H^3 non ramifié et cycles de codimension 2

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Sud)

Méthodes cohomologiques dans la théorie
des groupes algébriques linéaires
Merkur'ev 60
CIRM, Luminy, 31 août – 4 septembre 2015

(version 19 novembre 2015)

À toute variété intègre projective et lisse X sur un corps F on associe des groupes de cohomologie non ramifiés

$$H^i_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \subset H^i_{gal}(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)).$$

Pour $i = 2$, on trouve le groupe de Brauer de X, qui joue un rôle dans des contextes variés (questions de rationalité, conjecture de Tate sur les cycles de codimension 1, obstruction de Brauer-Manin sur les corps globaux)
Le groupe associé à $i = 3$ intervient lui aussi dans divers travaux :
• Questions de rationalité des variétés algébriques (espaces homogènes ; hypersurfaces de Fano)
• Détermination de l'image de diverses applications cycles sur les cycles de codimension 2
• Arithmétique des variétés algébriques sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique

X/F variété , $n \in \mathbb{N}$ inversible dans F, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. On note $\mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes j})$ le faisceau Zariski attaché au préfaisceau Zariski

$$U \mapsto H^i_{et}(U, \mu_n^{\otimes j}).$$

Définition de la cohomologie non ramifiée de X

$$H^i_{nr}(X, \mu_n^{\otimes j}) := H^0_{Zar}(X, \mathcal{H}^i(\mu_n^{\otimes j}))$$

On note $\mathbb{Q}/Z(j) = colim_n \mu_n^{\otimes j}$. Soit X/F lisse.
$H^1_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^1_{et}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
$H^2_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathrm{Br}(X)$
On va s'intéresser à $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Théorème (Bloch-Ogus). Pour X/F lisse connexe, de corps des fonctions $F(X)$, suite exacte

$$0 \to H^i_{nr}(X, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to \oplus_{x \in X^{(1)}} H^{i-1}(F(x), \mu_n^{\otimes j-1}).$$

Conséquence : Pour X/F projective, lisse connexe sur un corps F, le groupe $H^i_{nr}(X, \mu_n^{\otimes j})$ est un invariant F-birationnel, noté $H^i_{nr}(F(X)/F, \mu_n^{\otimes j})$, et ce groupe est réduit à $H^i(F, \mu_n^{\otimes j})$ si X est stablement F-rationnelle.

Pour des corps algébriquement clos $k \subset K$, et X/k projectif lisse, rigidité : $H^i_{nr}(k(X)/k, \bullet) = H^i_{nr}(K(X)/K, \bullet)$ (CT, Jannsen, méthode due à Suslin)

Pour les quotients G/H de groupes linéaires connexes et leurs compactifications lisses, on cherche à établir des “formules” pour les groupes $H^i_{nr}(F(G/H)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$, permettant dans certains cas d'établir la non F-rationalité de G/H.

De nombreux travaux ont été consacrés au cas $i = 2$ (groupe de Brauer).

Sur $F = \mathbb{C}$, la rationalité de G/H est un problème ouvert.

Dans l'exposé, on se place en caractéristique zéro, ou on ignore les questions de p-torsion en caractéristique p.

Descente galoisienne sur les groupes de Chow

Une très longue suite exacte

Soit F un corps de caractéristique zéro, $\overline{F}$ une clôture algébrique, $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.
Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre. On note $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$.

Théorème A (théorème principal) *Supposons le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible. On a une suite exacte*

$$
\begin{aligned}
0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^{\mathfrak{g}} \to \\
\to \mathrm{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\
\to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathfrak{g}}] \to H^1(\mathfrak{g}, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to N(X) \to \\
\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathfrak{g}}] \to H^2(\mathfrak{g}, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))
\end{aligned}
$$

et une suite exacte

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \\
\to N(X) \to \mathrm{Ker}[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].
\end{aligned}
$$

bouts de la suite : Bloch années 1970, CT-Sansuc 1981, CT-Raskind 1985
suite entière : **B. Kahn 1996** (via les $\mathbb{Z}(2)$ de Lichtenbaum), CT-Kahn 2013 et CT 2013

La démonstration repose sur Merkur'ev-Suslin et sur la conjecture de Gersten (Quillen, Bloch-Ogus).
On peut établir cette suite "à l'ancienne", en combinant la cohomologie galoisienne du complexe

$$K_2(\overline{F}(X)) \to \oplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^{\times} \to \oplus_{x \in \overline{X}^{(2)}} \mathbb{Z},$$

dont les groupes d'homologie sont précisément les groupes $H^i(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ (avec $H^2(\overline{X}, \mathcal{K}_2) = CH^2(\overline{X})$ – Bloch, Quillen) et certains résultats de Bruno Kahn.

Dans chacun des cas suivants, l'hypothèse $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible faite dans le théorème A est satisfaite.

• X est une variété projective et lisse sur F telle que $Pic(\overline{X})$ soit sans torsion (preuve utilise Merkur'ev-Suslin et Suslin).
Si X/F est projective et lisse sur F et géométriquement unirationnelle, on a $K_2F = H^0(X, \mathcal{K}_2)$.

• X est un espace principal homogène d'un groupe algébrique semisimple simplement connexe.

• X est un "espace classifiant" convenable, noté BG, d'un F-groupe semisimple G.

• En utilisant le théorème de rigidité et des résultats de CT-Raskind reposant sur les travaux de Bloch, Merkur'ev, Suslin, on déduit du théorème A le :

Théorème B. *Soit X/F projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons $X(F) \neq \emptyset$ et :*
(a) $\overline{X}$ rationnellement connexe, donc $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ est un réseau
(b) $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$
(c) $H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
Alors

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^{\times} \stackrel{\simeq}{\to} H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

et on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathfrak{g}}] \xrightarrow{\alpha} H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\,(\overline{X}) \otimes \overline{F}^{\times}) \to$$
$$\to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to$$
$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathfrak{g}}] \xrightarrow{\beta} H^2(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\,(\overline{X}) \otimes \overline{F}^{\times}).$$

Groupes algébriques linéaires : G**,** E**,** BG

• *X une F-compactification lisse équivariante d'un F-tore T*
La suite exacte du théorème B ressemble à celle obtenue par Blinstein et Merkur'ev.
Soit $1 \to R \to P \to T \to 1$ une résolution flasque, par exemple avec $\hat{R} = \mathrm{Pic}(\overline{X})$. La suite exacte de Blinstein-Merkur'ev est

$$0 \to CH^2(\text{``}BR''\!)_{tors} \to H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes F^\times) \to$$
$$\to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to$$
$$\to (S^2(\hat{R}))^{\mathfrak{g}}/Dec) \to H^2(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes F^\times)$$

A-t-on : $CH^2(BR)_{tors} = CH^2(X)_{tors}$?
$(S^2(\hat{R}))^{\mathfrak{g}}/Dec) = Coker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]^{\mathfrak{g}}$?
On a une surjection $S^2(\hat{R}) \to CH^2(\overline{X})$.

• $X = E$ *espace principal homogène de groupe algébrique semisimple simplement connexe* G/F

On a $K_2F = H^0(E, \mathcal{K}_2)$. On a $Pic(E) = 0$. Le groupe $H^1(\overline{E}, K_2)$ est un réseau, c'est un $\mathfrak{g}$-module de permutation. On a donc $H^1(\mathfrak{g}, H^1(\overline{E}, K_2)) = 0$. Le théorème A donne une suite exacte

$$0 \to H^1(E, \mathcal{K}_2) \to H^1(\overline{E}, \mathcal{K}_2)^{\mathfrak{g}} \to$$
$$\to Ker[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to CH^2(E) \to 0.$$

D'après Panin et Podkopaev, $CH^2(E) = 0$.

Pour G absolument presque simple, $H^1(\overline{E}, K_2)) = \mathbb{Z}$ avec action triviale de $\mathfrak{g}$, l'image de $1 \in \mathbb{Z}$ dans $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est une incarnation de l'invariant de Rost de E.

Le théorème A donne aussi une injection

$$H^3_{nr}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow H^3_{nr}(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

En passant par une compactification lisse de E, laquelle est $\overline{F}$-rationnelle, on obtient :

Théorème *Pour E espace principal homogène d'un groupe semisimple simplement connexe G, l'application $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(F(E)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est surjective.*

D'après Merkur'ev (1999) on a mieux. On a $H^3_{nr}(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et donc $H^3_{nr}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Il existe des exemples de groupes semisimples simplement connexes G/F qui ne sont pas F-rationnels.
Il n'est pas clair si la non-rationalité peut être détectée par un groupe $H^i_{nr}(F(G)/F, j)$.

Question : Peut-on donner des formules pour $H^3_{nr}(F(G)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour G/F semisimple quelconque ?

• $X = BG$ *avec* G/F *semisimple*

G agit linéairement sur un vectoriel de dimension finie V convenable de façon qu'Il y ait un ouvert $U \subset V$ de complémentaire de codimension au moins 3 et que $U \to U/G = X$ soit un G-torseur. On note $X = BG$. On a $K_2F = H^0(X, K_2)$. Série de travaux de Merkur'ev sur le sujet, en liaison avec les invariants cohomologiques de Serre et l'invariant de Rost (Arason ; Kahn, Esnault, Levine, Viehweg).

Supposons G simplement connexe.
En considérant la fibre générique $E/F(X)$ de $U \to X = BG$, fibre qui est un $G_{F(X)}$-torseur, et en appliquant les résultats ci-desssus, on voit que sur tout corps F, le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est fini.

Toujours sous l'hypothèse G simplement connexe, on a $H^1(K, \mathcal{K}_2) = 0$. Le théorème A donne alors les deux informations suivantes :

$$CH^2(X) \hookrightarrow CH^2(\overline{X})$$

et

$$Ker[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$$
$$\stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^{\mathfrak{g}}]$$

Théorème (Merkur'ev 2002, Garibaldi)

Soit G/F semisimple simplement connexe.

(a) Si G est scindé sur F, on a
$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$

(b) Pour G non scindé, on peut avoir
$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$

Plus récemment (2013), Merkur'ev a étudié BG pour G semisimple quelconque. il a calculé $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ pour $X = BG$ et établi une suite exacte à 5 termes qu'il conviendrait de comparer avec la suite donnée par le théorème A.

Il a de plus établi :
Théorème. *Soit G un groupe semisimple sur un corps F algébriquement clos de caractéristique zéro.*
On a $H^3_{nr}(F(BG)/F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) = 0$ dans chacun des cas suivants :
(a) G est simplement connexe ou adjoint.
(b) G est un groupe simple.
(c) $p \neq 2$.

Dans tous ces cas (sauf le cas simplement connexe) il conviendrait d'étudier si l'on a $H^3_{nr}(L(BG)/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ pour tout corps L contenant F.

Pour G un sous-groupe fermé de $GL_{N,\mathbb{C}}$, la rationalité, même stable, de $GL_{N,\mathbb{C}}/G$ reste un problème ouvert.

Géométrie complexe

Le théorème B donne le

Théorème C. *Soit* $X/\mathbb{C}$ *projective, lisse, connexe. Supposons*
(a) X *rationnellement connexe, donc* $\mathrm{Pic}\,(X)$ *est un réseau*
(b) $\mathrm{Br}(X) = 0$
(c) $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
Alors pour tout corps F *contenant* $\mathbb{C}$, *notant* $\overline{F}$ *une clôture algébrique de* F *et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, *on a la suite exacte*

$$0 \to H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to$$
$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}] \xrightarrow{\beta} H^2(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\,(X) \otimes \overline{F}^{\times}).$$

Note : Pour tout $F/\mathbb{C}$, le groupe $\mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}]$ est un invariant birationnel de $X/\mathbb{C}$.

Théorème D (C. Voisin 2014) . *Pour toute hypersurface cubique lisse* $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$*, pour tout corps* F *contenant* $\mathbb{C}$*, on a* $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Pour X contenant un plan et “très générale”, résultat établi par Auel-CT-Parimala 2013. Donnons une démonstration pour X contenant un plan mais autrement quelconque. En utilisant le plan, on voit que X est birationnelle à une fibration en quadriques au-dessus de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Par restriction à la fibre générique $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un sous-groupe de $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(\mathbb{P}^2), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. D'après les résultat de Kahn, Rost et Sujatha sur la cohomologie non ramifiée des quadriques, tout élément de ce dernier groupe vient de $H^3(\mathbb{C}(P^2), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, groupe nul car $\mathbb{C}(P^2)$ est de dimension cohomologique 2.

D'après le théorème C, on a alors un plongement

$$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$
$$\hookrightarrow Coker[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}]$$

Pour les cycles de codimension 2 sur X comme ci-dessus sur un corps algébriquement clos, équivalence rationnelle, algébrique et homologique coïncident. Ainsi $CH^2(X) \to CH^2(X_{\overline{F}})$ est un isomorphisme. Donc $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}$ est surjective. Donc $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

C. Voisin a montré par des méthodes transcendantes que la conjecture de Hodge entière vaut pour les cycles de codimension 2 sur toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$. [Ce résultat est utilisé dans sa démonstration du théorème D.] Une fois ce résultat acquis, on peut l'utiliser pour établir $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ (voir ci-dessous). On peut alors conclure la démonstration du théorème D par la méthode ci-dessus.

En dimension supérieure, des arguments similaires donnent :

Théorème E (2015). *Soit* $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *une hypersurface lisse de degré* $d \leq n$.
(a) Pour $n \geq 6$, *pour tout corps* F *contenant* $\mathbb{C}$, *on a*
$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.
(b) Pour $n = 5$, *on a*
$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \oplus H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Beaucoup de travail reste à faire pour les

Hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$

Pour toute telle X et tout surcorps $F/\mathbb{C}$, on a

$$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \simeq Coker[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}].$$

Ce groupe peut-il être non nul (et donc X non stablement rationnel) ?
Le cas à regarder est celui où F est le corps des fonctions de la jacobienne intermédiaire $J^3(X)$, qui est une variété abélienne paramétrisant les cycles de codimension 2 sur X homologues à zéro. On a une classe évidente dans $CH^2(X_{\overline{F}})^{\mathfrak{g}}$, et on demande si elle vient d'une classe dans $CH^2(X_F)$, définissant un "cycle de codimension 2 universel".

C. Voisin (2014) a montré que l'existence d'un cycle de codimension 2 universel sur X équivaut à $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour tout corps $F/\mathbb{C}$.

Elle a aussi montré l'existence d'hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ pour lesquelles ceci vaut, et pour lesquelles plus généralement $CH_0(X_F) \simeq \mathbb{Z}$ pour tout corps $F/\mathbb{C}$.

Image des cycles de codimension 2 dans diverses cohomologies

Applications cycle pour X/F lisse
$CH^i(X) = \mathbb{H}^{2i}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(i)) \to \mathbb{H}^{2i}_{et}(X, \mathbb{Z}(i))$
(à valeurs dans l'hypercohomologie des complexes $\mathbb{Z}(i)$)

Pour $i = 1$ isomorphisme, groupe est $Pic(X)$
Pour $i = 2$, suite exacte (Lichtenbaum, Kahn, utilise Merkurjev-Suslin)

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4_{et}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

$F = \mathbb{C}$

Soit $X/\mathbb{C}$ projective et lisse.
$H^{2i}_{Hodge}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i)) \subset H^{2i}_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$
$cl_i : CH^i(X) \to H^{2i}_{Hodge}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(i))$
Si cl_i surjectif, on dit que la conjecture de Hodge entière vaut.
Conoyau conjecturalement fini ($\mathbb{Q}$-conj. de Hodge)

Théorème (CT-Voisin) *Le quotient de* $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ *par son sous-groupe divisible maximal est fini et égal au sous-groupe de torsion de* $H^4_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/Im[CH^2(X)]$.

CT-Voisin utilisent la conjecture de Bloch-Kato en degré 3. Bruno Kahn donne une démonstration n'utilisant que la conjecture en degré 2 (Merkur'ev-Suslin).

Un point de départ pour ce résultat était le fait que le groupe $H^4_{Hodge}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))/im[CH^2(X)]$ est un invariant birationnel des variétés projectives et lisses.

$F = \mathbb{C}$ (suite)

(CT-Ojanguren). Il existe X unirationnelle de dimension 6 pour lequel $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$ et donc la conjecture de Hodge entière est en défaut pour les cycles de codimension 2.
(Kollár) Il existe $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ hypersurface pour laquelle $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$ et la conjecture de Hodge entière est en défaut pour les cycles de codimension 2.

Théorème (Voisin, via théorie de Hodge). *Si X est uniréglée de dimension 3, la conjecture de Hodge entière vaut pour les cycles de codimension 2 et donc* $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
Conjecture (Voisin). Sur les variétés rationnellement connexes de dimension quelconque, la conjecture de Hodge entière vaut pour les cycles de dimension 1.
Établi par Voisin modulo la conjecture de Tate pour les surfaces sur un corps fini (via Schoen).

$F = \mathbb{F}$ fini

$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2i}_{et}(X, \mathbb{Z}_l(i))$

Théorème (Kahn, CT-Kahn). *Le quotient du groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ par son sous-groupe divisible maximal est isomorphe au sous-groupe fini qui est le sous-groupe de torsion de $H^4_{et}(X, \mathbb{Z}_l(2))/Im(CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_l)$.*
Pour $X/\mathbb{F}$ projective, ce quotient est conjecturalement fini ($\mathbb{Q}$-conj. de Tate)

$F = \mathbb{F}$ fini (suite)

Théorème (via Schoen). Si la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur les surfaces, alors pour $X/\overline{\mathbb{F}}$ uniréglée de dimension 3, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Questions. Pour $X/\mathbb{F}$ projective et lisse de dimension 3, a-t-on $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$? Est-ce au moins le cas si X est géométriquement uniréglée ? La conjecture de Tate entière vaut-elle pour les cycles de dimension 1 ? [Une version faible de ceci est due à Schoen.]

Théorème (Parimala-Suresh). *Pour X fibrée en coniques sur une surface sur un corps fini, on a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.*

F corps global

F_v le complété en une place v
Pour A un groupe abélien, on note $\widehat{A} = lim_n A/n$.
Pour X/F projective, lisse, géométriquement connexe, on a un complexe

$$\widehat{CH_0(X)} \to \prod_v{}' \widehat{CH_0(X_{F_v})} \to Hom(\mathrm{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où le terme du milieu a ses termes archimédiens éventuels contractés.
On a les conjectures suivantes (CT, Sansuc, Kato, Saito)
Conjecture (E) Ce complexe est exact.
Conjecture (E_1) S'il existe une famille $\{z_v\}_v$ de zéro-cycles de degré 1 orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$, alors il existe un zéro-cycle de degré 1 sur X.

F corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini $\mathbb{F}$

S. Saito a eu l'idée de relier la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur $\mathcal{X}$ à la conjecture (E) pour X/F.

Théorème (CT-Kahn) *Soit $C/\mathbb{F}$ une courbe projective et lisse, $\mathcal{X} \to C$ un morphisme de variétés projectives et lisses, de fibre générique une surface lisse géométriquement intègre $V/k = \mathbb{F}(C)$. Sous la conjecture de Tate pour les cycles de codimension 1 sur $\mathcal{X}$ et sous l'hypothèse $H^3_{nr}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, la conjecture (E_1) vaut pour X.*

Corollaire (via Parimala-Suresh). *Pour $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}(C)}$ une surface fibrée en coniques, la conjecture (E_1) vaut pour $X/\mathbb{F}(C)$.*

H^3 non ramifié et problème local-global sur une courbe sur un corps p-adique

Soit $F = k(C)$ le corps des fonctions d'une courbe intègre projective et lisse sur un corps p-adique k.

Soit Ω l'ensemble des points fermés x de C et F_x le complété de F en x.
On a un complexe

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \oplus H^3(F_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où l'application $H^3(F_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \stackrel{\simeq}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est le résidu en x.

Pour tout corps L contenant F et toute F-variété géométriquement intègre X, tout élément $\alpha \in H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ définit par évaluation une application

$$ev_L : X(L) \to H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

$$P \mapsto < \alpha, P > .$$

Lemme. Pour tout $\alpha \in H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$, pour presque tout $x \in \Omega$, on a $ev_{F_x} = 0$ sur $X(F_x)$.

On dispose donc d'un accouplement

$$\prod_{x \in \Omega} X(F_x) \times H^3_{nr}(F(X)/F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(\{P_x\}, \alpha) \mapsto \sum_x < \alpha, P_x > .$$

Théorème (Harari, Scheiderer, Szamuely).
Soit T un F-tore. L'adhérence de $T(F)$ dans $\prod_{x \in \Omega} T(F_x)$ pour la topologie produit coïncide avec le noyau à gauche de l'accouplement

$$\prod_{x \in \Omega} T(F_x) \times H^3_{nr}(F(T)/F) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Notant X une F-compactification lisse de T, il suffit en fait de considérer l'accouplement sur l'image d'une certaine application

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\,(\overline{X}) \otimes \overline{F}^{\times}) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

(cf. Théorème B)

Théorème (Harari, Szamuely). *Soit T un F-tore, E un espace principal homogène de T et X une F-compactification lisse de E. Supposons $\prod_{x \in \Omega} E(F_x) \neq \emptyset$. Il existe une application naturelle*

$$\beta_E : \mathrm{Sha}^1(F, Pic(\overline{X}) \otimes \overline{F}^{\times}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est nulle si et seulement si $E(F) \neq \emptyset$.

Au vu du théorème B, on peut penser que l'application est compatible avec l'application naturelle vers $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ envoyant un élément du noyau de

$$H^3_{nr}(F(E)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_x H^3_{nr}(F_x(E)/F_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

sur la somme sur $x \in \Omega$ des invariants locaux dans $H^3(F_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.