UNE LISTE DE PROBLÈMES

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Introduction

Dans cette note, je rassemble une liste de problèmes, la plupart bien connus, et restés ouverts depuis de nombreuses années. J'ai réfléchi à la plupart d'entre eux mais n'en revendique pas la propriété. Je mentionne certaines solutions partielles, sans faire un rapport systématique. Je renvoie à [CT87, CT98, Sk01, CT03, CT11, SD11, CT19, W18] pour cela.

Les problèmes portent presque tous sur la généralisation en dimension plus grande que 1 des deux énoncés suivants :

Une conique lisse sur un corps k qui possède un point rationnel sur k est isomorphe, sur k, à la droite projective $\mathbb{P}^1_k$. Ceci donne une paramétrisation biunivoque des points rationnels de la conique par les points rationnels de la droite projective.

Sur un corps de nombres k, si une conique lisse a un point rationnel sur tous les complétés k_v de k, alors elle a un point rationnel sur k. Grâce à Hensel, ce critère est effectif.

Le premier énoncé remonte à l'Antiquité, le second fut établi par Legendre sur les rationnels et par Hilbert sur les corps de nombres, et fut étendu par Minkowski et par Hasse aux quadriques de dimension quelconque.

Beaucoup des problèmes mentionnés ici ont leur source dans mes travaux avec Jean-Jacques Sansuc et avec Peter Swinnerton-Dyer dans les années 1970 et 1980. Certains des problèmes, en particulier ceux sur les intersections de deux quadriques, avaient fait l'objet de rapports non publiés en 1988 et en 2005.

1. Variétés rationnelles et variétés proches

Soit k un corps algébriquement clos. On dit qu'une variété intègre X sur k est *rationnelle* si elle est birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^d_k$, i.e. si son corps des fonctions $k(X)$ est transcendant pur sur k.

Parmi les exemples classiques de variétés rationnelles, on trouve les variétés sous-jacentes à un groupe algébrique linéaire connexe, et les variétés projectives qui sont des espaces homogènes de tels groupes. Les quadriques lisses de dimension au moins 1 rentrent dans ce cadre.

On dit qu'une variété intègre X sur k est *unirationnelle* s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif vers X.

En dimension 1 et en caractéristique zéro en dimension 2, unirationalité implique rationalité. C'est faux dès la dimension 3 (Clemens–Griffiths, Iskovskikh–Manin, Artin–Mumford).

Parmi les exemples classiques de variétés unirationnelles, on trouve les quotients G/H d'un groupe linéaire connexe G par un sous-groupe fermé H quelconque, non

Date: 12 avril 2022.

nécessairement connexe. Pour H fini, on connaît des exemples de tels quotients qui ne sont pas rationnels (Saltman, Bogomolov).

Dans la classification birationnelle des variétés de dimension supérieure développée vers 1990 (travaux de Kollár, Miyaoka, Mori), ce qui en dimension quelconque joue le rôle des surfaces rationnelles dans la classification des surfaces, ce sont les variétés rationnellement connexes [K99, AK03]. L'une des définitions, en caractéristique zéro, est que par deux points (fermés) généraux d'une telle variété il passe une courbe de genre zéro. En caractéristique quelconque, la bonne définition est celle de variété séparablement rationnellement connexe. Les deux notions coïncident en caractéristique nulle. Dans la suite de ce texte, par variété rationnellement connexe on entendra variété séparablement rationnellement connexe.

Supposons k de caractéristique zéro. Une variété unirationnelle est rationnellement connexe. La réciproque est un grand problème ouvert. Une variété lisse, projective, lisse, connexe, à fibré anticanonique ample est appelée variété de Fano. Un théorème important (Campana, Kollár–Miyaoka–Mori) dit qu'une variété de Fano est rationnellement connexe. Ainsi toute hypersurface lisse $X \subset \mathbb{P}^n_k$, $n \geqslant 2$, de degré d avec $d \leqslant n$ est rationnellement connexe. Il en est donc ainsi des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^n_k, n \geqslant 3$. Il en est aussi ainsi des intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$, $n \geqslant 4$. Ces dernières sont des variétés rationnelles sur le corps algébriquement clos k.

Un autre théorème important (Graber–Harris–Starr, 2003) dit que l'espace total d'une fibration de base rationnellement connexe et de fibres générales rationnellement connexes est rationnellement connexe.

Soient maintenant k un corps quelconque et $\overline{k}$ une clôture algébrique. Nous adoptons ici les conventions suivantes.

On dit qu'une k-variété géométriquement intègre X est rationnelle, resp. rationnellement connexe, si la $\overline{k}$-variété $\overline{X} := X \times_k \overline{k}$ est rationnelle, resp. rationnellement connexe.

On dit qu'une k-variété géométriquement intègre X est k-rationnelle si X est k-birationnelle à $\mathbb{P}^d_k$, i.e. le corps des fonctions $k(X)$ de X est transcendant pur.

On dit qu'une k-variété géométriquement intègre X est stablement k-rationnelle s'il existe des entiers $n \geqslant 0$ et $m \geqslant 0$ tels que $X \times_k \mathbb{P}^n_k$ est k-birationnelle à $\mathbb{P}^m_k$.

On dit qu'une k-variété géométriquement intègre X de dimension d est k-unirationnelle s'il existe une application k-rationnelle dominante d'un espace projectif $\mathbb{P}^d_k$ vers X.

2. Principe de Hasse, approximation faible, obstruction de Brauer–Manin

Etant donnée une variété algébrique X sur un corps k, on note $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels. Pour K/k une extension quelconque de corps, on note $X(K)$ l'ensemble des points rationnels sur K.

On veut donner des critères si possible effectifs permettant de décider si une k-variété donnée X possède un point rationnel.

Pour éviter des répétitions, on va définir un certain nombre de propriétés.

($\mathbf{PR}_X$) L'ensemble $X(k)$ est non vide, i.e. la k-variété possède un point rationnel sur k.

On s'intéresse particulièrement au cas des corps finis, des corps locaux (les corps p-adiques, les corps de séries formelles en une variable sur un corps fini, le corps $\mathbb{R}$ des réels, le corps $\mathbb{C}$ des complexes), et des corps globaux (corps de nombres ou corps de fonctions d'une variable sur un corps fini). Etant donné un corps global k, et une place v de ce corps, on note k_v le corps local complété par rapport à la place v.

Soit désormais k un corps global.

À toute variété algébrique X sur k on associe l'espace $X(\mathbb{A}_k)$ de ses adèles. C'est un sous-ensemble du produit $\prod_v X(k_v)$, non vide si ce produit est non vide. L'espace $X(\mathbb{A}_k)$ est muni d'une topologie naturelle. Si X est projective, alors on a $X(\mathbb{A}_k) = \prod_v X(k_v)$, et la topologie de l'espace des adèles coïncide avec la topologie produit sur $\prod_v X(k_v)$.

On introduit la propriété :

($\mathbf{PH}_X$) Soit on a $X(\mathbb{A}_k) = \varnothing$, soit on a $X(k) \neq \varnothing$.

On dit que le principe de Hasse vaut pour une classe de variétés algébriques définies sur k si, pour toute variété X dans cette classe, on a la propriété $\mathbf{PH}_X$.

Pour X/k lisse et géométriquement intègre, on introduit la propriété d'approximation faible :

($\mathbf{AF}_X$) L'image de l'application diagonale $X(k) \to \prod_v X(k_v)$ est dense.

Cette propriété implique $\mathbf{PH}_X$. Si $X(k)$ est non vide, elle équivaut au fait que pour tout ensemble fini S de places de k, l'ensemble $X(k)$ est dense dans le produit fini $\prod_{v\in S} X(k_v)$. Il convient de noter que pour certaines classes de variétés, on ne sait pas établir $\mathbf{PH}_X$ pour X dans cette classe, mais que, sous l'hypothèse $X(k) \neq \varnothing$, la propriété $\mathbf{AF}_X$ est facile à établir.

Pour X/k non nécessairement projective, on peut encore considérer une variante de la propriété $\mathbf{AF}_X$. Il s'agit du problème de l'approximation forte. Depuis 2008, il a été étudié du point de vue de l'obstruction de Brauer–Manin, dans plusieurs articles par Fei Xu et moi, Harari, Borovoi, Demarche, Dasheng Wei, Yang Cao, mais nous ne le discuterons pas dans ce texte. Je renvoie à [BD13] et au rapport de Wittenberg [W18, §2.7, §3.2.4, §3.3.4, §3.4.5] pour des résultats et références.

Pour X/k lisse et géométriquement intègre, avec $X(k) \neq \varnothing$, il y a lieu d'introduire la propriété d'approximation "faible faible" [Se92, Chap. 3]) :

($\mathbf{AFF}_X$) Il existe un ensemble fini $T = T(X)$ de places de k tel que, pour tout ensemble fini S de places ne rencontrant pas T, l'image de l'application diagonale $X(k) \to \prod_{v\in S} X(k_v)$ est dense.

À tout corps k, à toute variété X sur un corps k, et plus généralement à tout schéma X, on associe son groupe de Brauer–Grothendieck $\mathrm{Br}(X)$ [CTSk21].

Pour k un corps global, la théorie du corps de classes donne des plongements $j_v : \mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et une suite exacte fondamentale

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \oplus_v \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

qui généralise la loi de réciprocité quadratique de Gauß.

Etant donnée une variété X sur un corps global k, en utilisant la fonctorialité du groupe de Brauer, les applications $j_v : \mathrm{Br}(k_v) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induisent un accouplement

$$X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

envoyant un couple $(\{M_v\}, \alpha)$ sur $\sum_v j_v(\alpha(M_v))$. On note $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)$ le noyau à gauche de cet accouplement. Comme remarqué par Manin en 1970, l'application diagonale $X(k) \to X(\mathbb{A}_k)$ induit une inclusion

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}.$$

Considérons la propriété :

(**BMPH**$_X$) Soit on a $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$, soit on a $X(k) \neq \varnothing$.

On dit que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour une classe de variétés algébriques définies sur k si, pour toute variété X dans cette classe, on a la propriété **BMPH**$_X$.

Pour X/k projective, on dit que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X si l'on a :

(**BMAF**$_X$) L'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

Cette propriété implique **BMPH**$_X$. Il y a une variante où, pour $k_v = \mathbb{R}$ et $k_v = \mathbb{C}$, on remplace $X(k_v)$ par l'ensemble de ses composantes connexes.

Pour les variétés projectives, lisses, géométriquement intègres qui sont rationnellement connexes, en particulier celles qui sont géométriquement unirationnelles, la propriété **BMAF**$_X$ implique la propriété d'approximation faible faible **AFF**$_X$. Ceci résulte du fait que dans ce cas le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini.

Pour les k-variétés projectives et lisses géométriquement intègres, chacune des propriétés définies ci-dessus ne dépend que du corps des fonctions de X : si X et Y sont deux telles k-variétés birationnellement équivalentes, l'une des propriétés vaut pour X si et seulement si elle vaut pour Y.

Si X et Y sont deux k-variétés, et $Z = X \times_k Y$, on a $Z(k) = X(k) \times Y(k)$.
Si $f : X \to Y$ est un k-morphisme, il induit une application $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \to Y(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.
Si X, Y sont deux variétés projectives et lisses géométriquement intègres sur un corps de nombres k, et $Z = X \times_k Y$, c'est un résultat de Skorobogatov et Zarhin que l'on a

$$Z(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \times Y(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}.$$

3. Points rationnels des variétés rationnellement connexes sur un corps global

La conjecture suivante fut faite par Sansuc et moi en 1979 pour les surfaces géométriquement rationnelles [CTSa80], et étendue aux variétés rationnellement connexes en toute dimension en 1999 (voir [CT03]).

Conjecture 3.1. *L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les points rationnels est la seule obstruction pour les variétés projectives, lisses, rationnellement connexes sur un corps global.*

Avec les notations ci-dessus, ceci dit que pour toute variété X projective, lisse, rationnellement connexe sur un corps global, on a **BMPH**$_X$ et **BMAF**$_X$.

3.1. **Espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes.** Soit k un corps de nombres.

Pour G un k-groupe semisimple simplement connexe, E un espace principal homogène de G, et X une k-compactification lisse de E, des travaux de Eichler, Kneser, Harder et Tchernousov établirent $\mathbf{PH}_X$. Leurs travaux, et ceux de Platonov, établirent $\mathbf{AF}_X$. Leurs travaux établissent aussi $\mathbf{PH}_X$ et $\mathbf{AF}_X$ pour les variétés projectives X qui sont espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe G.

Pour G un k-groupe algébrique linéaire connexe quelconque, E un espace principal homogène de G, et X une k-compactification lisse de E, on a les propriétés $\mathbf{BMPH}_X$ et $\mathbf{BMAF}_X$ (Voskresenskiĭ pour les tores, Sansuc en général), et donc aussi l'approximation faible faible $\mathbf{AFF}_X$. Ceci vaut aussi si E est un espace homogène de G linéaire connexe lorsque les stabilisateurs géométriques sont connexes (Borovoi).

Par contre, la question suivante est en général ouverte.

Problème 3.2. *Soit G un k-groupe linéaire connexe, $H \subset G$ un k-sous-groupe fini. Soit X une k-compactification lisse du quotient G/H. A-t-on la propriété $\mathbf{BMAF}_X$, ou du moins la propriété $\mathbf{AFF}_X$?*

Comme remarqué par T. Ekedahl et moi en 1988 (voir [Se92, Chap. 3]), une réponse positive pour $\mathbf{AFF}_X$, appliquée à un groupe fini abstrait H plongé dans $GL_{n,k}$ pour n entier convenable, implique que le groupe fini H est le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de corps K/k, propriété qu'on ne sait pas établir pour tous les groupes finis.

Un progrès récent dans cette direction a été accompli par Harpaz et Wittenberg [HW20] pour une classe de groupes finis H comprenant les groupes nilpotents (constants), ce qui leur permet, pour ces groupes, de retrouver et préciser, du point de vue du comportement local, le théorème de Shafarevich que les groupes finis résolubles sont des groupes de Galois sur tout corps de nombres (on trouve la démonstration de ce théorème de Shafarevich dans des ouvrages de Ishkhanov, Lur'e, Faddeev et de Neukirch, Schmidt, Wingberg).

3.2. **Surfaces de del Pezzo et variétés de Fano.** Les surfaces de del Pezzo sont les variétés de Fano de dimension 2.

Problème 3.3. *Soit k un corps global. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse définie par l'annulation simultanée de formes homogènes $(f_1, \dots, f_r)$ de degrés respectifs $(d_1, \dots, d_r)$. Si X est dimension au moins 3 et l'on a $d_1 + \cdots + d_r \leqslant n$, a-t-on $\mathbf{PH}_X$? A-t-on $\mathbf{AF}_X$?*

Soit k un corps de nombres. La méthode du cercle permet d'établir de tels énoncés pour n grand par rapport à la somme des d_i (Birch 1961, Schmidt 1985, Skinner 1997).

C'est une expérience commune que pour les variétés de Fano il est difficile d'exhiber des contre-exemples au principe de Hasse. On consultera [B18] pour un rapport sur cette direction de recherche très active. Sur $k = \mathbb{Q}$, Browning, Le Boudec et Sawin [BLBS20] ont récemment montré que, si l'on ordonne (toutes) les hypersurfaces lisses $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ avec $d \leqslant n$ et $n \geqslant 4$ par la hauteur des coefficients, alors 100 % d'entre elles satisfont le principe de Hasse, et une proportion positive a des points rationnels. Pour d'autres résultats “statistiques”, on consultera [BBL16, LS16, L18, Bri18, SkSo20].

Considérons maintenant des cas particuliers du problème 3.3.

Problème 3.4. *Soit $n \geqslant 4$ et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une hypersurface cubique lisse sur un corps de nombres. A-t-on* $\mathbf{PH}_X$ *? A-t-on* $\mathbf{AF}_X$ *?*

Si X contient une droite rationnelle $\mathbb{P}^1_k \subset \mathbb{P}^n_k$, alors on a $\mathbf{AF}_X$ [Har94].

Pour $k = \mathbb{Q}$, et $n \geqslant 9$, Heath-Brown utilisa la méthode du cercle pour établir $X(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ pour toute hypersurface cubique lisse, et C. Hooley établit le principe de Hasse dans le cas $n = 8$.

Sur un corps global k de caractéristique $p > 5$, pour $n \geqslant 5$, Zhiyu Tian [T17] a établi $\mathbf{PH}_X$.

Pour $X \subset \mathbb{P}^n_k$ intersection complète lisse sur un corps de caractéristique zéro, on a $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = 0$ si X est de dimension au moins 3. Dans ce cas, sur un corps de nombres, on a donc $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = X(\mathbb{A}_k)$. En dimension 2, par exemple pour les surfaces cubiques et les intersections de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4_k$, ce n'est plus nécessairement le cas, il faut tenir compte de l'obstruction de Brauer–Manin.

Problème 3.5. *Soit $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur un corps de nombres. A-t-on* $\mathbf{BMPH}_X$ *? A-t-on* $\mathbf{BMAF}_X$ *?*

Le cas des surfaces diagonales $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$, d'équation $ax^3+by^3+cz^3+dt^3 = 0$, avec a, b, c, d entiers non nuls, sans facteur cubique, et premiers entre eux dans leur ensemble, a été testé. On sait (Cassels-Guy 1966) que $\mathbf{PH}_X$ ne vaut pas toujours pour ces surfaces, mais dans [CTKaS87] on montra que $\mathbf{BMPH}_X$ vaut lorsque les coefficients sont de valeur absolue plus petite que 100. On a un résultat conditionnel, dû à Swinnerton-Dyer [SD01]. On suppose la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques sur les corps de nombres. S'il existe un nombre premier $p \neq 3$ qui divise a mais pas bcd, et un nombre premier $q \neq 3$ qui divise b mais pas acd, alors le principe de Hasse vaut pour X, et ce résultat conditionnel implique $\mathbf{PH}_X$ pour toute hypersurface cubique diagonale $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ pour $n \geqslant 4$.

Problème 3.6. *Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques sur un corps de nombres k. A-t-on* $\mathbf{BMPH}_X$ *?*

On sait que cela vaut si X contient une conique [Sal88, CT90].

Par ailleurs, sous l'hypothèse $X(k) \neq \varnothing$, on a $\mathbf{BMAF}_X$ [SaSk91].

Problème 3.7. *Soit $n \geqslant 5$. Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques sur un corps de nombres k. A-t-on* $\mathbf{PH}_X$ *?*

Il est facile de montrer que sous l'hypothèse $X(k) \neq \varnothing$, on a $\mathbf{AF}_X$ [CTSaSD87].

On sait que $\mathbf{PH}_X$ vaut si X contient un ensemble de deux droites conjuguées [CTSaSD87] ou si X contient une conique (Salberger, 1993, non publié).

On sait que $\mathbf{PH}_X$ vaut pour $n \geqslant 8$ [CTSaSD87] et $n = 7$ [HB18].

Sur un corps global de caractéristique $p > 2$, $\mathbf{PH}_X$ été établi pour $n \geqslant 5$ par des méthodes géométriques de déformation par Zhiyu Tian [T17].

Sur tout corps de nombres, Wittenberg [W07] a donné une preuve conditionnelle de $\mathbf{PH}_X$ pour $n \geqslant 5$. Voir la section 3.4 ci-dessous.

3.3. **Espaces totaux de fibrations en variétés rationnellement connexes au-dessus de la droite projective.** C'est une classe naturelle de variétés à considérer si l'on veut établir les résultats par récurrence sur la dimension.

Problème 3.8. *Soit X une variété projective et lisse sur un corps de nombres k, munie d'un morphisme $X \to \mathbb{P}^1_k$ dont la fibre générique est rationnellement connexe, et dont les fibres lisses X_m au-dessus des k-points $m \in \mathbb{P}^1(k)$ satisfont $\mathbf{BMHP}_{X_\mathrm{m}}$, resp. $\mathbf{BMAF}_{X_\mathrm{m}}$. A-t-on $\mathbf{BMHP}_X$, resp. $\mathbf{BMAF}_X$?*

Depuis [CTSaSD87], ce thème a été beaucoup exploré : travaux de Skorobogatov, Harari, Wittenberg, Harpaz, et de nombreux autres auteurs. Je renvoie à [W18] pour des références détaillées.

L'hypothèse sur les fibres est par exemple satisfaite si la fibre générique X_η sur le corps $K = k(\mathbb{P}^1)$ est une compactification lisse d'un espace homogène d'un K-groupe linéaire connexe, à stabilisateurs géométriques connexes (Borovoi).

À une telle fibration on associe une mesure de sa complexité arithmétique : la somme ρ des degrés $[k(m) : k]$ des points fermés $m \in \mathbb{P}^1_k$ dont la fibre $X_m/k(m)$ est non lisse et ne contient pas de composante géométriquement intègre de multiplicité 1.

On a des réponses positives inconditionnelles au problème 3.8 lorsque ρ est (très) petit. Le meilleur résultat général récent est $\rho \leqslant 3$ [HWW21]. Pour ρ quelconque, on a une réponse conditionnelle positive [HW16, HWW21] si l'on accepte une conjecture difficile du type de l'hypothèse de Schinzel. Cette hypothèse, aussi considérée par Bouniakovsky, Dickson, Hardy et Littlewood, Bateman et Horn, affirme que, pour toute famille finie $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ de polynômes irréductibles, à coefficients dominants positifs, tels qu'aucun nombre premier ne divise $\prod_i P_i(m)$ pour tout entier m, il existe une infinité d'entiers n tels que chaque $P_i(n)$ soit un nombre premier. L'idée d'utiliser l'hypothèse de Schinzel dans ce cadre remonte à 1979, et a été poursuivie dans divers articles. Elle vient de connaître un rebondissement statistique “inconditionnel” [SkSo20].

Un cas simple est donné par une famille de coniques, d'équation affine

$$y^2 - a(t)z^2 - b(t) = 0,$$

avec $a(t)$ et $b(t)$ polynômes de degrés quelconques. Les fibres de la projection sur l'axe des t satisfont le principe de Hasse. Ici $\rho \leqslant 5$ convient.

Depuis [CTHaSk03] on a aussi beaucoup étudié les équations du type

$$\mathrm{Norm}_{K/k}(\Xi) = P(t)$$

avec Ξ “variable” dans une extension finie K/k et $P(t) \in k[t]$ polynôme non nul. Pour K/k quelconque, les fibres ne satisfont pas en général le principe de Hasse mais elles satisfont la variante avec obstruction de Brauer-Manin.

Sur $k = \mathbb{Q}$, des progrès fondamentaux en combinatoire additive (Green, Tao, Ziegler ; Mathiesen) ont permis d'obtenir des résultats inconditionnels avec ρ quelconque. Les résultats de Green, Tao, Ziegler donnent une version de l'hypothèse de Schinzel pour une famille finie de formes linéaires à deux variables sur $\mathbb{Q}$. Pour les exemples de variétés ci-dessus, [BMSk14, HW16] montrent ainsi que lorsque $k = \mathbb{Q}$ et que, dans les équations ci-dessus, le polynôme $a(t)b(t)$, resp. le polynôme $P(t)$, a toutes ses racines dans $\mathbb{Q}$, alors on a $\mathbf{BMAF}_X$ (où X désigne un modèle projectif et lisse des variétés considérées).

3.4. **Au-delà des variétés rationnellement connexes.** Soit k un corps de nombres. On ne saurait étendre la conjecture 3.1 à toutes les variétés projectives et lisses sur k, comme ce fut montré inconditionnellement par Skorobogatov en 1999. D'autres contre-exemples géométriquement plus simples ont depuis été donnés. Cependant, pour X espace principal homogène d'une variété abélienne A, si l'on ignore la composante connexe de l'élément neutre aux places archimédiennes, $\mathbf{BMAF}_X$ résulte de la finitude conjecturelle du groupe de Tate-Shafarevich de la variété abélienne A.

Skorobogatov (2001) conjecture $\mathbf{BMAF}_X$ pour toute surface X de type $K3$. Si l'on est prêt à utiliser non seulement la finitude des groupes de Tate-Shafarevich mais aussi l'hypothèse de Schinzel, alors lune méthode sophistiquée initiée par Swinnerton-Dyer en 1993 permet de prédire un énoncé de type $\mathbf{BMHP}_X$ pour certaines surfaces X fibrées en courbes de genre 1 au-dessus de la droite projective. Parmi ces surfaces, on trouve des surfaces birationnelles à des intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$, mais aussi des surfaces $K3$. La méthode fut développée dans [CTSkSD98, W07]. Sous les dites conjectures, Wittenberg [W07] établit ainsi $\mathbf{PH}_X$ pour toute intersection complète lisse $X \subset \mathbb{P}^n_k$ pour $n \geqslant 5$.

La méthode de [SD01], qui n'utilise "que" l'hypothèse de finitude des groupes de Tate-Shafarevich, a été appliquée par Skorobogatov et Swinnerton-Dyer, et aussi par Harpaz et Skorobogatov [HS16], pour étudier le principe de Hasse pour certaines surfaces de Kummer.

4. Zéro-cycles des variétés sur un corps global

Soit X une variété algébrique sur un corps k. L'indice $I(X)$ de la k-variété X est par définition le pgcd des degrés $[k(P):k]$ pour tous les points fermés P. C'est aussi le pgcd des degrés des extensions finies K/k telles que $X(K) \neq \varnothing$. Une question plus faible que l'existence d'un point rationnel sur X est celle si l'indice $I(X) = 1$.

Dans le cas des courbes projectives, lisses, géométriquement intègres de genre 0 ou 1, des quadriques de dimension quelconque, et des intersections de deux quadriques, ces deux questions coïncident, mais ce n'est pas le cas en général.

Le groupe $Z_0(X)$ des zéro-cycles sur X est le groupe abélien libre sur les points fermés de X. À un zéro-cycle $z = \sum_P n_P P$ ($n_P \in \mathbb{Z}$) sur la k-variété X on associe son degré $\deg_k(z) := \sum_P n_P [k(P):k] \in \mathbb{Z}$. L'indice $I(X)$ est donc le générateur positif de l'image de l'application $\deg_k : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$.

Sur un corps de nombres k, il est alors naturel de poser la question du principe de Hasse pour la propriété $I(X) = 1$: étant donnée une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre X, si on a $I(X_{k_v}) = 1$ pour chaque place v, a-t-on alors $I(X) = 1$? La réponse est non en général (courbes de genre 1, intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$).

Pour une k-variété X, on considère l'accouplement bilinéaire

$$Z_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k)$$

$$(\sum_P n_P P, \alpha) \mapsto \sum_P n_P \mathrm{Cores}_{k(P)/k}(\alpha(P)).$$

Ici $\alpha(P) \in \mathrm{Br}(k(P))$ est l'évaluation de α en P, et on applique ensuite la norme, ou corestriction : $\mathrm{Br}(k(P)) \to \mathrm{Br}(k)$.

On peut dans ce cadre définir une obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1. Comme on verra ci-dessous, on peut aussi définir un analogue de l'obstruction à l'approximation faible.

Pour les zéro-cycles, on a deux conjectures qui, à la différence de la conjecture 3.1, portent sur *toutes* les variétés projectives et lisses, sans restriction sur leur géométrie. Ces conjectures furent faites par Sansuc et moi (1981) dans le cadre des surfaces rationnelles, et étendues au cas général sous la forme ci-dessous dans [CT95, CT99]. Une conjecture proche mais d'aspect assez différent avait été formulée par K. Kato et S. Saito (1983). Voir [W12].

Conjecture 4.1. *Soient k un corps global et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre sur k. S'il existe une famille de zéro-cycles de degré 1 $z_v \in Z_0(X_{k_v})$ tels que pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ on ait*

$$\sum_v j_v(z_v, \alpha) = 0 \in \mathbb{Q}/Z,$$

alors il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

Soient X et Y des k-variétés projectives. Soit $\pi : Y \to X$ un k-morphisme. On lui associe un homomorphisme $\pi_* : Z_0(Y) \to Z_0(X)$. On dit qu'un zéro-cycle sur X est rationnellement équivalent à zéro s'il est dans le sous-groupe de $Z_0(X)$ engendré par les $\pi_*(\mathrm{div}_Y(g))$ pour Y variant parmi les courbes normales projectives, la fonction $g \in k(Y)^\times$ variant parmi les fonctions rationnelles non nulles sur une telle courbe Y, et $\pi : Y \to X$ les k-morphismes. Le groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles de degré zéro sur X est le quotient de $Z_0(X)$ par le sous-groupe des zéro-cycles rationnellement équivalents à zéro. Il est muni d'une flèche degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$, dont le noyau est noté $A_0(X)$. L'accouplement $Z_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k)$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle et induit un accouplement bilinéaire $CH_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k)$.

La conjecture suivante englobe la conjecture 4.1.

Conjecture 4.2. *Soient k un corps global et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre sur k. Le complexe*

$$\operatorname{proj\,lim}_n CH_0(X)/n \to \prod_v \operatorname{proj\,lim}_n CH_0(X_{k_v})^*/n \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

induit par la somme des accouplements du groupe de Brauer de X avec les groupes $CH_0(X_{k_v})$, à valeurs dans $\mathrm{Br}(k_v) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est une suite exacte.

On note $CH_0(X_{k_v})^* = CH_0(X_{k_v})$ si v est une place non archimédienne, puis $CH_0(X_{k_v})^* = 0$ si v est une place complexe, et pour v réel le quotient de $CH_0(X_\mathbb{R})$ par l'image de la norme $CH_0(X_\mathbb{C}) \to CH_0(X_\mathbb{R})$.

Le théorème suivant [HW16] est l'aboutissement de travaux de Salberger [Sal88], Colliot-Thélène, Swinnerton-Dyer, Skorobogatov, Harari [Har94], Wittenberg [W12]. Un argument relativement élémentaire mais essentiel du travail de Salberger [Sal88] avait été réinterprété par Colliot-Thélène et Swinnerton-Dyer (1994) comme une variante inconditionnelle, adaptée aux zéro-cycles, de l'hypothèse de Schinzel mentionnée au paragraphe 3.

Théorème 4.3. (Harpaz et Wittenberg) *Soient k un corps de nombres, X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre, et $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ un k-morphisme plat à fibre générique une variété rationnellement connexe. Si les fibres lisses X_m au-dessus d'un point fermé m de $\mathbb{P}^1$ satisfont la conjecture 4.1, resp. la conjecture 4.2, alors il en est de même de X.*

Y. Liang [Lia13] avait montré comment on peut établir les conjectures 4.1 et 4.2 pour les variétés projectives et lisses birationnelles à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateurs connexes à partir du résultat pour les points rationnels (connu grâce à Sansuc et Borovoi).

Le théorème ci-dessus s'applique donc à tout $X \to \mathbb{P}^1_k$ comme ci-dessus dont la fibre générique est birationnelle à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateurs connexes.

Si X/k est une courbe projective et lisse de genre quelconque, sous l'hypothèse que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne J_X est fini, on a les conjectures 4.1 et 4.2 pour X.

Projet ambitieux. *En admettant la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des variétés abéliennes, établir la conjecture 4.1 pour les surfaces diagonales*

$$ax^p + by^p + cz^p + dt^p = 0$$

de degré p premier dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$, par une extension de la méthode utilisée pour $\mathbf{PH}_X$ et $p = 3$ par Swinnerton-Dyer [SD01].

De façon plus générale, pour une variété projective et lisse, on souhaiterait ramener la conjecture 4.1 au cas des courbes. Mais cela semble vraiment hors d'atteinte. Une question plus modeste est : *Suffit-il de connaître la conjecture 4.1 pour toutes les variétés projectives et lisses de dimension 3 pour l'avoir en dimension supérieure ?*

5. Rationalité des variétés et invariants birationnels

Soit X une variété sur un corps k. On dit que deux points $P, Q \in X(k)$ sont R-liés s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{P}^1_k$ et un k-morphisme $U \to X$ avec $P, Q \in f(U(k))$. La R-équivalence sur $X(k)$ est la relation d'équivalence engendrée par cette relation.

Étant donnés un corps k de caractéristique zéro et une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, l'ensemble $X(k)/R$ et le sous-groupe $A_0(X) \subset CH_0(X)$ formé des classes de zéro-cycles de degré zéro, sont des invariants k-birationnels des k-variétés projectives et lisses, et ils sont réduits à un élément si la k-variété X est stablement k-rationnelle, ou plus généralement facteur direct birationnel d'un espace projectif.

Pour toute k-variété X projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps k disons de caractéristique zéro, $i \geqslant 1$ et $j \in \mathbb{Z}$, on dispose des groupes de cohomologie non ramifiée $H^i_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$, à coefficients dans les racines de l'unité tordues j fois. Ces groupes sont des invariants k-birationnels, réduits à $H^i(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ si X est stablement k-birationnelle à un espace projectif. On consultera [CT19] pour un rapport récent sur ces invariants. On a $H^2_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathrm{Br}(X)$.

5.1. **Unirationalité.**

Problème 5.1. *Soit k un corps infini. Soit X une k-variété projective et lisse, rationnellement connexe. Supposons $X(k)$ non vide.*

(a) L'ensemble $X(k)$ des points rationnels est-il Zariski dense dans X ?

(b) La k-variété X est-elle k-unirationnelle ?

C'est connu pour les surfaces cubiques lisses, mais ces questions sont ouvertes pour les surfaces rationnelles quelconques. Pour ces surfaces, une réponse affirmative découlerait d'une réponse affirmative à la question suivante [CTSa80, §V] :

Problème 5.2. *Les torseurs universels* [CTSa80, §II.C] *sur les k-surfaces rationnelles projectives et lisses sont-ils des k-variétés (stablement) k-rationnelles dès qu'ils possèdent un point rationnel ?*

C'est connu pour les surfaces de Châtelet [CTSaSD87], et plus généralement les sufaces fibrées en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$ avec au plus 4 fibres géométriques singulières, mais déjà le cas des surfaces de del Pezzo X de degré 4 avec groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de rang un est ouvert.

Une réponse affirmative à ce problème dans le cas $k = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ impliquerait l'unirationalité sur $\mathbb{C}$ des variétés complexes de dimension 3 fibrées en coniques au-dessus du plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, ce qui est une question ouverte bien connue.

5.2. ***R*-équivalence.** Soit k un corps p-adique. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme projectif et lisse de k-variétés lisses géométriquement intègres, à fibres des variétés rationnellement connexes. C'est un théorème de Kollár (1999) que pour $m \in Y(k)$ l'ensemble $X_m(k)/R$ associé à la fibre X_m est fini, et que son cardinal est semi-continu supérieurement pour la topologie p-adique sur $Y(k)$: pour $m \in Y(k)$, en tout point n d'un voisinage ouvert convenable de m, l'ordre de $X_n(k)/R$ est au plus celui de $X_m(k)/R$ [K04].

Problème 5.3. (Kollár) *Sous les conditions ci-dessus, l'ordre de $X_m(k)/R$ est-il localement constant pour la topologie p-adique sur $Y(k)$?*

Problème 5.4. *Soient k un corps parfait de dimension cohomologique 1 et X une k-variété projective, lisse, (séparablement) rationnellement connexe. Supposons $X(k) \neq \varnothing$.*

(a) L'ensemble $X(k)/R$ est-il réduit à un point ?

(b) A-t-on $A_0(X) = 0$?

(c) Ces propriétés valent-elles au moins si k est un corps C_1 ?

Je renvoie à [CT11, §10] pour une discussion de divers cas concrets, tant de corps que de types de variétés. La question (b) a une réponse affirmative pour les surfaces rationnelles. La question (c) a une réponse affirmative pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^n_k$ pour $n \geqslant 4$. Ici encore, une réponse affirmative à la question (a) dans le cas $k = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, et déjà la finitude de $X(k)/R$ dans ce cas, impliquerait l'unirationalité sur $\mathbb{C}$ des variétés complexes de dimension 3 fibrées en coniques au-dessus du plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

5.3. **Rationalité des intersections de deux quadriques.** Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques $f = g = 0$ sur un corps k. Une telle variété est k-rationnelle si elle possède une droite $\mathbb{P}^1_k$. Un théorème d'Amer assure que X contient une droite $\mathbb{P}^1_k$ si et seulement si la quadrique d'équation $f + tg = 0$ sur le corps $k(t)$ (où t est une variable) contient un $\mathbb{P}^1_{k(t)}$, i.e. si et seulement si la forme quadratique $f + tg$ sur le corps $k(t)$ contient deux hyperboliques.

Pour k algébriquement clos, on retrouve le fait que $X \subset \mathbb{P}^n_k$ contient une droite si $n \geqslant 4$, et est rationnelle.

Pour k un corps C_1, le corps $k(t)$ est C_2. Dans ce cas $X \subset \mathbb{P}^n_k$ contient une droite si $n \geqslant 6$, et est donc k-rationnelle. C'est le meilleur résultat possible : pour $k = \mathbb{C}(z)$ corps des fonctions rationnelles en une variable, Hassett et Tschinkel [HT21] donnent un exemple de $X \subset \mathbb{P}^5_k$ qui n'est pas stablement k-rationnelle.

Pour $n = 5$, sur un corps quelconque, un théorème récent [BW19], valable sur tout corps, dit que la k-variété X est k-rationnelle si et seulement si elle contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. On n'a pas par contre de critère pour la k-rationalité stable.

Soit k un corps p-adique. Pour $n \geqslant 8$ on a $X(k) \neq \varnothing$. Commençons par raffiner certains des résultats de [CTSaSD87, Chap. 3]. C'est un théorème [PS10, HB10, HHK09, L13, PS14] que toute forme quadratique en au moins 9 variables sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique est isotrope. Ainsi toute forme quadratique en au moins 11 variables sur $k(t)$ s'annule sur un vectoriel de dimension 2 sur $k(t)$. Via le théorème d'Amer, ceci implique que pour $n \geqslant 10$ toute intersection de deux quadriques $X \subset \mathbb{P}^n_k$ contient une droite $\mathbb{P}^1_k$. Donc pour $n \geqslant 10$, si X est une intersection complète lisse, elle est k-rationnelle.

Problème 5.5. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une intersection lisse de deux quadriques sur un corps p-adique k. Supposons $X(k) \neq \varnothing$.*

(a) Que peut-on dire sur la k-rationalité (stable) de $X \subset \mathbb{P}^n_k$ pour $6 \leqslant n \leqslant 9$?

(b) On a $X(k)/R = \{*\}$ pour $n \geqslant 7$. Que peut-on dire pour $n = 5, 6$?

(c) Résultats et questions analogues pour le groupe $A_0(X) \subset CH_0(X)$ des classes de zéro-cycles de degré zéro.

Si $p \neq 2$ et $n = 6$, on a $A_0(X) = 0$ [PS95]. Par la méthode de spécialisation [V15, CTP16] on devrait pouvoir donner des exemples d'intersections lisses X de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$, avec $X(k) \neq \varnothing$, qui ne sont pas stablement k-rationnelles. Voir [CTP16, Thm. 1.21] et [HT21, §9, §10].

On peut aussi se poser la question de la rationalité sur le corps $\mathbb{R}$ des réels.

Problème 5.6. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $n \geqslant 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques. Supposons que $X(\mathbb{R})$ est non vide et connexe (pour la topologie réelle). Ceci implique-t-il que X est (stablement) $\mathbb{R}$-rationnelle ?*

Pour $n = 4$, l'hypothèse implique que X est $\mathbb{R}$-rationnelle. Pour $n = 5$, Hassett et Tschinkel [HT21] ont montré que X est $\mathbb{R}$-rationnelle si et seulement si X contient une droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Ainsi pour $n = 5$ on peut avoir $X(\mathbb{R})$ connexe non vide et X non $\mathbb{R}$-rationnelle. La question de la $\mathbb{R}$-rationalité stable est ouverte. Pour $n = 6$, Hassett, Kollár et Tschinkel (2020) ont montré que $X(\mathbb{R})$ connexe non vide équivaut à X $\mathbb{R}$-rationnelle. En dimensions supérieures le problème est ouvert.

5.4. **Cohomologie non ramifiée.** La question classique de la rationalité (stable) des hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ amène à considérer le problème suivant, qui est lié à l'étude des cycles de codimension deux (voir [V15, Thm. 1.10, 3.1, 3.3] et [CT15, Thm. 5.4, 5.6, 5.8]).

Problème 5.7. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geqslant 4$ une hypersurface lisse de degré $d \leqslant n$. Soit K un corps contenant $\mathbb{C}$. Pour $n = 4, 5$, l'application*

$$H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(K(X)/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est-elle un isomorphisme pour tout corps K contenant $\mathbb{C}$?

Pour $n \geqslant 6$ et tout $d \leqslant n$, c'est connu [CT15, Thm. 5.6]. Pour $n = 5$ et $d = 3$, la réponse est affirmative, cela résulte [CT15, Thm. 5.8] d'un théorème de C. Voisin (2006). Pour $n = 4$ et $d = 3$, c'est un problème en général ouvert [V15].

Soient $\mathbb{F}$ un corps fini et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de $\mathbb{F}$. Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective et lisse géométriquement connexe de dimension d. Le groupe $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est un analogue supérieur de la partie ℓ-primaire du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ d'une variété $X/\mathbb{F}$. C'est une extension d'un groupe fini par un groupe divisible. Pour $d = 2$, i.e. X une surface, on a $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ (corps de classes supérieur). A. Pirutka a donné des exemples de variétés rationnellement connexes de dimension 5 avec $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$. On ne connaît aucun exemple en dimension 3 ou 4.

Problème 5.8. *Pour toute variété projective et lisse intègre X de dimension 3, le groupe $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est-il divisible ? Est-il nul ? Est-ce déjà le cas pour les variétés rationnellement connexes ?*

On sait l'établir pour quelques classes intéressantes de variétés : les variétés fibrées en coniques au-dessus d'une surface [PS16], et les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{F}}$. La question est liée à une forme forte de la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur les variétés de dimension 3 sur un corps fini, et à la validité de la conjecture 4.2 ci-dessus pour les surfaces sur un corps global de caractéristique positive [CT99, CTK13]. Le lien entre la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur les variétés sur un corps fini et la conjecture 4.1 sur un corps global de caractéristique positive avait été fait par S. Saito en 1989. On sait établir $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/2) = 0$ pour $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{F}}$ une hypersurface cubique lisse.

Problème 5.9. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, et soit $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{F}}$ une hypersurface cubique lisse. A-t-on $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X)/\mathbb{F}, \mathbb{Z}/2) = 0$?*

6. Points rationnels et indice des variétés algébriques.

Problème 6.1. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_k, n \geqslant 4$, une intersection complète lisse de deux quadriques sur un corps k de dimension cohomologique 1. Pour $n = 5$, a-t-on $X(k) \neq \varnothing$?*

Pour $n \geqslant 6$, c'est vrai et facile. Pour $n = 4$, la réponse est négative. La démonstration repose sur la construction de très grands corps.

Soit C une courbe géométriquement intègre sur le corps des réels avec $C(\mathbb{R}) = \varnothing$, par exemple la conique d'équation homogène $x^2 + y^2 + t^2 = 0$. On sait que le corps $\mathbb{R}(C)$ est de dimension cohomologique 1. C'est une question ouverte si c'est un corps C_1. Plus généralement on demande s'il y a un analogue du théorème de Graber, Harris et Starr :

Problème 6.2. *Toute variété rationnellement connexe X sur le corps $K = \mathbb{R}(C)$ a-t-elle un point rationnel ?*

On ne sait déjà pas si pour toute variété projective et lisse rationnellement connexe X sur $\mathbb{R}$ avec $X(\mathbb{R}) = \varnothing$ il existe un $\mathbb{R}$-morphisme de la conique sans point vers X.

Problème 6.3. *Existe-t-il un entier $n \geqslant 4$ tel que toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^n_k$ sur un corps k de dimension cohomologique 1 possède un point rationnel, ou du moins satisfasse $I(X) = 1$?*

Les corps p-adiques ne sont pas des corps C_2. On a cependant la question :

Problème 6.4. (Kato et Kuzumaki) *Pour toute hypersurface $X \subset \mathbb{P}^n_k$ de degré d sur un corps p-adique, si l'on a $n \geq d^2$, a-t-on $I(X) = 1$?*

Ceci a été établi par Kato et Kuzumaki (1985) lorsque le degré d est un nombre premier. C'est ouvert déjà pour $d = 4$.

Problème 6.5. (Cassels et Swinnerton-Dyer) *Soient k un corps et $X \subset \mathbb{P}^n_k$ une hypersurface cubique. Si l'on a $I(X) = 1$, a-t-on $X(k) \neq \varnothing$?*

D. Coray (1976) montra qu'il en est ainsi sur un corps p-adique. Pour $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur un corps quelconque, il montra que l'hypothèse $I(X) = 1$ entraîne l'existence sur X d'un point fermé de degré 1, 4 ou 10. La question si on peut éliminer 10 et 4 est restée ouverte. L'analogue de la question pour les surfaces de del Pezzo de degré 2 a une réponse négative (Kollár et Mella).

Problème 6.6. (Serre) *Soient k un corps, G un groupe algébrique linéaire connexe sur k, et E un espace principal homogène sous G. Si l'indice $I(E)$ est égal à 1, a-t-on $E(k) \neq \varnothing$?*

Pour les espaces homogènes non principaux, la propriété ne vaut pas, des contre-exemples ont été construits par Florence et par Parimala.

Problème 6.7. *Soient k un corps,* $\mathrm{car}(k) = 0$*, et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une hypersurface cubique lisse sans point rationnel, i.e. d'indice $I(X) = 3$. Soit Y/k une k-variété projective lisse géométriquement connexe de dimension au plus 2. S'il existe une k-application rationnelle de X vers Y, a-t-on $I(Y) = 1$?*

Par la classification k-birationnelle des surfaces géométriquement rationnelles, le problème se ramène au cas où Y est une surface cubique lisse k-minimale. Ce cas semble résister aux formules de degré à la Rost [M03, Z10] qui avaient permis d'étendre le théorème d'Hoffmann [H95] restreignant les dimensions possibles pour les couples de quadriques anisotropes admettant une application rationnelle entre elles.

7. Groupes algébriques linéaires

Soit G un groupe algébrique linéaire réductif connexe sur un corps k. L'ensemble $G(k)/R$ est naturellement muni d'une structure de groupe. Tout élément de ce groupe est d'ordre fini. Si K/k est une extension transcendante pure, l'homomorphisme $G(k)/R \to G(K)/R$ est bijectif.

Soit D une algèbre centrale simple (de rang fini) sur un corps k. Soit $G = SL_{1,D} \subset GL_{1,D}$ le groupe algébrique des éléments de norme réduite 1. C'est un k-groupe algébrique semisimple simplement connexe. Un théorème de Voskresenskiĭ utilisant un théorème de Platonov identifie dans ce cas $G(k)/R$ au groupe $SK_1(D)$ quotient du groupe des éléments de $D^\times$ de norme réduite 1 par le groupe $[D^\times, D^\times]$ engendré par les commutateurs.

Des travaux de Platonov, Yanchevskiĭ, Merkurjev, Chernousov ont identifié le quotient $G(k)/R$ pour beaucoup de groupes classiques, tant simplement connexes qu'adjoints, et ont au passage établi sa commutativité. Le problème général suivant reste cependant ouvert.

Problème 7.1. *Soient k un corps et G un k-groupe algébrique réductif connexe. Le groupe quotient $G(k)/R$ est-il commutatif ?*

Voskresenskiĭ (1977) avait posé la question pour G linéaire connexe sur un corps quelconque. Pour un groupe linéaire connexe non réductif, sur un corps non parfait, F. Scavia (2021) a donné une réponse négative.

Pour les deux problèmes suivants, on consultera le rapport de P. Gille [Gi07].

Problème 7.2. *Soient k un corps et G un k-groupe réductif connexe. Si pour tout corps K contenant k, le groupe $G(K)/R$ est trivial, ceci implique-t-il que G est facteur direct birationnel d'une k-variété k-rationnelle ?*

Problème 7.3. *Soit k un corps parfait de dimension cohomologique $\leqslant 3$. Si G est un k-groupe semisimple simplement connexe, a-t-on $G(k)/R = 1$?*

Ce problème est motivé par les travaux de Suslin sur le groupe $SK_1(D)$ d'une algèbre simple centrale. On a un certain nombre de résultats lorsque la dimension cohomologique est $\leqslant 2$.

Problème 7.4. *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe sur le corps $\mathbb{R}$ des réels. La $\mathbb{R}$-variété G est-elle $\mathbb{R}$-rationnelle, i.e. le corps des fonctions de G est-il transcendant pur sur $\mathbb{R}$?*

Problème 7.5. *Soit k un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$. Si G est un k-groupe linéaire connexe, le quotient $G(k)/R$ est-il fini ?*

C'est connu pour G un k-tore (Colliot-Thélène et Sansuc 1977) et pour k un corps de nombres (P. Gille 1997). Pour $G = SL_{1,D}$ le k-groupe algébrique des éléments de norme 1 dans une algèbre centrale simple D sur k, le problème se traduit ainsi :

Problème 7.6. *Si D est une algèbre centrale simple sur un corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$, le groupe $SK_1(D)$ est-il fini ?*

Problème 7.7. *Soit $H/\mathbb{C}$ un groupe linéaire connexe et $G \subset H$ un sous-groupe fermé connexe. Le quotient H/G est-il une variété rationnelle ?*

C'est une question célèbre, déjà pour $H = GL_{n,\mathbb{C}}$ et $G = PGL_{m,\mathbb{C}}$. Pour traiter cette question, on peut essayer d'utiliser la cohomologie non ramifiée.

Soit $k = \mathbb{C}$, et soit X une compactification lisse de $GL_{n,\mathbb{C}}/G$, avec $G \subset GL_{n,\mathbb{C}}$ sous-groupe algébrique fermé connexe. Pour tout corps K contenant $\mathbb{C}$, et $i = 1, 2$ on sait que

$$H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) = H^i_{nr}(K(X)/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)).$$

Pour $i = 2$, ceci dit que le groupe de Brauer de $X \times_{\mathbb{C}} K$ est réduit à l'image de $\mathrm{Br}(K)$, énoncé essentiellement dû à Bogomolov. Dans une série d'articles, Merkurjev [M17] et Sanghoon Baek [B21] ont établi $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ pour de nombreuses classes de groupes réductifs G.

Problème 7.8. *Dans chacun de ces cas, pour tout corps K contenant $\mathbb{C}$, la flèche $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(K(X)/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est-elle un isomorphisme ?*

Avec les méthodes décrites dans [CT15, §5], on pourrait essayer de résoudre ce problème via l'étude des cycles de codimension deux d'une bonne compactification lisse de $GL_{n,\mathbb{C}}/G$.

Références

[AK03] C. Araujo et J. Kollár, Rational curves on varieties, in *Higher dimensional varieties and rational points* (Budapest, 2001), 13–68, Bolyai Soc. Math. Stud., **12**, Springer, Berlin, 2003. 2

[B21] S. Baek, Degree 3 unramified cohomology of classifying spaces for exceptional groups, J. Pure Appl. Algebra **225** (2021). 15

[BW19] O. Benoist et O. Wittenberg, Intermediate Jacobians and rationality over arbitrary fields, à paraître aux Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 12

[BD13] M. Borovoi et C. Demarche, Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces, Comment. Math. Helv. **88**, No. 1, 1–54 (2013). 3

[Bri18] M. Bright, Obstructions to the Hasse principle in families, manuscripta math. **157** (2018), no. 3-4, 529–550. 6

[BBL16] M. Bright, T. D. Browning et D. Loughran, Failures of weak approximation in families, Compos. Math. **152** (2016), no. 7, 1435–1475. 6

[B18] T. D. Browning, How often does the Hasse principle hold ? in *Algebraic geometry : Salt Lake City 2015*, 89–02, Proc. Sympos. Pure Math., **97.2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018. 5

[BLBS20] T. D. Browning, P. Le Boudec et W. Sawin, The Hasse principle for random Fano hypersurfaces, prépublication, math arXiv :2006.02356v1 5

[BMSk14] T. Browning, L. Matthiesen et A N Skorobogatov, Rational points on pencils of conics and quadrics with many degenerate fibres, Ann Math, **180** (2014) 381–402 7

[CT87] J.-L. Colliot-Thélène, Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California 1986, (1987), Tome I, 641–653. 1

[CT90] J.-L. Colliot-Thélène, Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 88-89*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1990), p. 43–55. 6

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène, L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles (exposé aux Journées arithmétiques de Bordeaux, Septembre 93), Journal de théorie des nombres de Bordeaux **7**(1995) 51–73. 9

[CT98] J.-L. Colliot-Thélène, The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties, in *Proceedings of the Tiruchirapalli conference* (India, January 1996), ed. M. Waldschmidt and K. Murty, Contemporary Mathematics **210**(1998) 19–39. 1

[CT99] J.-L. Colliot-Thélène, Conjectures de type local-global sur l'image de l'application cycle en cohomologie étale, in *Algebraic K-Theory* (1997), W. Raskind and C. Weibel ed., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **67**, Amer. Math.Soc. (1999) 1–12. 9, 13

[CT03] J.-L. Colliot-Thélène, Points rationnels sur les fibrations (notes d'un cours donné à Budapest en septembre 2001), in *Higher Dimensional Varieties and Rational Points*, Bolyai Society Mathematical Series, **12**, Springer-Verlag, 2003, edited by K. J. Böröczky, J. Kollár and T. Szamuely, 171–221. 1, 4

[CT11] J.-L. Colliot-Thélène, Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences, in *Arithmetic Geometry* (CIME 2007), Springer LNM **2009** (2011), p. 1–44. 1, 11

[CT15] J.-L. Colliot-Thélène, Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications Documenta Mathematica, Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015) 195–220. 12, 13, 15

[CT19] J.-L. Colliot-Thélène, Non rationalité stable sur les corps quelconques, in *Birational Geometry of Hypersurfaces* (Gargnano del Garda, 2018), A. Hochenegger, M. Lehn et P. Stellari ed., Lecture Notes of tjhe Unione Matematica Italiana, Springer (2019) p. 73–110. 1, 10

[CTHaSk03] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A.N. Skorobogatov, Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme, in *Number theory and algebraic geometry*, M. Reid and A. Skorobogatov eds., London Math. Soc. Lecture Note Series **303**, Cambridge University Press, 2003, pp. 69–89. 7

[CTK13] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis, J. K-Theory **11** (2013) 1–53. 13

[CTSa80] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, in *Journées de géométrie algébrique d'Angers* (Juillet 1979), éd. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff (1980), 223–237. 4, 11

[CTKaS87] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky et J.-J. Sansuc, Arithmétique des surfaces cubiques diagonales, in *Diophantine Approximation and Transcendence Theory*, Springer L.N.M. **1290** (ed. G. Wüstholz) (1987) 1–108. 6

[CTP16] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non-rationalité stable, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série, t. **49** (2) (2016) 371–397. 12

[CTSaSD87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, J. für die reine und angew. Math. **373** (1987) 37–107 ; II, ibid. **374**(1987) 72–168. 6, 7, 11, 12

[CTSk21] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, **71**. Springer, Cham, 2021. 3

[CTSkSD98] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points, Inventiones math. **134** (1998) 579–650. 8

[Gi07] P. Gille, Le problème de Kneser–Tits, in *Séminaire Bourbaki*, Volume 2007/2008. Astérisque **326**, 39–82, Exp. no. 983 (2009). 15

[Har94] D. Harari. Méthode des fibrations et obstruction de Manin, Duke Math. J. **75** (1994) 221–260. 6, 9

[HHK09] D. Harbater, J. Hartmann et D. Krashen, Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras, Invent. math. **178** (2009), no. 2, 231–263. 12

[HS16] Y. Harpaz et A.N. Skorobogatov, Hasse principle for Kummer varieties, Algebra & Number Theory **10** (2016) 813–841. 8

[HW16] Y. Harpaz et O. Wittenberg, On the fibration method for zero-cycles and rational points, Annals of Mathematics **183** (2016), no. 1, 229–295. 7, 9

[HW20] Y. Harpaz et O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les espaces homogènes et problème de Galois inverse, Journal of the American Mathematical Society **33** (2020), no. 3, 775–805. 5

[HWW21] Y. Harpaz, D. Wei et O. Wittenberg, Rational points on fibrations with few non-split fibres, prépublication, septembre 2021. 7

[HT21] B. Hassett et Yu. I. Tschinkel, Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields, with an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, L'Enseign. Math. **67** (2021), no. 1-2, 1–44. 12

[HB10] D.R. Heath-Brown, Zeros of systems of p-adic quadratic forms, Compos. Math. **146** (2010), no. 2, 271–287. 12

[HB18] D.R. Heath-Brown, Zeros of pairs of quadratic forms, J. reine angew. Math. **739** (2018) 41–80. 6

[H95] D. Hoffmann, Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric, Math. Z. 220 (1995), no. 3, 461–476. 14

[K99] J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **32**, 2nd ed., Springer-Verlag, 1999. 2

[K04] J. Kollár, Specialization of zero-cycles, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40** (2004), no. 3, 689–708. 11

[L13] D. B. Leep, The u-invariant of p-adic function fields, J. reine angew. Math. **679** (2013), 65–73. 12

[Lia13] Y. Liang., Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields, Ann. Scient. École Norm. Sup. 4^e série **46** (2013) 35–56. 10

[L18] D. Loughran, The number of varieties in a family which contain a rational point, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), no. 10, 2539–2588. 6

[LS16] D. Loughran et A. Smeets, Fibrations with few rational points, Geom. Funct. Anal. **26** (2016), no. 5, 1449–1482. 6

[M03] A. Merkurjev, Steenrod operations and degree formulas, J. reine angew. Math. **565** (2003), 13–26. 14

[M17] A. Merkurjev, Invariants of algebraic groups and retract rationality of classifying spaces, in *Algebraic Groups : Structure and Actions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **94**, AMS (2017), 277–294. 15

[PS95] R. Parimala et V.Suresh, Zero-cycles on quadric fibrations : finiteness theorems and the cycle map, Invent. math. **122** (1995), no. 1, 83–117. 12

[PS10] R. Parimala et V. Suresh, The u-invariant of the function fields of p-adic curves, Ann. of Math. **172** (2010) 1391–1405. 12

[PS14] R. Parimala et V. Suresh, Period-index and u-invariant questions for function fields over complete discretely valued fields, Invent. math. **197** (1) (2014) 215–235. 12

[PS16] R. Parimala et V. Suresh, Degree 3 cohomology of function fields of surfaces, IMRN **2016** :14 (2016) 4341–4374. 13

[Sal88] P. Salberger, Zero-cycles on rational surfaces over number fields, Invent. math. **91** (1988), no. 3, 505–524. 6, 9

[SaSk91] P. Salberger, A.N. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 517–536. 6

[Se92] J-P. Serre, Topics in Galois Theory, Research Notes in Mathematics **1** (1992) Jones and Bartlett Publishers. 3, 5

[Sk01] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge tracts in Mathematics **144** (2001). 1

[SkSo20] A. N. Skorobogatov et E. Sofos, Schinzel Hypothesis with probability 1 and rational points, prépublication, 2020, arXiv :2005.02998 [math.NT] 6, 7

[SD01] Sir Peter Swinnerton-Dyer, The solubility of diagonal cubic surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4^e série **34** (2001) 891–912. 6, 8, 10

[SD11] Sir Peter Swinnerton-Dyer, Topics in Diophantine Geometry, in *Arithmetic Geometry* (CIME 2007), Springer LNM **2009** (2011). 1

[T17] Zhiyu Tian, Hasse principle for three classes of varieties over global function fields, Duke Math. J. **166** (2017), no. 17, 3349–3424. 6

[V15] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, Invent. math. 201 (2015), 207–237. 12, 13

[W07] O. Wittenberg, *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1*, Lecture Notes in Mathematics **1901**, Springer-Verlag, Berlin, 2007. 6, 8

[W12] O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, Duke Mathematical Journal **161** (2012), no. 11, 2113–2166. 9

[W18] O. Wittenberg, Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields, in *Algebraic Geometry : Salt Lake City 2015*, Part 2, p. 597–635, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **97**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. 1, 3, 7

[Z10] K. Zainoulline, Degree formula for connective K-Theory, Invent. math. **179** (2010) 507–533. 14

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: `jlct@math.u-psud.fr`