Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores

Tome 26, nº 1 (2014), p. 69-83.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2014__26_1_69_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **26** (2014), 69–83

Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores

par Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Résumé. Soient k un corps et X une k-variété projective et lisse. Si X est géométriquement rationnelle, on dispose d'une application injective du quotient de groupes de Brauer $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ dans le premier groupe de cohomologie galoisienne du réseau défini par le groupe de Picard géométrique de X. Dans cette note on donne des cas où cette application est toujours surjective. Pour les espaces homogènes de certains tores algébriques, on donne des générateurs explicites dans $\mathrm{Br}(X)$. On applique cela à l'étude du principe de Hasse pour les normes d'une extension biquadratique de corps de nombres.

Abstract. *Unramified Brauer group of homogeneous spaces of tori.*
Let k be a field, X a smooth, projective k-variety. If X is geometrically rational, there is an injective map from the quotient of Brauer groups $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ into the first Galois cohomology group of the lattice given by the geometric Picard group. In this note, where the main attention is on smooth compactifications of homogeneous spaces of algebraic k-tori, we show how under some hypotheses the map is onto, and how one may in some special cases exhibit concrete generators in $\mathrm{Br}(X)$. This is applied to the analysis of counterexamples to the local-global principle for norms in biquadratic extensions of number fields.

Introduction

Soient k un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soient X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On a $\overline{k}^{\times} \xrightarrow{\simeq} H^0(\overline{X}, \mathbf{G}_m)$.

Étant donné un g-module galoisien M, on notera indifféremment $H^i(g, M)$ ou $H^i(k, M)$ ses groupes de cohomologie galoisienne.

On s'intéresse au groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$, qu'on peut aussi définir comme le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{nr}(k(X)) = \mathrm{Br}_{nr}(k(X)/k)$ du corps des fonctions de X.

Manuscrit reçu le 12 octobre 2012, révisé le 26 juin 2013, accepté le 11 juin 2013..

Le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Br}_a(X)$ est par définition le noyau de la restriction $\mathrm{Br}X \to \mathrm{Br}(\overline{X})$. Si $\overline{X}$ est $\overline{k}$-birationnelle à un espace projectif, alors $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$, et $\mathrm{Br}_a(X) = \mathrm{Br}(X)$.

On sait (voir [5, (1.5.0)]) que le groupe $\mathrm{Br}_a(X)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^g \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \mathbf{G}_m).$$

Déterminer si une classe dans $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ se relève dans $\mathrm{Br}_a(X)$ est un premier problème. Quand on sait qu'il existe un relèvement, exhiber un élément concret dans $\mathrm{Br}_a(X) \subset \mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(k(X))$ relevant la classe, et permettant des calculs numériques, peut être un problème, quand tout ce que l'on connaît explicitement est un ouvert non vide de X, mais pas la k-variété X elle-même.

Dans la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(g, H^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$$

qui donne naissance à la suite exacte ci-dessus, tout point k-rationnel de X définit une rétraction des flèches $H^i(g, \overline{k}^\times) \to H^i_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$. Si l'ensemble $X(k)$ des points rationnels est non vide, ceci implique que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{X})^g$$

et une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to 0.$$

Même dans ce cas, et même si l'on s'est donné le k-point rationnel, si l'on ne connaît pas X de façon explicite, trouver un relèvement concret d'un élément de $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ peut aussi être un problème.

Un exemple d'une telle situation se présente lorsque l'on étudie les compactifications lisses T^c, resp. E^c, d'un k-tore T, resp. d'un espace homogène principal E de T.

Un cas typique est le suivant (voir [2], [10], [12]).

On considère une extension biquadratique $K = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, un élément $\gamma \in k^*$ et la k-variété E définie par l'équation

$$N_{K/k}(\Xi) = \gamma,$$

où $N_{K/k}$ désigne la norme de K à k. Pour $\gamma = 1$, ceci définit le k-tore $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$. On sait que l'on a $\mathrm{Br}(T^c)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$. Mais on ne sait pas écrire de façon naturelle un générateur dans $\mathrm{Br}(T^c)$ (voir la remarque 1.5).

Pour γ quelconque, on a $\mathrm{Br}(E^c)/\mathrm{Br}(k) \subset \mathbb{Z}/2$, et on n'a pas de façon systématique pour décider si le quotient vaut $\mathbb{Z}/2$ et si c'est le cas trouver un représentant du générateur dans $\mathrm{Br}(E^c)$.

Le but de cette note est de montrer comment dans certains cas on peut contourner ces problèmes. On s'intéresse particulièrement aux tores définis par une équation

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = 1$$

et à leurs espaces principaux homogènes, définis par une équation

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = c,$$

avec $a, b, c \in k^\times$.

Depuis la rédaction du présent article, ces tores ont été utilisés dans trois contextes différents.

Dans [1], de la Bretèche et Browning donnent des estimations asymptotiques sur le nombre de contre-exemples au principe de Hasse pour les familles générales de tels espaces homogènes sur un corps de nombres.

Dans [11], D. Wei étudie le principe de Hasse pour l'espace total d'une famille à un paramètre de tels espaces homogènes.

Dans [3], Parimala, Suresh et l'auteur utilisent ces tores pour résoudre négativement un problème sur les espaces principaux homogènes au-dessus d'un corps de fonctions d'une variable sur un corps local.

Dans tout l'article, k est un corps de caractéristique zéro, $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k et $g = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

1. Cas de surjectivité de l'application $\mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$

Dans cette section nous décrivons des cas où, pour des raisons purement algébriques, l'application

$$\mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$$

est surjective, que X ait un point rationnel ou non.

On dit qu'une k-variété intègre est k-rationnelle si son corps des fonctions est transcendant pur sur le corps k.

Proposition 1.1. *Soit X une k-variété projective lisse géométriquement connexe. Supposons qu'il existe une extension finie cyclique K/k et une K-variété intègre Y telle que $Y \times_K X_K$ soit une K-variété K-rationnelle. Alors :*

(a) La flèche $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^\times)$ est nulle, et l'on a une suite exacte

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to 0.$$

(b) On a une suite exacte

$$\ker[\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)] \to \ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_K)] \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to 0.$$

(c) Tout élément de $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ *se relève en un élément du sous-groupe* $\mathrm{Br}(X) \subset \mathrm{Br}(k(X))$ *qui s'écrit* (χ, f) *avec*

$$f \in \ker[k(X)^\times/N_{K/k}(K(X)^\times) \to \mathrm{Div}(X)/N_{K/k}(\mathrm{Div} X_K)]$$

et $\chi \in H^1(K/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset H^2(k, \mathbb{Z})$.

Démonstration. Soit $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. Fixons un plongement $K \subset \overline{k}$, d'où une application quotient surjective $g \to G$. On compare les suites exactes déduites des suites spectrales

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q_{\text{ét}}(X_K, \mathbf{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$$

et

$$E_2^{pq} = H^p(g, H^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbf{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m).$$

On a donc le diagramme commutatif de suites exactes

(1.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(G, K^\times) & \to & \ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_K)] & \to & H^1(G, \mathrm{Pic}(X_K)) & \to & H^3(G, K^\times) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^2(g, \overline{k}^\times) & \to & \ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] & \to & H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) & \to & H^3(g, \overline{k}^\times).
\end{array}$$

Comme G est cyclique, on a $H^3(G, K^\times) \simeq H^1(G, K^\times)$ et ce dernier groupe est nul d'après le théorème 90 de Hilbert.

Soit $h = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K)$. L'hypothèse faite sur la K-variété X_K implique qu'elle possède un K-point et que le h-module $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation ([5, Prop. 2.A.1]). Le premier fait implique $\mathrm{Pic}(X_K) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{X})^h$. Le second implique $H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X})) = 0$. La suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})^h) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(h, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$$

donne un isomorphisme

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(X_K)) \xrightarrow{\simeq} H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})).$$

L'hypothèse faite sur X_K implique qu'il existe un entier $n > 0$ et une $\overline{k}$-application rationnelle dominante de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ vers $\overline{X}$ qui admet une section sur un ouvert de $\overline{X}$. Comme on a supposé $\mathrm{car}(k) = 0$, ceci suffit à assurer $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$. On a ainsi établi les énoncés (a) et (b). En ce qui concerne (c), on sait que pour toute extension galoisienne K/k de groupe G, on a un isomorphisme naturel (voir [4, Lemme 14, p. 213])

$$\ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_K)] \xrightarrow{\simeq} \ker[H^2(G, K(X)^\times) \to H^2(G, \mathrm{Div}(X_K))].$$

Pour K/k cyclique, la périodicité de la cohomologie des groupes finis cycliques associe au choix d'un générateur de G un isomorphisme entre le dernier groupe et

$$\ker[\hat{H}^0(G, K(X)^\times) \to \hat{H}^0(G, \mathrm{Div}(X_K)]),$$

c'est-à-dire

$$\ker[k(X)^\times/N_{K/k}(K(X)^\times) \to \mathrm{Div}(X)/N_{K/k}(\mathrm{Div}X_K)].$$

□

Proposition 1.2. *Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. S'il existe une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe Y pour laquelle une des hypothèses suivantes est satisfaite :*

(i) la flèche $\mathrm{Br}_a(Y) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y}))$ est surjective,

(ii) $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y})) = 0$,

(iii) il existe une extension cyclique K/k telle que Y_K soit K-rationnelle, et s'il existe un k-morphisme de Y vers X, alors la flèche

$$\mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$$

est surjective.

Démonstration. Par fonctorialité des suites spectrales, on a le diagramme commutatif de suites exactes :

$$(1.2)\qquad \begin{array}{ccccccc} \mathrm{Br}(k) & \to & \ker[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] & \to & H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) & \to & H^3(g, \overline{k}^\times) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \mathrm{Br}(k) & \to & \ker[\mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(\overline{Y})] & \to & H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y})) & \to & H^3(g, \overline{k}^\times). \end{array}$$

Sous l'hypothèse (i), la flèche $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y})) \to H^3(g, \overline{k}^\times)$ est nulle. Du diagramme on conclut que la flèche $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(g, \overline{k}^\times)$ est nulle, et que la flèche $\mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est surjective. L'hypothèse (ii) implique trivialement l'hypothèse (i). Sous l'hypothèse (iii), la proposition 1.1(a) donne (i), et donc le résultat. □

Remarque 1.3. On peut renforcer l'énoncé et supposer seulement l'existence d'une application k-rationnelle d'une telle k-variété Y vers X. La résolution des singularités ($\mathrm{car}(k) = 0$) permet en effet de trouver une k-variété Y' projective, lisse, géométriquement connexe, un k-morphisme birationnel $p : Y' \to Y$ et un k-morphisme $Y' \to X$. On sait que $p^* : H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y})) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{Y}'))$ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

Remarque 1.4. Voici un exemple d'application. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. S'il existe un k-morphisme d'une k-quadrique lisse Q de dimension au moins 1 vers X, alors $\mathrm{Br}_a(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est surjectif. Un exemple familier est fourni par les variétés X fibrées en quadriques au-dessus de la droite projective.

Remarque 1.5. Le tore $T = R^1_{L/k}\mathbf{G}_m$ associé à une extension biquadratique $L = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ de k, après extension du corps de base de k à

$K = k(\sqrt{a})$, est K-isomorphe à la K-variété définie par

$$(x^2 - by^2)(u^2 - bv^2) = 1.$$

Cette K-variété est K-isomorphe à la K-variété affine d'équation

$$x^2 - by^2 = z^2 - bt^2 \neq 0.$$

Cette variété est clairement K-rationnelle : elle est K-birationnelle au produit d'une droite et d'une quadrique lisse dans $\mathbf{P}^3_K$, quadrique possédant un point K-rationnel, et donc K-birationnelle à $\mathbf{P}^2_K$.

La proposition 1.1 s'applique. On a $H^1(G, \mathrm{Pic}(T^c_K)) = H^1(g, \mathrm{Pic}(T^c_{\overline{k}}))$ et un argument abstrait ([6, Prop. 9.5]) montre que ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$. Suivre cet isomorphisme n'est pas simple. Mais surtout, faute de bien connaître une compactification lisse explicite T^c de T, on ne connaît pas de facçn explicite la suite exacte de G-modules

$$1 \to K(T^c)^\times/K^\times \to \mathrm{Div}(T^c_K) \to \mathrm{Pic}(T^c_K) \to 0,$$

et donc on ne voit pas comment calculer l'image de l'application de groupes de cohomologie de Tate

$$\mathbb{Z}/2 = \hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(T^c_K)) \to \hat{H}^0(G, K(T^c)^\times/K^\times).$$

Ainsi il n'est pas évident d'exhiber une fonction $f \in k(T)^\times$ telle que le générateur de $\mathrm{Br}(T^c)/\mathrm{Br}(k) = \mathbb{Z}/2$ soit donné par $(K/k, f)$.

2. Réduction des tores aux tores coflasques

On a une dualité bien connue entre les k-tores algébriques et les g-réseaux de type fini, associant à un k-tore T son groupe des caractères $\hat{T}$ sur $\overline{k}$. Pour tout k-tore T il existe une (plus petite) extension finie galoisienne K de k, telle que l'action de g sur $\hat{T}$ se factorise par $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. On dit que K/k déploie T et $\hat{T}$. Un k-tore quasitrivial P est un k-tore dont le groupe des caractères est un g-module de permutation. Un tel tore est un produit de k-tores $R_{k_i/k}\mathbf{G}_m$ pour diverses extensions séparables de corps k_i/k. Un k-tore quasitrivial est k-isomorphe à un ouvert d'un espace affine $\mathbf{A}^d_k$, et est donc une k-variété k-rationnelle. Un tel k-tore P satisfait $H^1(g, \hat{P}) = 0$ et $H^1(k, P) = 0$ (lemme de Shapiro et théorème 90 de Hilbert).

Un k-tore Q est dit coflasque (voir [6]) si pour tout sous-groupe ouvert $h \subset g$ on a $H^1(h, \hat{Q}) = 0$. Il suffit pour le vérifier de montrer $H^1(H, \hat{Q}) = 0$ pour tout sous-groupe $H \subset G$, où G est le groupe de Galois d'une extension finie déployant Q.

Étant donné un g-réseau M (groupe abélien libre de type fini équipé d'une action continue discrète de g), on définit $\text{Ш}^2_\omega(k, M) \subset H^2(g, M)$ comme le sous-groupe de $H^2(g, M)$ formé des classes dont la restriction à tout sous-groupe fermé procyclique de g est nulle.

Si l'extension finie K/k de groupe G déploie le g-réseau M, alors

$$Ш^2_\omega(k, M) \simeq \ker[H^2(G, M) \to \prod_{\sigma \in G} H^2((\sigma), M)].$$

Pour M un g-module de permutation, on a $Ш^2_\omega(k, M) = 0$.

Pour k un corps de nombres, Ω l'ensemble de ses places, et T un k-tore, pour tout entier naturel i, on définit

$$Ш^i(k, T) := \ker[H^i(k, T) \to \prod_{v \in \Omega} H^i(k_v, T)].$$

Pour $T = P$ un tore quasitrivial, il résulte du lemme de Shapiro et de la théorie du corps de classes que l'on a $Ш^2(k, P) = 0$.

Proposition 2.1. *Soit T un k-tore.*

(a) Il existe une suite exacte de k-tores

$$1 \to P \to Q \to T \to 1$$

avec P un k-tore quasitrivial et Q un k-tore coflasque.

(b) Toute telle suite exacte est génériquement scindée, le k-tore Q est k-birationnel au produit $P \times T$. Ainsi tout k-tore est stablement k-birationnel à un k-tore coflasque.

(c) Si l'on se donne deux suites exactes

$$1 \to P_1 \to Q_1 \to T \to 1$$

et

$$1 \to P_2 \to Q_2 \to T \to 1$$

comme en (a), alors il existe un k-isomorphisme de k-tores $P_1 \times_k Q_2 \simeq P_2 \times_k Q_1$.

(d) La suite de caractères

$$0 \to \hat{T} \to \hat{Q} \to \hat{P} \to 0$$

duale de la suite en (a) induit un isomorphisme naturel

$$Ш^2_\omega(k, \hat{T}) \xrightarrow{\simeq} Ш^2_\omega(k, \hat{Q}).$$

(e) Soit T^c, resp. Q^c, une compactification lisse du k-tore T, resp. du k-tore Q. La projection $Q \to T$ induit un isomorphisme $\mathrm{Br}(T^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}(Q^c)$.

(f) Si k est un corps local, tout espace principal homogène sous un k-tore coflasque Q est trivial. Ainsi $H^1(k, Q) = 0$.

(g) Si k est un corps de nombres, on a des isomorphismes

$$Ш^1(k, Q) \xrightarrow{\simeq} Ш^1(k, T)$$

et

$$Ш^1(k, Q) = H^1(k, Q).$$

Démonstration. Pour (a), voir [6, Prop. 1.3 (1.2.4) p. 158]. Par le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro, tout torseur sur une k-variété intègre sous un k-tore quasitrivial est génériquement scindé. Comme en outre un k-tore quasitrivial est une k-variété k-rationnelle, ceci établit (b). Pour (c), voir [6, Lemma 0.6 (0.6.4)) p. 155]. On a la suite duale de groupes de caractères $0 \to \hat{T} \to \hat{Q} \to \hat{P} \to 0$, qui est une suite exacte de modules galoisiens. Comme $\hat{P}$ est un module de permutation, on a $H^1(h, \hat{P}) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $h \subset g$ et $Ш^2_\omega(g, \hat{P}) = 0$. Une chasse au diagramme immédiate donne alors (d).

Pour tout k-tore T, on a la formule $\mathrm{Br}(T^c)/\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} Ш^2_\omega(k, \hat{T})$ ([6, Prop. 9.5]). L'énoncé (e) résulte alors de (d).

Prouvons (f). Pour un corps local k et un k-tore R, les groupes finis $H^1(k, R)$ et $H^1(k, \hat{R})$ sont en dualité (Tate–Nakayama). Si le k-tore R est coflasque, alors $H^1(k, \hat{R}) = 0$ et donc $H^1(k, R) = 0$.

Démontrons (g). Pour k un corps de nombres et P un k-tore quasitrivial, on a $H^1(k, P) = 0$ et $Ш^2(k, P) = 0$. La suite exacte (a) donne donc $Ш^1(k, Q) \xrightarrow{\simeq} Ш^1(k, P)$. Par ailleurs (f) donne $Ш^1(k, Q) = H^1(k, Q)$. □

Nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.2. [7, Lemme 2.1] *Soient T un k-tore et E un k-espace principal homogène sous T. Soit T^c une k-compactification projective, lisse, équivariante, de T. Le produit contracté $E^c := E \times^T T^c$ est une k-compactification lisse équivariante de E.*

(a) Il existe un isomorphisme naturel de modules galoisiens

$$\mathrm{Pic}(\overline{T}^c) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(\overline{E}^c).$$

(b) Il y a un isomorphisme $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T}^c)) \xrightarrow{\simeq} H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{E}^c))$.

(c) On a des suites exactes

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(T^c) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{T}^c)) \to 0,$$

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(E^c) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{E}^c)) \to H^3(k, \mathbf{G}_m).$$

On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(E^c)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) \to \mathrm{Br}(T^c)/\mathrm{Br}(k) \to H^3(k, \mathbf{G}_m).$$

3. Le tore des éléments de norme 1 d'une extension biquadratique et un tore coflasque associé

Soit K/k une extension biquadratique. On a donc $K = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Soit $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ le k-tore noyau de la norme

$$1 \to T \to R_{K/k}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_{m,k} \to 1.$$

Soit Q le k-tore noyau défini par la suite exacte

$$1 \to Q \to \prod_i R_{k_i/k}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_{m,k} \to 1,$$

où k_i/k parcourt les trois sous-extensions quadratiques de K/k, et où la flèche vers $\mathbf{G}_{m,k}$ est le produit des trois normes d'extensions quadratiques de k.

Proposition 3.1. *(a) Le k-tore Q est coflasque.*

(b) Il existe un diagramme commutatif de groupes de type multiplicatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathbf{G}_{m,k}^2 & \to & Q & \to & T & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & M & \to & \prod_i R_{k_i/k}\mathbf{G}_m & \to & R_{K/k}\mathbf{G}_m & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu_2 & \to & \mathbf{G}_{m,k} & \to & \mathbf{G}_{m,k} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array} \tag{3.1}$$

où les deux colonnes verticales de droite sont celles définissant Q et T, et la flèche $\prod_i R_{k_i/k}\mathbf{G}_m \to R_{K/k}\mathbf{G}_m$ est induite par chacune des inclusions naturelles $R_{k_i/k}\mathbf{G}_m \hookrightarrow R_{K/k}\mathbf{G}_m$.

(c) Notons $N_i = N_{k_i/k}(k_i^\times) \subset k^\times$. La suite exacte

$$0 \to H^1(k,Q) \to H^1(k,T) \to \mathrm{Br}(k) \oplus \mathrm{Br}(k)$$

induite par la suite exacte supérieure s'écrit

$$1 \to k^\times/N_1N_2N_3 \to k^\times/N_{K/k}K^\times \to \mathrm{Br}(k) \oplus \mathrm{Br}(k)$$

la flèche $k^\times/N_1N_2N_3 \to k^\times/N_{K/k}K^\times$ étant induite par $x \mapsto x^2$.

(d) On a $Ш^2_\omega(k,\hat{T}) \xrightarrow{\simeq} Ш^2_\omega(k,\hat{Q}) = \mathbb{Z}/2$.

(e) Pour toute compactification lisse E^c d'un espace principal homogène E de Q, on a $\mathrm{Br}(E^c)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) = \mathbb{Z}/2$.

(f) Si E est un espace principal homogène de T dont la classe dans $H^1(k,T)$ a une image nulle dans $\mathrm{Br}(k) \oplus \mathrm{Br}(k)$, i.e. si cette classe est dans l'image de $H^1(k,Q) \to H^1(k,T)$, alors pour toute compactification lisse E^c de E, on a $\mathrm{Br}(E^c)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) = \mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Notons $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ et $G_i = \mathrm{Gal}(K/k_i)$. On construit le diagramme commutatif de suites exactes de G-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/2 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}[G] & \to & \oplus_i \mathbb{Z}[G/G_i] & \to & \hat{M} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \hat{T} & \to & \hat{Q} & \to & \hat{L} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{3.2}$$

de la façon suivante. L'horizontale supérieure est induite par par la multiplication par 2 sur $\mathbb{Z}$. Sur la ligne horizontale médiane, on utilise les projections évidentes $\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G/G_i]$. Les flèches $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$, resp. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G/G_i]$, envoient 1 sur la somme des éléments de G, resp. de G/G_i. Les autres G-modules sont ceux qui donnent un diagramme commutatif de suites exactes (on verra ci-dessous que la flèche $\mathbb{Z}/2 \to \hat{M}$ est injective).

De la suite verticale médiane on déduit que Q est coflasque. La nullité de $H^1(G, \hat{Q})$ résulte du fait que tout caractère de G trivial sur chaque G_i est trivial. Ceci établit le point (a).

Comme application de groupes abéliens, la flèche $\mathbb{Z}[G] \to \oplus_i \mathbb{Z}[G/G_i]$ est l'homomorphisme $\mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^6$ donné par

$$(a, b, c, d) \mapsto (a+b, c+d, a+c, b+d, a+d, b+c),$$

dont on vérifie que le conoyau est $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2$, le groupe $\mathbb{Z}/2$ étant l'image de $\mathbb{Z}/2 \to \hat{M}$. On voit donc que $\hat{L}$ est sans torsion et de rang 2 sur $\mathbb{Z}$. En prenant la G-cohomologie de la suite horizontale médiane et en utilisant $H^1(G, \mathbb{Z}[G]) = 0$ on voit que $\hat{M}^G$ est de rang 2. Le groupe $\hat{L}^G$ est donc aussi de rang 2. Comme $\hat{L}$ est sans torsion et de rang 2, ceci implique que l'action de G sur $\hat{L}$ est triviale.

Une fois (b) établi, l'énoncé (c) est immédiat. De la suite exacte de groupes de caractères

$$0 \to \hat{T} \to \hat{Q} \to \mathbb{Z}^2 \to 0$$

on déduit $Ш^2_\omega(k, \hat{T}) \xrightarrow{\simeq} Ш^2_\omega(k, \hat{Q})$. De la suite exacte de groupes de caractères

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \to \hat{T} \to 0$$

on déduit

$$Ш^2_\omega(k,\hat{T}) = Ш^2_\omega(G,\hat{T}) = Ш^3_\omega(G,\mathbb{Z}) = H^3(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2,$$

ce qui établit (d).

Tout espace principal homogène E de Q s'écrit

$$(x^2-ay^2)(z^2-bt^2)(u^2-abw^2)=\gamma,$$

avec $\gamma\in k^\times$. Sur l'extension cyclique $k(\sqrt{a})/k$, une telle variété est $k(\sqrt{a})$-rationnelle. D'après la proposition 1.1, on a donc

$$\mathrm{Br}(E^c)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) = H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{E}^c)).$$

D'après la proposition 2.2, on a $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{Q}^c)) \xrightarrow{\sim} H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{E}^c))$. Enfin, d'après ([6, Prop. 9.5]), le groupe $H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{Q}^c))$ est isomorphe au groupe $Ш^2_\omega(k,\hat{Q}) = \mathbb{Z}/2$. Ceci établit (e). Soit E comme en (f), et soit E_1 un espace principal homogène de Q dont l'image par $H^1(k,Q)\to H^1(k,T)$ est la classe de E dans ce dernier groupe. La fibration $E_1\to E$ est un torseur sour $\mathbf{G}^2_{m,k}$, le corps des fonctions de E_1 est donc purement transcendant sur celui de E. Ceci implique que l'application $\mathrm{Br}_{nr}(k(E))\to \mathrm{Br}_{nr}(k(E_1))$ est un isomorphisme, et établit (f). □

4. Un générateur explicite pour le groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes de ce tore coflasque

Théorème 4.1. *Soient F un corps de caractéristique nulle et $a,b,c\in F^\times$. Considérons la F-variété Y définie par l'équation affine*

$$(x^2-ay^2)(z^2-bt^2)(u^2-abw^2)=c.$$

Soit $F(Y)$ son corps des fonctions, et soit Z une F-compactification lisse de Y.

(i) Le quotient $\mathrm{Br}(Z)/\mathrm{Br}(F)$ est nul si l'un des a,b,ab est un carré, il est égal à $\mathbb{Z}/2$ sinon.

(ii) L'algèbre de quaternions $(x^2-ay^2,b)\in\mathrm{Br}(F(Y))$ est non ramifiée sur Z, et elle engendre le groupe $\mathrm{Br}(Z)/\mathrm{Br}(F)$.

Démonstration. Si a, b, ou ab est un carré dans F, alors Y est F-rationnelle, et $\mathrm{Br}(F)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Br}_{nr}(F(Y))$.

Soit $A\subset F(Y)$ un anneau de valuation discrète (de rang 1) de corps des fractions $E=F(Y)$, contenant F. Soit κ le corps résiduel de A et

$$\partial_A : \mathrm{Br}(F(Y))\to H^1(\kappa,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

l'application résidu. On a $\alpha=(x^2-ay^2,b)=(x^2-ay^2,ab)\in\mathrm{Br}(F(Y))$. Si b ou ab est un carré dans κ, alors $\partial_A(\alpha)=0$. Sinon, chacune des extensions $E(\sqrt{b})/E$ et $E(\sqrt{ab})/E$ est non ramifiée et inerte de degré 2 au-dessus de A, donc les entiers $v_A(z^2-bt^2)$ et $v_A(u^2-abv^2)$ sont pairs. De l'équation on déduit $v_A(x^2-ay^2)$ pair (ce qui est évident si a n'est pas un carré dans κ.). Ainsi $\partial_A(\alpha)=0$ pour tout A, et $\alpha\in \mathrm{Br}_{nr}(F(Y))=\mathrm{Br}(Z)$.

Supposons que ni a, ni b, ni ab ne sont des carrés dans F. Montrons que la classe $\alpha\in \mathrm{Br}_{nr}(F(Y))\subset \mathrm{Br}(F(Y))$ n'appartient pas à $\mathrm{Br}(F)$.

Considérons la projection de Y vers l'espace affine $\mathbf{A}^4$ de coordonnées (x,y,z,t). La fibre générique est la conique

$$u^2-abw^2=c(x^2-ay^2)(z^2-bt^2).$$

D'après Witt ([13], Satz, S. 465) (pour la généralisation par Amitsur, voir [8, Thm. 5.4.1]), le noyau de $\mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4))\to \mathrm{Br}(F(Y))$ est d'ordre au plus 2, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions

$$\beta=(c(x^2-ay^2)(z^2-bt^2),ab)\in \mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4)).$$

Pour montrer que $\alpha\in \mathrm{Br}(F(Y))$ n'appartient pas à $\mathrm{Br}(F)$, il suffit donc de voir que la classe $(x^2-ay^2,b)\in \mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4))$ n'appartient pas au sous-groupe engendré par $\mathrm{Br}(F)$ et

$$\beta=(c(x^2-ay^2)(z^2-bt^2),ab)=(c,ab)+(x^2-ay^2,b)+(z^2-bt^2,a).$$

Les hypothèses assurent que $x^2-ay^2=0$ et $z^2-bt^2=0$ sont intègres et que b, resp. a, n'est pas un carré dans le corps résiduel de $x^2-ay^2=0$, resp. $z^2-bt^2=0$.

Le résidu de $(x^2-ay^2,b)\in \mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4))$ en $x^2-ay^2=0$ est la classe de b, qui est non nulle. Donc

$$(x^2-ay^2,b)\notin \mathrm{Br}(F)\subset \mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4)).$$

Le résidu de (x^2-ay^2,b) en $z^2-bt^2=0$ est nul, mais le résidu de β en $z^2-bt^2=0$ est a, qui est non nul. On a donc

$$(x^2-ay^2,b)-\beta\notin \mathrm{Br}(F)\subset \mathrm{Br}(F(\mathbf{A}^4)).$$

La F-variété Y est un espace principal homogène sous le F-tore Q défini par

$$(x^2-ay^2)(z^2-bt^2)(u^2-abw^2)=1.$$

D'après la proposition 3.1 (e), on a $\mathrm{Br}_{nr}(F(Y))/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F))=\mathbb{Z}/2$. Ceci conclut la démonstration. □

5. Une application numérique

Proposition 5.1. *Soient k un corps de nombres et $a,b,c\in k^\times$. Considérons la k-variété Y définie par l'équation affine*

$$(x^2-ay^2)(z^2-bt^2)(u^2-abw^2)=c.$$

Soit Z une k-compactification lisse de Y.

(a) Pour toute place v de k, on a $Y(k_v)\neq\emptyset$.

(b) Soit $\alpha\in$ $\mathrm{Br}(Z)=\mathrm{Br}_{nr}(k(Y))\subset \mathrm{Br}(Y)$ défini par (x^2-ay^2,b). Cet élément engendre $\mathrm{Br}(Z)/\mathrm{Br}(k)$.

(c) S'il existe une place v telle qu'aucun des a, b, ab ne soit un carré dans k_v, alors $Y(k) \neq \emptyset$.

(d) Supposons qu'en toute place v de k l'un au moins des a, b ou ab est un carré dans le complété k_v, alors pour toute famille $\{P_v\} \in \prod_v Z(k_v)$, on a

$$\sum_v \alpha(P_v) = \sum_{v, a \in k_v^{\times 2}} (c, b)_v = \sum_{v, a \notin k_v^{\times 2}} (c, b)_v \in \mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

La nullité de cet élément est alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un k-point sur Z et Y.

Démonstration. (a) La k-variété Y est un espace principal homogène du k-tore Q défini par

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = 1.$$

Ce k-tore est coflasque (Prop. 3.1 (a)). Par la proposition 2.1 (f), on a donc $H^1(k_v, Q) = 0$ pour toute place v de k. L'espace principal homogène Y_{k_v} est donc trivial, ce qui donne (a). Fixons un isomorphisme $Q_{k_v} \simeq Y_{k_v}$, donné par un k_v-point de Y. Cet isomorphisme induit un isomorphisme $\mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q)) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Y))$, et donc

$$\mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q))/\mathrm{Br}(k_v) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Y))/\mathrm{Br}(k_v).$$

L'énoncé (b) a fait l'objet du théorème 4.1. Dans l'isomorphisme ci-dessus, qui est entre groupes d'ordre au plus 2, le générateur défini par $(x^2 - ay^2, b)$ sur Q_v ne peut que s'envoyer sur le générateur $(x^2 - ay^2, b)$ sur Y_{k_v}. Ceci implique que dans l'isomorphisme $\mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q)) \simeq \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Y))$, la classe $(x^2 - ay^2, b) \in \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q))$ s'envoie sur la somme de la classe $(x^2 - ay^2, b) \in \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Y))$ et d'un élément de 2-torsion de $\mathrm{Br}(k_v)$.

(c) Supposons qu'en une place v l'extension $k_v(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ est biquadratique. Alors l'élément $(x2 - ay^2, b)$ engendre $\mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q))/\mathrm{Br}(k_v) = \mathbb{Z}/2$ d'après le théorème 4.1. Il résulte alors de [4, Cor. 1, p. 217] que l'élément $(x2 - ay^2, b)$ de $\mathrm{Br}_{nr}(k_v(Q))$ prend *deux valeurs distinctes* sur $Q(k_v)$. D'après ce qui précède, le même énoncé vaut pour $\alpha_v = (x - ay^2, b) \in \mathrm{Br}_{nr}(k_v(Y))$ sur $Y(k_v)$. D'après (a), il existe un adèle $\{P_w\} \in Z(\mathbf{A}_k)$. L'élément α est d'ordre 2. Chaque $\alpha(P_w)$ vaut 0 ou 1/2 dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si l'on a $\sum_{w \in \Omega} \alpha(P_w) = 1/2$, on change le point P_v en la place v de façon à changer la valeur de $\alpha(P_v)$. La somme devient alors zéro. Il existe donc un adèle $\{P_w\} \in Z(\mathbf{A}_k)$ tel que

$$\sum_{w \in \Omega} \alpha(P_w) = 0.$$

Comme α engendre $\mathrm{Br}(Z)/\mathrm{Br}(k)$, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin pour la compactification lisse Z de l'espace homogène Y sous le k-tore Q. D'après Sansuc [9, Cor. 8.7]), ceci implique $Y(k) \neq \emptyset$.

Démontrons (d). Soit v une place de k. On a l'inclusion $k_v \subset k_v(Y)$. Si $b \in k_v^{\times 2}$, alors $\alpha_v = 0 \in \mathrm{Br}(k_v(Y))$. Si $ab \in k_v^{\times 2}$, alors $\alpha_v = 0 \in \mathrm{Br}(k_v(Y))$. Si $a \in k_v^{\times 2}$, alors $\alpha_v = (c,b)_v \in \mathrm{Br}(k_v(Y))$ est l'image de $(c,b)_v \in \mathrm{Br}(k_v)$. Ceci donne la première égalité. La seconde égalité provient de la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global. Le dernier énoncé résulte alors de (b), et du résultat de Sansuc mentionné ci-dessus. □

Remarque 5.2. Voici une démonstration directe du point (a), communiquée par V. Suresh. Pour toute place v et tout triplet (a,b,c) d'éléments de $k_v^\times$, l'un des trois symboles $(a,c)_v, (b,c)_v, (ab,c)_v$ est nul. En effet leur somme est nulle, et ils valent soit 0 soit 1/2.

Il est ainsi facile de fabriquer des contre-exemples au principe de Hasse classique pour des variétés données par Y. Sur le corps $\mathbb{Q}$, on sait bien qu'en toute place v soit 13, soit 17, soit 13×17 est un carré. On prend $a = 17$, $b = 13$. On cherche c tel que

$$\sum_{v, 17 \notin k_v^{\times 2}} (c,13)_v \neq 0.$$

Ceci donne

$$\sum_{p \neq 2,13,17;\ \ 17 \notin \mathbb{F}_p^{\times 2}} (c,13)_p \neq 0.$$

(Noter que 17 est un carré dans $\mathbb{Q}_2$ et dans $\mathbb{Q}_{13}$). Par la loi de réciprocité, la condition 17 non carré dans le corps fini $\mathbb{F}_p$ se traduit : p est non carré dans $\mathbb{F}_{17}$. Si l'on prend $c = l$ un nombre premier non carré dans $\mathbb{F}_{17}$ et non carré dans $\mathbb{F}_{13}$, la somme se réduit à $(l,13)_l \neq 0$. Le nombre premier $l = 5$ convient. Ainsi :

$$(x^2 - 13y^2)(z^2 - 17t^2)(u^2 - 221w^2) = 5$$

est un contre-exemple au principe de Hasse, et la combinaison des propositions 2.1 et 3.1 montre que

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{13},\sqrt{17})/\mathbb{Q}}(\Xi) = 5^2$$

est un contre-exemple au principe de Hasse.

Pour des calculs similaires, on consultera Sansuc [10].

Bibliographie

[1] R. DE LA BRETÈCHE ET T. BROWNING, *Contre-exemples au principe de Hasse pour certains tores coflasques*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **26** (2014), 25–44.

[2] J.W.S. CASSELS ET A. FRÖHLICH, Exercise 5, p. 360, Algebraic Number Theory, Academic Press, London, 1967.

[3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, R. PARIMALA ET V. SURESH, *Lois de réciprocité supérieures et points rationnels*, `arXiv :1302.2377 [math.AG]`

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET J.-J. SANSUC, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4ème Série **10** (1977) 175–229.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, II. Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications*, Journal of Algebra **106** (1987) 148–205.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari et A. N. Skorobogatov, *Valeurs d'un polynôme à une variable représentés par une norme*, in "Number Theory and Algebraic Geometry", Miles Reid et Alexei Skorobogatov éd., London Mathematical Society Lecture Notes series 303 (2003) 69–89.

[8] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101**, Cambridge University Press (2006).

[9] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **327** (1981) 12–80.

[10] J.-J. Sansuc, *À propos d'une conjecture arithmétique sur le groupe de Chow d'une surface rationnelle*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1981–1982, exposé no. 33 (14 mai 1982).

[11] D. Wei, *On the equation* $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$, `arXiv :1202.4115v2 [math.NT]`.

[12] D. Wei, *The unramified Brauer group of norm one tori*, preprint 2012, `arXiv :1202.4714v3 [math.NT]`.

[13] E. Witt, *Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz*, Math. Z. **39** (1935) 462–467. Gesammelte Abhandlungen, Springer 1998, 63–68.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Université Paris Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
France
E-mail: `jlct@math.u-psud.fr`
URL: `http://www.math.u-psud.fr/~colliot/`