-groupe quasitrivial et $E$ un espace homogène de $G$. Si le stabilisateur géométrique est connexe et n'a pas de quotient torique, alors $E(K) \neq \emptyset$.*

*Indications.* Les énoncés (i), (ii) et (iii) sont bien connus. On trouvera des références précises dans [CT/Gi/Pa, Thm. 1.5]. L'énoncé (iii) est dû à Bruhat et Tits lorsque $G$ est un $K$-groupe semi-simple simplement connexe, le cas réductif résulte du Théorème 90 de Hilbert et de la cohomologie galoisienne de la suite exacte $1 \to G^{\mathrm{ss}} \to G \to G^{\mathrm{tor}} \to 1$, le cas général se ramène au cas réductif par un argument bien connu. Les énoncés (iv) et (v) sont dans la thèse de Douai, lequel s'appuie sur les résultats de Bruhat et Tits. Comme établi dans [CT/Gi/Pa, Thm. 2.1(a)], l'énoncé (iv) vaut pour tout corps $K$ de caractéristique nulle satisfaisant les énoncés (i), (ii) et (iii). De même, l'énoncé (v) vaut pour tout tel corps : c'est le Théorème 5.4 de [CT/Gi/Pa], dont la démonstration combine la méthode de Borovoi ([Bo1], cas des corps $p$-adiques et des corps globaux) et l'énoncé (iv). Comme rappelé par Borovoi [Bo1], la donnée de $(G, E)$ dans (vi) définit un $K$-lien $L = (\overline{H}, \kappa)$ et le $K$-tore associé $H^{\mathrm{tor}}$ est par hypothèse trivial. L'énoncé (vi) résulte alors de (v). □

**Remarque 4.1.1.** Les indications données montrent que le Théorème 4.1 vaut plus généralement sur un corps $K$ de caractéristique nulle satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii).

On appellera ici *bon corps de dimension cohomologique* $\leq 2$ un corps de caractéristique nulle satisfaisant ces trois conditions. Des exemples de tels corps sont les corps de nombres totalement imaginaires, les corps $p$-adiques, les corps de fractions d'anneaux locaux henséliens de dimension 2 à corps résiduel algébriquement clos. Pour les corps de fonctions de deux variables sur les complexes, l'énoncé (ii) est un résultat de de Jong et l'énoncé (iii) vaut en l'absence de type $E_8$. On trouvera des références dans [CT/Gi/Pa].

Comme indiqué dans l'introduction, nous devons à O. Gabber l'idée de la démonstration du théorème suivant.

**Théorème 4.2** (Théorème B)**.** *Soit $A$ un anneau de valuation discrète de corps des fractions $K$, de corps résiduel $k$ de caractéristique nulle. Soient $G$ un $K$-groupe quasitrivial et $E/K$ un espace homogène sous $G$ de stabilisateur géométrique un groupe connexe sans quotient torique. Soit $X$ un $A$-schéma propre, régulier, intègre, dont la fibre générique contient $E$ comme ouvert dense. Alors il existe une composante de multiplicité 1 de la fibre spéciale de $X/A$ qui est géométriquement intègre sur son corps de base $k$.*

*Démonstration.* Un procédé classique, qui apparaît dans la démonstration du théorème de Merkur'ev et Suslin, permet de construire une extension $l/k$ avec $k$ algébriquement fermé dans $l$ et $l$ de dimension cohomologique 1. Indiquons le principe. S'il existe une extension finie $k_1$ de $k$ et une variété de

Severi–Brauer $W$ non triviale sur $k_1$, on plonge $k$ dans le corps des fonctions de la descendue à la Weil $R_{k_1/k}(W)$. On itère à l'infini le procédé. Pour plus de détails, voir la note de Ducros [D].

Soit $\pi$ une uniformisante de $A$. Comme le corps résiduel $k$ est de caractéristique zéro, le complété de $A$ est isomorphe à $k[[t]]$ ([S, Chap. II, §4, Théorème 2]), et l'on peut supposer que l'inclusion $A \subset k[[t]]$ envoie $\pi$ sur $t$. D'après le Théorème 4.1, $E(l((t))) \neq \emptyset$. Donc $X(l((t))) \neq \emptyset$ et comme $X/A$ est propre, $X(l[[t]]) \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $f\colon Spec(l[[t]]) \to X$ tel que le composé $Spec(l[[t]]) \to X \to Spec(A)$ est la flèche déduite de $A \subset k[[t]] \subset B = l[[t]]$.

On considère le point (schématique) $y \in X$ image du point fermé de $Spec(l[[t]])$. C'est un point de la fibre spéciale de $X/A$. Soit $C$ l'anneau local de $X$ en $y$. Comme $X$ est régulier, $C$ est un anneau local régulier, en particulier factoriel (Auslander–Buchsbaum, Serre). On a alors des homomorphismes d'anneaux locaux $A \to C \to B$, l'homomorphisme composé $A \to B$ n'étant autre que l'inclusion évidente $A \subset k[[t]] \subset l[[t]]$.

Soit

$$\pi_C = u \cdot \prod_{i=1}^{r} \rho_i^{n_i},$$

avec les $n_i > 0$, une décomposition de l'image de $\pi$ dans $C$ : ici $u$ est une unité de $C$, chaque $\rho_i$ appartient à l'idéal maximal de $C$ et est irréductible. Cette décomposition correspond à la description de la fibre spéciale de $X$ au voisinage du point $y$. On a alors l'égalité

$$t = u_B \cdot \prod_{i=1}^{r} (\rho_{i,B})^{n_i} \in B = l[[t]],$$

et l'image $\rho_{i,B}$ de $\rho_i \in C$ dans $B = l[[t]]$ appartient à l'idéal maximal de $B = l[[t]]$. Ainsi $r = 1$ et $n_1 = 1$, c'est-à-dire que $\pi_C$ est un élément irréductible de l'anneau local régulier $C$. De plus $\pi_C$, qui appartient à l'idéal maximal $m_C$ de $C$, n'appartient pas à $m_C^2$. Ainsi la fibre spéciale de $X/A$ au voisinage du point $y$ n'a qu'une composante, de multiplicité 1, soit $Z$. Son corps résiduel $k(Z)$ est le corps des fractions de $C/\pi_C$. L'homomorphisme composé $A \to C \to l[[t]]$ induit un homomorphisme composé $A/\pi \to C/\pi_C \to B/t$, soit encore $k \to C/\pi_C \to l$. Comme $\pi_C$ n'appartient pas à $m_C^2$, l'anneau local $C/\pi_C$ est régulier et en particulier intégralement clos. Le corps $k_1$ fermeture algébrique de $k$ dans le corps $k(Z)$ est donc contenu dans $C/\pi_C$, et on a les inclusions de corps $k \subset k_1 \subset l$. Comme $k$ est algébriquement fermé dans $l$, on a $k = k_1$ et $k$ est algébriquement fermé dans $k(Z)$. □

## 5. Le Théorème A

**Théorème 5.1** (Théorème A)**.** *Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $G$ un $k$-groupe linéaire connexe, $X$ une $k$-variété espace homogène de $G$, de stabilisateur géométrique connexe. Soit $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X$.*

(i) *Le $g$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est un $g$-module flasque, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe fermé $h \subset g$, on a $H^1(h, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z})) = 0$, soit encore $\mathrm{Ext}^1_h(\mathrm{Pic}(\overline{X}_c), \mathbb{Z}) = 0$.*

(ii) *Pour $h \subset g$ sous-groupe fermé procyclique, on a $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)) = 0$.*

*Supposons de plus $G$ quasitrivial, i.e. extension d'un $k$-tore quasitrivial par un $k$-groupe simplement connexe.*

(iii) *Soit $T$ le $k$-tore associé au $G$-espace homogène $X$. Soit*

$$1 \to T \to F \to P \to 1$$

*une suite exacte de $k$-tores, avec $F$ flasque et $P$ quasitrivial. Les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ et $\hat{F}$ sont égaux à addition près de modules de permutation.*

(iv) *Le quotient de $\mathrm{Br}_1(X_c)$ par l'image du groupe $\mathrm{Br}(k)$ s'injecte dans le groupe $Ш^1_\omega(k, \hat{T})$, et est isomorphe à ce dernier groupe si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $k$ est un corps de nombres.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 1.5, pour établir ce théorème, on peut supposer d'emblée le groupe $G$ quasitrivial.

D'après la Proposition 1.3 et les remarques subséquentes, le changement de base de $k$ au corps des fonctions de $X$ permet de se ramener au cas où $X(k) \neq \emptyset$, i.e. $X = G/H$ avec $H$ un $k$-sous-groupe fermé connexe de $G$. Soit $T = H^{\mathrm{tor}}$ ; notons $H_1$ le noyau de $H \to T$. C'est un $k$-groupe connexe extension d'un $k$-groupe semi-simple par un $k$-groupe unipotent. Rappelons une construction géométrique utilisée par Borovoi (§4.2 de [Bo2]). Soit

$$1 \to T \to P \to Q \to 1$$

une suite exacte de $k$-tores, avec $P$ quasitrivial. Soit $Q_c$ une $k$-compactification lisse du $k$-tore $Q$. Le groupe $H$ agit sur $P$ via l'homomorphisme $H \to T$. On définit une action à droite de $H$ sur $G \times P$ par la formule $(g,p) \cdot h = (gh, h^{-1}p)$. Soit $Z = (G \times P)/H$ le quotient de $G \times P$ par cette action.

D'un côté $Z$ est un torseur sur $X$ sous le $k$-tore quasitrivial $P$, via l'action à droite de $P$ sur le second facteur de $G \times P$. D'un autre côté $Z$ est un $G$-espace homogène à gauche sur $Q$, via l'action à gauche de $G$ sur le premier facteur de $G \times P$ ; un calcul simple montre que les stabilisateurs géométriques pour cette action sont isomorphes au groupe connexe $\overline{H}_1$, qui vérifie $\overline{H}_1^{\mathrm{tor}} = 1$.

Le théorème d'Hironaka assure l'existence d'une $k$-compactification lisse $Z_c$ de $Z$, d'un $k$-morphisme projectif $f \colon Z_c \to Q_c$ étendant $Z \to Q = P/T$ et d'un $k$-morphisme projectif $Z_c \to X_c$ étendant $Z \to X$. Comme $Z$ est un torseur sur $X = G/H$ sous le $k$-tore quasitrivial $P$, le Théorème 90 sous la forme de Grothendieck implique que $Z$ est $k$-birationnel au produit $X \times_k P$ de $X$ et de la $k$-variété $k$-rationnelle $P$. Les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ sont donc égaux à addition près de modules de permutation, $\mathrm{Br}(X_c) = \mathrm{Br}(Z_c)$ et $\mathrm{Br}_1(X_c) = \mathrm{Br}_1(Z_c)$. Il suffit donc d'établir le théorème en y remplaçant $X_c$ par $Z_c$. Il existe un ouvert $U$ de $Q_c$, de complémentaire dans $Q_c$ un fermé $R$ de codimension au moins 2, tel que toutes les fibres de $f\colon V = f^{-1}(U) \to U$ soient équidimensionnelles de dimension $\dim(Z) - \dim(Q)$. Soit $F_0 = f^{-1}(R) \subset Z_c$ le fermé complémentaire de $V$.

Il y a un nombre fini de points $m$ de codimension 1 de $Q_c$, dont la fibre $f^{-1}(m)$ n'est pas géométriquement intègre sur le corps résiduel $k(m)$. *D'après le Théorème 4.2, on peut en chaque tel point m fixer une composante de multiplicité 1 géométriquement intègre de la fibre* $f^{-1}(m)$. Soit $F_m \subset Z_c$ le fermé qui est la réunion des adhérences *des autres composantes* de $f^{-1}(m)$, et soit $F_1 = \bigcup_m F_m$. C'est un fermé propre de $Z_c$. Les points génériques des composantes de $F_1$, qui sont de codimension 1 sur $Z_c$, n'appartiennent pas à $F_0$. Soit $F = F_0 \cup F_1 \subset Z_c$.

Soient $K = k(Q)$ le corps des fonctions de $Q$ et $L = \overline{k}(Q) = \overline{k}.K$ le corps des fonctions de $\overline{Q}$. Soient $\eta = \mathrm{Spec}(K)$ et $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(L)$. Notons $Z_{c,\overline{\eta}}$ la fibre $Z_c \times_{Q_c} \mathrm{Spec}(L)$ de $\overline{f}$ au-dessus du point générique de $\overline{Q}_c$. Soit $M$ le $g$-module de permutation sur les points de codimension 1 de $\overline{Z}_c$ appartenant à $\overline{F}$. La restriction de $\overline{Z}_c$ à $Z_{c,\overline{\eta}}$ donne naissance à un complexe de $g$-modules :

$$0 \to M \oplus \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \to \mathrm{Pic}(Z_{c,\overline{\eta}}) \to 0, \tag{5.1}$$

où la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est donnée par $f^*$.

**Lemme 5.1.1.** *Ce complexe est une suite exacte.*

*Démonstration.* La surjectivité de $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c) \to \mathrm{Pic}(Z_{c,\overline{\eta}})$ résulte de la lissité de $\overline{Z}_c$. Montrons l'exactitude au terme médian. Soit $\Delta$ un diviseur de $\overline{Z}_c$ d'image nulle dans $\mathrm{Pic}(Z_{c,\overline{\eta}})$. Le diviseur $\Delta$ est rationnellement équivalent sur $\overline{Z}_c$ à un diviseur dont la restriction à $Z_{c,\overline{\eta}}$ est nulle. Pour établir l'exactitude, on peut donc supposer que la restriction de $\Delta$ à $Z_{c,\overline{\eta}}$ est nulle, c'est-à-dire que $\Delta$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de diviseurs irréductibles (réduits) $\delta$ sur $\overline{Z}_c$ tels que $f(\delta)$ soit de codimension au moins 1 dans $\overline{Q}_c$. Si l'image $f(\delta)$ est de codimension au moins 2, alors $\delta$ est l'une des composantes de $F_0$. Supposons $f(\delta) = \gamma$ de codimension 1. Si l'image réciproque de $\gamma$ par $f$ est un diviseur irréductible de $\overline{Z}_c$ de multiplicité 1, alors $\delta = f^*(\gamma)$ et la classe de $\delta$ appartient à $f^*(\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c))$. Si l'image réciproque de $\gamma$ par $f$ n'est pas intègre, soit $\delta$ est une composante de $\overline{F}_1$, soit la multiplicité de $\delta$ dans $f^*(\gamma)$ est 1, et l'on a $f^*(\gamma) = \delta + \delta_1$, avec $\delta_1$ somme de composantes de $\overline{F}_1$. Dans tous les cas, la classe de $\delta$ dans $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ appartient à l'image de

$M \oplus \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$. Montrons l'exactitude à gauche. Soit $\Delta_0$ un diviseur de $\overline{Z}_c$ à support dans $\overline{F}_0$. Soit $\Delta_1$ un diviseur de $\overline{Z}_c$ à support dans $\overline{F}_1$. Soit $\gamma$ un diviseur (non nécessairement irréductible) de $\overline{Q}_c$. Supposons qu'il existe une fonction rationnelle $h \in \overline{k}(Z_c)^\times$ telle que

$$\Delta_0 + \Delta_1 + f^*(\gamma) = \mathrm{div}_{\overline{Z}_c}(h) \in \mathrm{Div}(\overline{Z}_c).$$

Comme la fibre générique de $f$ est projective, lisse, et géométriquement intègre, cette égalité implique que la fonction $h$ est l'image réciproque par $f^*$ d'une fonction que nous noterons encore $h \in \overline{k}(Q_c)^\times$. On a alors $\Delta_0 + \Delta_1 = f^*(\mathrm{div}_{\overline{Q}_c}(h) - \gamma) \in \mathrm{Div}(\overline{Z}_c)$. La restriction de cette égalité à $\overline{V}$ se lit $\Delta_1 = f^*(\mathrm{div}_{\overline{U}}(h) - \gamma) \in \mathrm{Div}(\overline{V})$. D'après la définition de $F_1$, cette égalité implique $\Delta_1 = 0 \in \mathrm{Div}(\overline{Z}_c)$ et $\mathrm{div}_{\overline{U}}(h) - \gamma = 0 \in \mathrm{Div}(\overline{U})$. Puisque le complémentaire de $U$ dans la variété lisse $Q_c$ est de codimension au moins 2, la dernière égalité implique $\mathrm{div}_{\overline{Q}_c}(h) - \gamma = 0 \in \mathrm{Div}(\overline{Q}_c)$. On en déduit $\Delta_0 = 0 \in \mathrm{Div}(\overline{Z}_c)$, ce qui achève d'établir l'exactitude de la suite (5.1). □

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$. D'après la Proposition 3.1, la flèche naturelle $\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(Z_{c,\overline{\eta}})$ est injective. La Proposition 1.1 assure alors que le $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}(Z_{c,\overline{\eta}})$ est le module obtenu en prenant les points fixes de $\mathrm{Pic}(Z_c \times_{Q_c} \mathrm{Spec}(\overline{K}))$ sous $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$. D'après la Proposition 3.1, le $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}(Z_c \times_{Q_c} \mathrm{Spec}(\overline{K}))$ est stablement de permutation, il en est donc de même du $g$-module $\mathrm{Pic}(Z_{c,\overline{\eta}})$.

D'après la Proposition 3.1, la flèche $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(Z_{c,\eta})$ est injective. Il en est donc de même de la flèche $f^*\colon \mathrm{Br}(Q_c) \to \mathrm{Br}(Z_c)$ (ce qui implique en particulier que la flèche naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Z_c)$ est une injection) puis de la flèche $\mathrm{Br}(Q_c)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Z_c)/\mathrm{Br}(k)$, et donc (d'après la Proposition 1.1) de $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c))$. Le même argument vaut en remplaçant $g$ par tout sous-groupe fermé $h \subset g$. Ainsi pour tout tel sous-groupe $h$, la suite exacte (5.1) induit une injection $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)) \to H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c))$.

**Lemme 5.1.2.** *Soient $g$ un groupe profini et $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de $g$-modules continus de type fini comme groupes abéliens. Supposons que $C$ est un $g$-module stablement de permutation et que pour tout sous-groupe fermé $h \subset g$, l'application induite $H^1(h, A) \to H^1(h, B)$ est injective (et donc un isomorphisme). Alors la suite est scindée.*

*Démonstration.* La suite exacte donnée induit une suite exacte longue

$$\mathrm{Hom}_g(C, B) \to \mathrm{Hom}_g(C, C) \to \mathrm{Ext}^1_g(C, A) \to \mathrm{Ext}^1_g(C, B).$$

Pour $h$ sous-groupe fermé d'indice fini de $g$ et $M$ un $g$-module continu, on a un isomorphisme naturel (Shapiro) $\mathrm{Ext}^1_g(\mathbb{Z}[g/h], M) \simeq H^1(h, M)$. L'hypothèse assure donc que la flèche $\mathrm{Ext}^1_g(C, A) \to \mathrm{Ext}^1_g(C, B)$ est injective, l'application identité dans $\mathrm{Hom}_g(C,C)$ se relève en un élément de $\mathrm{Hom}_g(C,B)$, la suite est scindée. □

On voit alors que la suite exacte de $g$-modules (5.1) est scindée, ce qui montre que les $g$-modules $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ sont égaux à addition près de $g$-modules de permutation. Il en est donc aussi de même des $g$-modules $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$.

D'après Voskresenskiĭ (voir la Proposition 2.1), $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$ est un $g$-module flasque. Le $g$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$ est donc flasque. De plus sa classe à addition près d'un module de permutation est donnée par la Proposition 2.1. Ceci établit les points (i) à (iii). Le point (iv) résulte alors de la Proposition 1.1. □

## 6. *R*-équivalence

Dans ce paragraphe, nous utiliserons une propriété fonctorielle simple des torseurs universels ([CT/San2]). Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de $k$-variétés lisses, projectives, géométriquement intègres. Soient $M \in X(k)$ et $N = f(M) \in Y(k)$. Supposons que les modules galoisiens $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Y})$ sont libres, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soient $S_X$ et $S_Y$ les $k$-tores duaux de ces $g$-réseaux. À la flèche $f^*\colon \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ correspond un $k$-homomorphisme de $k$-tores $S_X \to S_Y$. Soit $\mathcal{T}_X$ le torseur universel sur $X$ de fibre triviale en $M$ et soit $\mathcal{T}_Y$ le torseur universel sur $Y$ de fibre triviale en $N$. On a alors un isomorphisme de $S_Y$-torseurs sur $X$ :

$$\mathcal{T}_X \times^{S_X} S_Y \simeq f^*(\mathcal{T}_Y).$$

Ceci résulte immédiatement de la définition des torseurs universels ([CT/San2, p. 408]) et de la fonctorialité de la suite (2.0.2) (ibid.). Ceci implique que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \longrightarrow & H^1(k,S_X) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y(k) & \longrightarrow & H^1(k,S_Y), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par évaluation des torseurs universels $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$ sur les $k$-points. Rappelons par ailleurs que les flèches horizontales passent au quotient par la $R$-équivalence [CT/San2, Prop. 2.7.2, p. 444].

Soient $k$ un corps de caractéristique nulle, $X$ une $k$-variété espace homogène d'un $k$-groupe linéaire connexe, de stabilisateur géométrique connexe, et $e$ un $k$-point de $X$. Soient $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X$ et $F$ le $k$-tore de groupe des caractères $\hat{F} = \mathrm{Pic}(\overline{X}_c)$. Soit $\mathcal{T} \to X_c$ le torseur universel sur $X_c$ de fibre triviale en $e$. C'est un torseur sur $X_c$ sous le $k$-tore $F$. On a une flèche d'évaluation associée $X_c(k) \to H^1(k,F)$, qui induit une flèche $X_c(k)/R \to H^1(k,F)$.

**Théorème 6.1.** *Avec les notations et hypothèses de l'alinéa précédent, si $k$ est un bon corps de dimension cohomologique $\leq 2$ (cf. 4.1.1), alors la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k,F)$ est surjective.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 1.5, il existe un $k$-groupe quasitrivial $G$ sous lequel $X$ est un espace homogène, tel que le stabilisateur de $e$ est un $k$-groupe linéaire connexe. La construction géométrique utilisée au §5, dont on garde les notations, permet de ramener la proposition pour $X$ à la proposition pour $Z$. On dispose alors de $f\colon Z_c \to Q_c$ étendant le $G$-espace homogène $f\colon Z \to Q$ dont tout stabilisateur géométrique est isomorphe à un groupe connexe $\overline{H}$ satisfaisant $\overline{H}^{\mathrm{tor}} = 1$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z_c(k)/R & \longrightarrow & H^1(k,F_{Z_c}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ Q_c(k)/R & \longrightarrow & H^1(k,F_{Q_c}), \end{array}$$

où $F_{Z_c}$, resp. $F_{Q_c}$, est le $k$-tore dual de $\mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$, resp. $\mathrm{Pic}(\overline{Q}_c)$, et où les flèches horizontales sont données par les torseurs universels triviaux aux points marqués évidents de $Z_c$ et $Q_c$. Sous les hypothèses du théorème, nous voulons montrer que la flèche $Z_c(k)/R \to H^1(k,F_{Z_c})$ est surjective. Par la théorie des $k$-tores (Prop. 2.1(iii)) on sait que la flèche $Q_c(k)/R \to H^1(k,F_{Q_c})$ est un isomorphisme et que la flèche $Q(k) \to Q_c(k)/R$ est surjective. On a vu dans la démonstration du Théorème 5.1 que $f^*\colon \mathrm{Pic}(\overline{Q}_c) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}_c)$ est une injection scindée de $g$-modules, dont le conoyau est un $g$-module stablement de permutation. Le Théorème 90 de Hilbert implique alors que la flèche $H^1(k,F_{Z_c}) \to H^1(k,F_{Q_c})$ est une bijection. Pour $k$ un *bon corps de dimension cohomologique* $\leq 2$, la Remarque 4.1.1 assure que la flèche $Z(k) \to Q(k)$ est surjective. Ainsi pour tout tel corps la flèche $Z_c(k)/R \to Q_c(k)/R \simeq H^1(k,F_{Q_c})$ est surjective. Ceci achève la démonstration. □

**Question 6.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.1, la flèche $X_c(k)/R \to H^1(k,F)$ est-elle une bijection ?*

Le Théorème 3.4 de [CT/Gi/Pa] montre que ce résultat impliquerait la finitude de $X_c(k)/R$ dans chacun des cas cités à la Remarque 4.1.1. La finitude dans le cas $p$-adique est facile à établir, mais dans ce cas on aurait plus, on aurait la valeur exacte de $X_c(k)/R$.

La Question 6.2 a une réponse affirmative lorsque le sous-groupe fermé connexe $H$ est distingué dans $G$ (Gille, [G] et appendice de [B/K2] ; Thm. 6.2 de [CT]).

Le premier cas à étudier est celui où $k$ est un corps $p$-adique et $H$ un groupe semi-simple. Dans ce cas, au vu de la Proposition 3.1, la question est :

*Soient $k$ un corpsp-adique, $G$ un $k$-groupe semi-simple simplement connexe, $H \subset G$ un $k$-sous-groupe fermé connexe, semi-simple. Soit $X_c$ une $k$-compactification lisse de $X = G/H$. La $R$-équivalence sur $X_c(k)$ est-elle triviale ?*

D'après un résultat général de Kollár [K], la question équivaut à celle de la trivialité de la $R$-équivalence sur l'ouvert $G/H = X \subset X_c$.

## Bibliographie


[Bog] F. A. Bogomolov, *Groupe de Brauer des corps d'invariants de groupes algébriques* (en russe), Mat. Sb. **180** (1989), 279–293 ; trad. ang. Math. USSR-Sb. **66** (1990), 285–299. MR0993459 (90k:14008)

[Bo1] M. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), 217–239. MR1242885 (94j:11042)

[Bo2] M. Borovoi, *The Brauer–Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. (Crelle) **473** (1996), 181–194. MR1390687 (97g:11042)

[B/K1] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, *Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group*, J. Algebra **225** (2000), 804–821. MR1741563 (2001h:14017)

[B/K2] M. Borovoi et B. Kunyavskiĭ, *Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields* (with an appendix by P. Gille), J. Algebra **276** (2004), 292–339. MR2054399 (2005c:11047)

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes réductifs connexes*, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I **339** (2004), 331–334. MR2092058 (2005f:20081)

[CT/Gi/Pa] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields*, Duke Math. J. **121** (2004), 285–341. MR2034644 (2005f:11063)

[CT/K] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kunyavskiĭ, *Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes des groupes linéaires*, J. Ramanujan Math. Soc. **13** (1998), 37–49. MR1626696 (2000c:14021)

[CT/San1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. E.N.S. **10** (1977), 175–229. MR0450280 (56:8576)

[CT/San2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, II, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492. MR0899402 (89f:11082)

[CT/San3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205. MR878473 (88j:14059)

[CT/San4] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, in Proceedings of the Mumbai 2004 International Conference, à paraître.

[D] A. Ducros, *Dimension cohomologique et points rationnels sur les courbes*, J. Algebra **203** (1998), 349–354. MR1622783 (99e:14024)

[G] P. Gille, *Cohomologie galoisienne des groupes quasidéployés sur des corps de dimension* $\leq 2$, Compositio Math. **125** (2001), 283–325. MR1818983 (2002c:11045)

[Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, I, II, III, in Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188. MR0244269 (39:5586a); MR0244270 (39:5586b); MR0244271 (39:5586c)

[K] J. Kollár, *Specialization of zero cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), 689–708. MR2074697 (2005i:14007)

[San] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. (Crelle) **327** (1981), 12–80. MR0631309 (83d:12010)

[S] J-P. Serre, *Corps locaux*, deuxième édition, Hermann, Paris, 1968. MR0354618 (50:7096)

[Vos1] V. E. Voskresenskiĭ, *Invariants birationnels des tores algébriques* (en russe), Uspehi Mat. Nauk **30** (1975), no. 2 (182), 207–208. MR0506279 (58:22078)

[Vos2] V. E. Voskresenskiĭ, Алгебраические торы (*Tores algébriques*), Nauka, Moscow, 1977. MR0485902 (58:5701)

[Vos3] V. E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Transl. Math. Monographs **179**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998. MR1634406 (99g:20090)

C.N.R.S., UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

*E-mail address*: colliot@math.u-psud.fr

Bar-Ilan University, Department of Mathematics, 52900 Ramat Gan, Israel

*E-mail address*: kunyav@macs.biu.ac.il