Invariance birationnelle et invariance homotopique : un lemme

Soit k un corps. Soit F un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas vers la catégorie des ensembles. Si sur les morphismes k-birationnels de surfaces projectives, lisses et géométriquement connexes ce foncteur induit des bijections, alors l'application $F(k) \to F(\mathbf{P}^1_k)$ est une bijection.

Démonstration Toutes les variétés considérées sont des k-variétés. On écrit $F(k)$ pour $F(\mathrm{Spec}(k))$. Soit W l'éclaté de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en un k-point M. Les transformés propres des deux génératrices L_1 et L_2 passant par M sont deux courbes exceptionnelles de première espèce $E_1 \simeq \mathbf{P}^1$ et $E_2 \simeq \mathbf{P}^1$ qui ne se rencontrent pas. On peut donc les contracter simultanément, la surface que l'on obtient est le plan projectif $\mathbf{P}^2$. Notons M_1 et M_2 les k-points de $\mathbf{P}^2$ sur lesquels les courbes E_1 et E_2 se contractent.

On réalise facilement cette construction de manière concrète. Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ avec coordonnées multihomogènes $(u, v; w, z; X, Y, T)$ on prend pour W la surface définie par l'idéal $(uT - vX, wT - zY)$, et on considère les deux projections $W \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $W \to \mathbf{P}^2$.

On a un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \to & W \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ L_1 & \to & \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1. \end{array}$$

Le composé de l'inclusion $L_1 \hookrightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et d'une des deux projections $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ est un isomorphisme. Par fonctorialité, la restriction $F(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \to F(L_1)$ est donc surjective. Par fonctorialité, le diagramme ci-dessus implique alors que la restriction $F(W) \to F(E_1)$ est surjective.

Considérons maintenant la projection $W \to \mathbf{P}^2$. On a ici le diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \to & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \to & \mathbf{P}^2. \end{array}$$

Par l'hypothèse d'invariance birationnelle, on a la bijection $F(\mathbf{P}^2) \stackrel{\simeq}{\to} F(W)$. Donc la flèche composée $F(\mathbf{P}^2) \to F(W) \to F(E_1)$ est surjective. Mais par le diagramme commutatif ci-dessus la flèche composée se factorise aussi comme $F(\mathbf{P}^2) \to F(M_1) \to F(E_1)$. Ainsi $F(M_1) \to F(E_1)$, c'est-à-dire $F(k) \to F(\mathbf{P}^1)$, est surjectif. L'injectivité de $F(k) \to F(\mathbf{P}^1)$ résulte de la fonctorialité et de la considération d'un k-point sur $\mathbf{P}^1$.

J.-L. Colliot-Thélène

14 septembre 2006, révisé 27 février 2008