Unverzweigte Kohomologie

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Sud)

Perlen-Kolloquium
Mathematisches Institut der Universität Basel
Am Rheinsprung

Basel, 12. Dezember 2013

Die Brauergruppe

Die Brauergruppe eines Körpers
Definition : Ähnlichkeitsklassen zentral einfacher Algebren (R. Brauer), oder Galois Kohomologiegruppe :
$\mathrm{Br}\ k = H^2(k, \overline{k}_{sep}^{\times})$
$\mathrm{Br}\ k = \cup_n H^2(k, \mu_n)$.

Berechnungen
$\mathrm{Br}\ \mathbb{C} = 0$
$\mathrm{Br}\ \mathbb{F} = 0$ (Wedderburn)
$\mathrm{Br}\ \mathbb{R} = \mathbb{Z}/2$

Residuen

A Bewertungsring, K Fraktionskörper, κ Residuenklassenkörper, Bewertung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$.

$\partial_A : K^\times / K^{\times n} \to \mathbb{Z}/n$
$\partial_A : H^1(K, \mu_n) \to H^0(\kappa, \mathbb{Z}/n)$
$\partial_A : H^2(K, \mu_n) \to H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n)$
$\partial_A : \mathrm{Br}\ K \to H^1(\kappa, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Wenn k perfekt, exakte Folge
$0 \to \mathrm{Br}\ k \to \mathrm{Br}\ k(t) \to \oplus_{P \in P^1} H^1(k_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$
Falls C/k Kurve, eine Komplexe (Reziprozitätsgesetz)
$\mathrm{Br}\ k(C) \to \oplus_{P \in C} H^1(k_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Fall $k = \mathbb{F}$, exakte Folge
$0 \to \mathrm{Br}\ \mathbb{F}(C) \to \oplus_{P \in \mathbb{P}^1} H^1(\mathbb{F}_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$
$0 \to \mathrm{Br}\ \mathbb{F}(C) \to \oplus_{P \in C} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$

Sei K ein Zahlkörper. Wenn v endliche Stelle, dann ist $\mathrm{Br}\ K_v = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Allgemein $\mathrm{Br}\ K_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Satz : *Mann hat eine exakte Folge*

$$0 \to \mathrm{Br}\ K \to \oplus_v \mathrm{Br}\ K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

(Klassenkörpertheorie, enthält Gausssche Reziprozitätsgesetze.)

Im Besonderen : Sei C/K ein Kegelschnitt.

$$\prod_v C(K_v) \neq \emptyset \Longrightarrow C(K) \neq \emptyset.$$

Dabei kann man eine Stelle vergessen.

Die Brauergruppe einer glatten Varietät X über k, $\mathrm{Char}(k) = 0$.
$\mathrm{Br}\ X \subset \mathrm{Br}\ k(X)$.

Reinheitssatz : $H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m) = \cap_{x \in X^{(1)}} \ker \partial_x \subset \mathrm{Br}\ k(X)$.

Woraus folgt : sei X/k glatt, projektiv. Dann ist
$H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}_{nr} k(X) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\ k(X) \to \prod_A H^1(\kappa_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$,
wo A durch alle Bewertungsringen von $k(X)$ mit $k \subset A$ läuft.

Aus der exakten Folge

$$0 \to \mathrm{Br}\ k \to \mathrm{Br}\ k(t) \to \oplus_P H^1(k_P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

folgt leicht :

Falls $\mathrm{Char}(k) = 0$, wenn X/k glatt, projektiv, k-rational, d. h. k-birational zu $\mathbb{P}^d_k$, dann ist

$$\mathrm{Br}\ k \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Br}\ X.$$

Also : Brauergruppe als Werkzeug, um zu entscheiden daß eine Varietät nicht rational ist.

Kann man die Gruppe $\mathrm{Br}\ X$ berechnen ?

Grothendieck, 1968
Exakte Folge (Kummer)

$$0 \to \mathrm{Pic}\, X/n \to H^2_{et}(X, \mu_n) \to \mathrm{Br}\ X[n] \to 0.$$

$k = \overline{k}$

$$0 \to NSX \otimes \hat{\mathbb{Z}} \to H^2_{et}(X, \hat{\mathbb{Z}}(1)) \to T(\mathrm{Br}\ X) \to 0$$

und

$$0 \to NSX \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^2_{et}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \mathrm{Br}\ X \to 0.$$

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho} \to \mathrm{Br}\ X \to H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} \to 0.$$

Wenn X unirational ist, dann ist $b_2 - \rho = 0$.

Beispiele

$X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ kompletter Durchschnitt, $\dim(X) \geq 3$, dann ist $\mathrm{Br}\ X = 0$.
Schlimmer : Für alle $K/\mathbb{C}$, $\mathrm{Br}\ K \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Br}\ X_K$: die Brauergruppe ist universell trivial.

X kubische Hyperfläche, $\dim(X) \geq 3$: ist X rational ?
$\dim(X)=3$. Nie (Clemens-Griffiths). Ist X stabil rational ? Offene Frage.
$\dim(X)=4$: einige sind rational, sind alle rational ?

Problem von Emmy Noether. $G \subset GL_{n,\mathbb{G}}$ endliche Gruppe. Ist $Y = GL_{n,\mathbb{C}}/G$ rational ?
Ein explizites projektives glattes Modell X von Y, mit dem man $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors}$ berechnen könnte, liegt nicht auf der Hand.
Wenn man aber die Reinheit benutzt, dann braucht man nur mit allen Bewertungen (vom Rank 1) im Funktionenkörper $\mathbb{C}(Y)$ zu berechnen. Diese Methode wurde von Saltman eingeführt und von Bogomolov entwickelt.

Satz (Bogomolov 1987) :
$\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(Y)) = \mathrm{Ker}[H^3(G,\mathbb{Z}) \to \prod_{A \subset G,\ A \text{ abelsch}} H^3(A,\mathbb{Z})]$.

Satz (Kunyavskiĭ 2010). Wenn G eine endliche einfache Gruppe ist, dann ist $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(Y)) = 0$.

Satz (Bogomolov 1989, ..., Borovoi 2013). Für $H \subset G$ zusammenhängende lineare Gruppen über $\mathbb{C}$, $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(G/H)) = 0$. Est ist eine offene Frage, ob G/H rational ist.

Sei $f : X \to S$, X und S glatt und projektiv, generische Faser $X_\eta / K = k(S)$ ein Kegelschnitt ohne rationalen Punkt über K. Nach Witt (1934) hat man eine exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z}/2.\alpha \to \mathrm{Br}\ K \to \mathrm{Br}\ X_\eta \to 0.$$

Das kann man benutzen, um $\mathrm{Br}\ X \subset \mathrm{Br}\ X_\eta$ zu berechnen. Grob gesagt, man nimmt nur die Elemente von $\mathrm{Br}\ K$ deren Verzweigung "in der Verzweigung von α" liegt.

So kann man die Beispiele von Artin und Mumford (1974) analysieren.

Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $X/\mathbb{F}$ eine glatte projektive Varietät.

Folgende sind äquivalent :
(i) Die Gruppe $\mathrm{Br}\,(X)$ ist endlich.
(ii) Die natürliche Abbildung $\mathrm{Pic}\,(X) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^2_{et}(X, \mathbb{Q}_l(1))$ ist surjektiv.

Vermutung (Tate) Beide gelten immer.

[Analoge Frage : Endlichkeit von Tate-Shafarevich Gruppen.]

Sei K ein Zahlkörper. Ω die Menge der Stellen von K, dann K_v die Komplettierungen.
Sei X eine projektive glatte Varietät.
Sei $X(\mathbb{A}_K) = \prod_v X(K_v)$.
Diagonale Einbettung $X(K) \subset X(\mathbb{A}_K)$.
Paarung $X(\mathbb{A}_K) \times \mathrm{Br}\, X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
$X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$: Kern dieser Paarung.
Satz (Manin 1970)

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbb{A}_K).$$

Beweis : Reziprozitätsgesetze.
Erklärt viele Gegenbeispiele zum lokal-globalen Prinzip.

Satz (Sansuc 1981, Borovoi 1987)
Sei $U \subset X$, U homogener Raum einer linearen Gruppe G, mit zusammenhängenden geometrischen Trägheitsgruppen, dann liegt $X(K)$ dicht in $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

Vermutung. *Sei X/K geometrisch rational zusammenhängend (im Sinne von Kollár, Miyaoka, Mori). Dann liegt $X(K)$ dicht in $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.*

Ergebnisse von Green und Tao könnten vor kurzem benutzt sein, um dies bei vielen neuen Klassen von Varietäten zu beweisen.

Vermutung. *Sei X/K glatt projektiv. Wenn $X(\mathbb{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, dann ist der Index $I(X) = 1$.*
$I(X) =$ g.g.T. aller $[L : K] < \infty$, L Körper, $X(L) \neq \emptyset$.
Dies gilt für Kurven X/K, wenn die Tate-Shafarevichgruppe der Jacobischen Varietät von X endlich ist.

Satz (Salberger 1988, CT/Swinnerton-Dyer 1994) *Sei X/K ein Kegelschnittfamilie über $\mathbb{P}^1_K$, also eine Fläche mit einer affinen Gleichung*

$$a(t)x^2 + b(t)y^2 + c(t) = 0.$$

Dann gilt die Vermutung für X.
Jüngste Fortschritte : Harpaz, Wittenberg.

Höhere Residuen

A Bewertungsring, K Fraktionskörper, κ Residuenklassenkörper, Bewertung $v : K^{\times} \to \mathbb{Z}$.
Wir hatten
$\partial_A : H^1(K, \mu_n) \to H^0(\kappa, \mathbb{Z}/n)$
$\partial_A : H^2(K, \mu_n) \to H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n)$
$\partial_A : \mathrm{Br}\ K \to H^1(\kappa, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Wir haben auch :
$\partial_A : H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa, \mu_n^{\otimes j-1})$

Sei X/k glatt projektiv, $n > 0, n \neq 0 \in k$, dann $i \geq 0, j \in \mathbb{Z}$. Dann kann man folgende Gruppen definieren

$$H^i_{nr}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j}) := \mathrm{Ker}[H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to \prod_A H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})]$$

wo A durch alle Bewertungsringen von $k(X)$ mit $k \subset A$ läuft.

Die Abbildungen $H^i_{et}(X, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i_{nr}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$ sind im Allgemeinen nicht surjektiv.

Wenn k perfekt, exakte Folge

$$0 \to H^i(k,j) \to H^i(k(t),j) \to \oplus_P H^{i-1}(k_P, j-1) \to H^{i-1}(k, j-1) \to 0$$

wo P alle geschlossene Punkte von $\mathbb{P}^1$ durchläuft.
Es wird leicht gezeigt :
Wenn X k-rational ist, dann ist

$$H^i(k, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j}).$$

Wir bekommen also neue Kriterien für Rationalität.
Wenn wir diese Gruppen berechnen können ....

Für Quadriken Q über einem Körper K und den Kern von

$$H^i(K, \mathbb{Z}/2) \to H^i(K(Q), \mathbb{Z}/2)$$

wurden Sätze im Sinne von dem Satz von Witt bewiesen : Arason 1974 (für H^3) , Merkurjev-Suslin 1983 und später, Rost, Voevodsky, Kahn-Rost-Sujatha, Orlov-Vishik-Voevodsky.
1988 konnten Ojanguren und ich Beispiele von unirationalen Varietäten bauen, die nicht rational sind, und für welche keine der ursprünglichen Methoden (Clemens-Griffiths, Artin-Mumford, Manin-Iskovskikh) von Nutzen ist.
Weiter Ergebnisse : E. Peyre, A. Asok.
Das sind Beispiele, wo man nichttriviale Elemente in $H^i_{nr}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$ baut, das heisst nicht, daß man die Gruppe genau berechnet.

Bei einer Varietät X über $\mathbb{C}$, die eine Faserung $X \to \mathbb{P}^r$ mit generischer Faser eine Quadrik besitzt, kann man versuchen, $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ genau zu berechen. Man kann sogar die Frage untersuchen :
Sei $K/\mathbb{C}$ ein beliebiger Körper. Ist die natürliche Abbidung

$$H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(K(X)/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

ein Isomorphismus ?
Also : ist unverzweigte H^3-Kohomologie universell trivial ?

Sei $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ eine glatte kubische Hyperfläche. Es ist eine offene Frage, ob X rational ist.
Wenn X eine $\mathbb{P}^2$ enthält, dann ist X birational to Y mit einer Faserung $g : Y \to \mathbb{P}^2$, deren generische Faser eine 2-dimensionalen Quadrik ist.

Satz (Auel, CT, Parimala 2013). Nehmen wir an, X enthält eine $\mathbb{P}^2$, ist aber “sehr allgemein”. Dann ist die dritte unverzweigte H^3-Kohomologie von X universell trivial.

Jede kubische Hyperfläche $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ enthält Geraden. X ist also birational zu Y mit einer Faserung $Y \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, deren generische Faser ein Kegelschnitt ist. Da sollte man auch untersuchen, ob die unverzweigte H^3 Gruppe universell trivial ist.

Es gibt eine Gruppe, die alle möglichen unverzweigten Kohomologiegruppen die man denken kann, kontrolliert. Das ist die Chowgruppe der Null-Dimensionalen Zyklen. Allerdings muss man hier auch "universell" denken.

Satz (Merkurjev 2008). Sei X/k eine glatte projektive Varietät, $\mathrm{Char.}(k) = 0$. Äquivalent :
(i) Für alle Körper K/k ist die Gradabbildung $CH_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.
(ii) Für alle Körper K/k sind alle möglichen unverzweigten Modulgruppen (im Sinne von M. Rost) trivial.

Bei $K = k(X)$ ist die Bedingung $CH_0(X_K) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit der "Zerfällung der Diagonale" :
In $CH^d(X \times X)$, die Diagonale ist rational äquivalent zu $Z_1 + Z_2$, wo $Z_1 \subset P \times X$, $P \in X(k)$, und $Z_2 \subset X \times D$ mit $D \subset X$, $D \neq X$.
[Warnung : schon bei Flächen über $\mathbb{C}$ kann dies gelten, ohne das X rational ist.]
Diese Zerfällung der Diagonale wurde von Bloch-Srinivas, ..., Voisin studiert.

In diesem Monat hat C. Voisin folgendes Ergebnis erzielt.
Sei X eine sehr allgemeine doppelte Überlagerung von $\mathbb{P}^3$ mit Verzweigungsort einer quartischen Fläche.
(Das sind Varietäten, die viele gemeisame Eigenschaften mit glatten kubischen Hyperflächen in $\mathbb{P}^4$ haben.)
Dann ist $CH_0(X)$ nicht universell trivial. Im Besonderen ist X nicht stabil rational.
Die Methode ist neu : es wird X zu einer singulären Varietät Y entartet, die eine nichtriviale Klasse in $H^2_{nr}(\mathbb{C}(Y), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ besitzt.

Zurück zur genauen Berechnung von H^3_{nr}

2002 könnte Merkurjev $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ für $X = SL_{n,k}/G$ mit G halbeinfach einfachzusammenhängend berechnen und dann Beispiele geben – allerdings mit G nicht zerfallend – wo $SL_{n,k}/G$ nicht k-rational ist.

Für das Beispiel $\mathbb{C}(Y)$ mit $Y = GL_{n,\mathbb{C}}/G$ und G endlich, könnte E. Peyre 2008 die Gruppe $H^3_{nr}(\mathbb{C}(Y), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ bis auf die 2-Primäre Torsion berechnen. Seine Methode wurde von B. Kahn und Nguyen Thi Kim Ngan (2012) weiter entwickelt.

Warum kann man die Gruppe $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ einigermaßen kontrollieren ?

Es wird eine Komplexe $\mathbb{Z}(2)$ auf dem kleinen étalen Situs von X gebaut.
Multiplikation durch $n > 0$ auf die Komplexe $\mathbb{Z}(2)$ wird Teil eines exakten Dreiecks

$$\mathbb{Z}(2) \to \mathbb{Z}(2) \to \mu_n^{\otimes 2}$$

Die klassische exakte Folge

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$$

wird als ähnliches Dreieck so umgeschrieben :

$$\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}(1) \to \mu_n$$

Für X/k glatt und integral hat man eine fundamentale exakte Folge

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4_{et}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0$$

die auf Arbeiten von Lichtenbaum 1987/1990 und Kahn 1996 zurückzuführen ist.
Die Gruppe $CH^i(X)$ ist die schon erwähnte Chowgruppe der Zyklen der Kodimension i auf X modulo rational Äquivalenz – sehr leicht zu definieren, sehr schwer zu berechnen.

Mittels der obigen exakten Folge zeigt man :
Satz (CT/Voisin 2012, Kahn 2013 , CT/Kahn 2013)
Sei k entweder $\mathbb{C}$ *oder* $\mathbb{F}$*. Sei* l *prim,* $l \neq \mathrm{Char}(k)$*.*
Folgende Gruppen sind endlich und isomorph :

(i) Der Quotient von $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ *durch seine maximal teilbare Untergruppe.*

(ii) Die Torsionsuntergruppe von dem $\mathbb{Z}_l$*-Modul von endlichem Typ*

$$Coker[CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{et}(X, \mathbb{Z}_l(2))].$$

Auf $k = \mathbb{C}$, dies zusammen mit CT/Ojanguren 1988 gibt Beispiele von *unirationalen* Varietäten der Dimension 6 für welche die *integrale* Hodge Vermutung für Zyklen der Kodimension 2 nicht gilt (die Frage war seit 2004 offen).

Auf $k = \mathbb{F}$, Alena Pirutka hat ähnliche Varietäten gebaut, um zu zeigen dass die natürliche Abbildung $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathrm{Gal}}$ nicht unbedingt surjektiv ist (anders als CH^i fur $i = 0, d-1, d$).

Auf $k = \mathbb{F}$, die verallgemeinerte Tate Vermutung besagt, daß die Gruppe

$$Coker[CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{et}(X, \mathbb{Z}_l(2))]$$

immer endlich ist. Mann kann aber die Beispiele von Atiyah und Hirzebruch nachahmen, und Beispiele geben, bei denen die Abbildung nicht surjektiv ist.
Es ist aber eine offene Frage, ob es solche Beispiele gibt, wenn $\dim(X) = 3$, also, wenn die Kodimension 2 Zyklen gleichzeitig 1-Zyklen zind.
Einem Satz von Schoen 1998 nach, könnte man fast vermuten :

$$Coker[CH_1(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{et}(X, \mathbb{Z}_l(d-1))] = 0.$$

Sei $k = \mathbb{F}$ und $X/\mathbb{F}$ eine projektive, irreduzible, glatte Varietät. Es entstehen die folgenden Fragen (CT/Kahn 2013), die zeigen, wie wenig man bis jetzt diese Gruppen berechnen kann.

Vermutung : die Gruppe $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ ist endlich. Dies ist ein Analog der Vermutung : die Brauergruppe $\mathrm{Br}\ X$ ist endlich. Es gibt eine Beziehung (Kahn) zur Vermutung (H. Bass) : die Gruppe $CH^2(X)$ ist endlich erzeugt.

Sei $\dim(X) = 3$. Ist die Gruppe $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ immer teilbar ? immer null ?

Wir haben die Vermutung erwähnt : Sei K ein Zahlkörper. Sei V/K eine Varietät. Wenn $V(\mathbb{A}_K)^{Br} \neq \emptyset$, dann ist $I(V) = 1$. Mann kann natürlich die ähnliche Vermutung über $K = \mathbb{F}(C)$ äussern, und hoffen, das es hier leichter zu beweisen ist.

Sei $f : X \to C$ eine Familie von Flächen parametrisiert durch eine Kurve C über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$. Nehmen wir an, X und C sind glatt und projektiv über $\mathbb{F}$, die Abbildung f ist surjektiv, die generische Faser $V = X_\eta$ über dem globalen Körper $K = \mathbb{F}(C)$ ist glatt und absolut irreduzibel.

Satz (CT-Kahn 2011/2013)
Sei $\dim(X) = 3$.
Wenn
(i) Die Tatesche Vermutung gilt für Divisoren auf X.
(ii) $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$
(iii) $V(\mathbb{A}_K)^{Br} \neq \emptyset$.
dann ist $I(V) = 1$.

Korollar (Analog über $K = \mathbb{F}(C)$ von Satz von Salberger über K Zahlkörper).
Sei $f : X \to C$ eine Familie von Flächen parametrisiert durch eine Kurve C über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$.
Nehmen wir an, die generische Faser über $K = \mathbb{F}(C)$ ist ein Kegelschnittfamilie über $\mathbb{P}^1_K$.
Ist $V(\mathbb{A}_K)^{Br} \neq \emptyset$, dann ist $I(V) = 1$.

Beweis. In diesem Fall ist die Tatesche Vermutung für Divisoren auf X leicht zu beweisen.
Das Verschwinden von $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ dagegen ist ein tiefer Satz von Parimala und Suresh (2012), der für alle 3-dimensionalen Varietäten, die man als Kegelschnittfamilie über einer Fläche darstellen kann, gilt.

Neue lokal-globale Probleme.
Grundkörper : $K = k(C)$ Funktionenkörper einer Kurve über einem p-adischen Köper k.
Gleichungen der Gestalt

$$\mathrm{Norm}_{L/K}(\Xi) = c.$$

Allgemeiner E/K prinzipiell homogener Raum eines algebraischen Torus (kurz : Torsor unter einem K-Torus)

Man kann verschiedene Komplettierungen von K betrachten.
1. Komplettierungen K_P bez. der geschlossenen Punkten P der projektiven Kurve C/k. (Frühere Arbeiten : van Hamel, Scheiderer)
2. Komplettierungen K_v bez. aller diskret Rank 1 Bewertungen von $k(C)$, also einschließlich derjeningen, die die p-adische Bewertung auf dem p-adischen Körper k induzieren. (Arbeiten von Harbater, Hartmann, Krashen, 2009-2012).

Komplettierungen K_P bezüglich der geschlossenen Punkten der projektiven Kurve C/k

Man kann das Reziprozitätsgesetz auf der k-Kurve C benutzen, um eine andere Art von Brauer-Manin Bedingung zu definieren. Man kann die Komplexe

$$H^3(k(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \oplus_{P \in C} H^2(\kappa(P), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$$

benutzen – da $H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Sei X/K eine glatte projektive Varietät. Dann hat man eine Paarung

$$\prod_P X(K_P) \times H^3_{nr}(K(X)/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

und $X(K)$ liegt im linken Kern dieser Paarung.

Satz (Harari, Szamuely 2013). *Wenn X K-birational zu einem Torsor unter einem K-Torus ist, und der linke Kern der obigen Paarung nicht leer ist, dann ist $X(K)$ nicht leer.*

Ihr Beweis zeigt auch : ist der K-Torus K-rational, dann gilt das lokal-global Prinzip für Torsore unter T (Analog eines Satzes für lineare algebraische Gruppen über einem Zahlkörper).

Komplettierungen K_v bez. aller diskret Rank 1 Bewertungen von $K = k(C)$

Satz (Harbater, Hartmann, Krashen 2009; CT, Parimala, Suresh 2010)
Sei G/K eine zuzammenhängende lineare algebraische Gruppe. Sei E ein Torsor unter G. **Sei** G K**-rational.** *Wenn $E(K_v) \neq \emptyset$ für alle v, dann ist $E(K) \neq \emptyset$.*

Satz (CT/Parimala/Suresh 2013)
Es gibt eine zuzammenhängende lineare algebraische Gruppe G und einen Torsor E unter G mit $E(K_v) \neq \emptyset$ für alle v, und $E(K) \neq \emptyset$.

Dabei kann man für G einen Torus nehmen, oder eine halbeinfache Gruppe.
Beim Beweis benutzt man die unverzweigte Brauergruppe von E.
Was neu ist : man betrachtet 2-Dimensionale Modelle von C/k und benutzt lokale Reziprozitätsgesetze in allen Punkten der Kodimension 2 auf diesen Modellen.