Циклические накрытия, которые не являются стабильно рациональными

Жан-Луи Кольё-Телэн* и Елена Пирютко †

1 июня 2015

Аннотация

На основе методов, разработанных Колларом, Вуазан, авторами, Тотаро, мы доказываем, что циклическое накрытие $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, n \geq 3$ простой степени p, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ степени mp не является стабильно рациональным при условии $m(p-1) < n+1 \leq mp$. В размерности 3 получаем двойные накрытия $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 4 (Вуазан), а также двойные накрытия $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6 (Бовиль). Мы также получаем двойные накрытия $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6. Метод статьи позволяет получить примеры над числовыми полями.

Résumé

En appliquant des méthodes développées par Kollár, Voisin, nous-mêmes, Totaro, nous montrons qu'un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, n \geq 3$ de degré premier p, ramifié le long d'une hypersurface très générale de degré mp n'est pas stablement rationnel si $m(p-1) < n+1 \leq mp$. En basse dimension, on retrouve le cas des revêtements doubles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, ramifiés le long d'une quartique (Voisin) et des revêtements doubles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ ramifiés le long d'une sextique (Beauville), et l'on obtient aussi les revêtements doubles de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ ramifiés le long d'une sextique. La méthode produit des exemples définis sur un corps de nombres.

*C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France; Chaire Lamé 2015, Université d'État de Saint Pétersbourg, Исследовательская Лаборатория имени П Л Чебышёва, Saint-Pétersbourg, Russie; jlct@math.u-psud.fr

†C.N.R.S., École Polytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau, France; alena.pirutka@polytechnique.edu

1 Введение

Проективное многообразие X над полем k называется стабильно рациональным, если для некоторого n многообразие $X \times \mathbb{P}^n_k$ является рациональным. Существуют стабильно рациональные нерациональные многообразия [1]. В работе [10] Клэр Вуазан вводит метод для доказательства, что многообразие X не является стабильно рациональным, основанный на целом разложении диагонали в группе Чжоу $CH^{dim\,X}(X \times X)$ и специализации. Этот метод позволяет доказать, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлённое над очень общей поверхностью степени 4, не является стабильно рациональным. В работе [4] мы рассматриваем свойство CH_0- универсальной тривиальности, эквивалентное целому разложению диагонали для гладких проективных многообразий, и которое делает метод специализации более гибким, в частности, для случая специализации над кольцом дискретного нормирования с полем вычетов положительной характеристики. Мы доказываем, что при очень общем выборе коэффициентов, гладкая комплексная квартика размерности 3 не является стабильно рациональным многообразием.

Определение 1.1. *Пусть $f : X \to Y$ проективный морфизм многобразий над полем k. Морфизм f называется CH_0- универсально тривиальным, если для любого расширения полей L/k отображение $f_* : CH_0(X_L) \to CH_0(Y_L)$ является изоморфизмом. Если $Y = Spec\,k$ и f – структурный морфизм, то многообразие X называется CH_0- универсально тривиальным.*

В частности, стабильно рациональное многообразие является CH_0-универсально тривиальным.

В работах А. Бовиля [2, 3] рассматриваются случаи двойных накрытий $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлёных над очень общей поверхностью степени 6, а также двойных накрытий $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$, разветвлёных над очень общей гиперповерхностью степени 4. В работе [5], Э. Креш, Б. Хассетт и Ю. Чинкель рассматривают случай некоторых разветвлений на коники.

Б. Тотаро [9] доказал, что очень общая поверхность степени d в $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ не является стабильно рациональной при условиях $d \geq 2\lceil (n+2)/3 \rceil$ и $n \geq 3$; в доказательстве используются результаты Коллара [7, 8] о двойных накрытиях в характеристике 2 и результат о специализации CH_0-универсальной тривиальности [4] 1.14 над кольцом дискретного нормирования с полем частных характеристики ноль и с полем вычетов положительной характеристики. Как замечает Тотаро [9], методы, описанные выше, также возможно применить для более общих накрытий : в этой работе мы продолжаем изучение циклический накрытий в положительной характеристике и доказываем следующий результат (теорема 4.1):

Теорема 1.2. *Пусть X – циклическое накрытие $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, n \geq 3$ степени p, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ степени mp. Предположим, что $m(p-1) < n+1 \leq mp$. Тогда X – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием.*

Как и в работе [9], мы получаем примеры над числовыми полями.

Заметим, что при $n = 3, m = p = 2$ получаем очень общие двойные накрытия $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлённые над квартикой (более общие результаты получены в работе [10]), при $n = 3, m = 3, p = 2$ мы получаем другое доказательство результатов [3].

При условии $mp > n + 1$, Коллар доказал, что рассматриваемые накрытия не являются линейчатыми [6]. Однако, это не даёт результатов о стабильной рациональности, так как существуют стабильно рациональные многообразия размерности 3, которые не являются рациональными [1].

2 CH_0-унивесальная тривиальность сингулярных многообразий

Лемма 2.1. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – целое проективное многообразие над k. Пусть $U \subset X$ открытое подмногообразие. Тогда для любой точки $z \in X(k)$ существует цикл $\xi \in Z_0(U)$ рационально эквивалентный z в $CH_0(X)$.*

Доказательство. Если $X = C$ – целая кривая с нормализацией D, то утверждение следует из того, что группа Пикара полулокальных колец D тривиальна. В общем случае достаточно заметить, что существует целая кривая C, такая, что $z \in C$ и $C \cap U \neq \emptyset$. □

Лемма 2.2. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – целое проективное k-рациональное многообразие. Если X является гладким за исключением конечного числа точек, то X – универсально CH_0-тривиальное многообразие.*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq U \subset X$ открытое подмногообразие, изоморфное открытому подмногообразию $\mathbb{P}^n_k$. Пусть F/k – некоторое расширение полей. Любая гладкая точка $z \in X_F(F)$ рационально эквивалентна в X_F нуль-циклу из $Z_0(U_F)$. Из предыдущей леммы получаем, что это остаётся верным для любой точки X. Аналогично рассуждениям [4] 1.5 получаем, что каждый цикл в $Z_0(X_F)$ рационально эквивалентен циклу Nx, для некоторого N и (фиксированного) $x \in U(k) \subset U(F) \subset X(F)$. □

Лемма 2.3. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле и пусть X – связное проективное многообразие над k. Если каждая приведённая компонента X является k-рациональным многообразием с изолированными сингулярными точками, то X – универсально CH_0-тривиальное многообразие.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущую лемму и [4] 1.3. □

В следующем параграфе мы применим лемму 2.3 для исключительных дивизоров разрешения особенностей. Приведём также более общее утверждение для объединения CH_0-универсально тривиальных многообразий. Далее в этой статье нам понадобится только лемма 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть X – проективное приведённое геометрически связное многообразие над полем k и пусть $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$ разложение X на неприводимые компоненты. Предположим, что*

(i) каждое из многообразий X_i геометрически неприводимо и является CH_0-универсально тривиальным;

(ii) каждое из пересечений $X_i \cap X_j$ либо пусто, либо содержит 0-цикл z_{ij} степени 1.

Тогда многообразие X является CH_0-универсально тривиальным многообразием.

Доказательство. Пусть L/k расширение полей и пусть $z \in CH_0(X_L)$ цикл степени 0. Так как X – геометрически связное, то в дуальном графе геометрических компонент существует полный цикл : существует последовательность индексов $i_1, \ldots i_m$, $1 \leq i_j \leq N$ (где m может быть больше, чем N), такая, что $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, N\}$ и $X_{i_j,L} \cap X_{i_{j+1},L}$ непусто для всех $1 \leq j \leq m$.

Можно разложить $z = \sum z_{i_j}$, где $z_{i_j} \in CH_0(X_{i_j L})$ степени d_j, $\sum d_j = 0$ (с произвольным выбором на пересечениях, также некоторые z_{i_j} могут быть равны нулю). Тогда $z_{i_1} = d_1 z_{i_1 i_2 L}$ в $CH_0(X_{i_1 L})$, откуда $z_{i_1}+z_{i_2} = (d_1+d_2)z_{i_2 i_3 L}$ в $CH_0(X_{i_1 L} \cup X_{i_2 L})$ и т.д., получаем $z = \sum z_{i_j} = (\sum d_i) z_{i_{m-1}, i_m L} = 0$ в $CH_0(X_L)$. $\square$

Замечание. Условие (i) выполняется, если существует разрешение особенностей $\pi_i : \tilde{X}_i \to X_i$, такое, что $\tilde{X}_i$ является CH_0-универсально тривиальным многообразием и все (схематические) слои π_i являются CH_0-универсально тривиальными многообразиями (см. [4], Prop. 1.8.)

3 Циклические накрытия и особенности

Напомним вкратце некоторые свойства циклических накрытий [7].V, [8]. Пусть p – простое число и $f(x_0, \ldots, x_n)$ – однородный многочлен степени mp над полем k. *Циклическое накрытие* $\mathbb{P}^n_k$, разветвлённое над $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, определяется как подмногообразие $\mathbb{P}(m, 1, 1, \ldots, 1)$ заданное условием

$$y^p - f(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Если k – поле характеристики p, то такое циклическое накрытие почти всегда сингулярно, особенности соответствуют критическим точкам f.

Определение 3.1. *Критической точкой многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$ над полем k называется точка P, такая, что $\partial g/\partial x_i(P) = 0 \,\forall i$. Критическая точка P многочлена g называется невырожденной, если определитель $|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(P)|$ не равен нулю. Критической точкой однородного многочлена $f(x_0, \ldots, x_n)$ называется критическая точка одного из многочленов $f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.*

Если k – поле характеристики 2 и n нечётно, то все критические точки многочлена $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ являются вырожденными.

Определение 3.2. *Пусть k – поле характеристики 2 и n нечётно. Критическая точка P многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$ называется почти невырожденной, если*

$$\mathrm{length} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, P}/(\partial g/\partial x_1(P), \ldots, \partial g/\partial x_n(P)) = 2.$$

Для изучения стабильной рациональности нам понадобятся результаты о разрешении особенностей циклических накрытий (см. также [6]).

Лемма 3.3. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть*

$$X:\ y^2 = f(x_1, \ldots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, где $n \geq 2$ чётно и $(0, \ldots, 0)$ – невырожденная критическая точка многочлена f. Пусть $\tilde{X} \to X$ – раздутие точки P. Тогда :

(i) в окрестности точки P накрытие X задаётся условием

$$y^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \ldots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи $g(x_1, \ldots, x_n)$ имеет степень не менее трёх.

(ii) многообразие $\tilde{X}$ является гладким в окрестности исключительного дивизора E и многообразие E является универсально CH_0-тривиальным.

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и $\tilde{X}$ задаётся условием

   $$1 = z_1z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n)$$

   в аффинных координатах $y, z_1, \ldots z_n$.

   Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n)$ делится на y. Исключительный дивизор E раздутия $\tilde{X} \to X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

   $$z_1z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n = 1,$$

   задающее гладкую квадрику. Многообразие $\tilde{X}$ является гладким в каждой точке E (это следует из уравнения $\tilde{X}$).

2. $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для $\tilde{X}$ и E соответственно :

   $$w^2 = z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \ldots, x_1z_n)$$

и

$$z_2 = -(z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n) + w^2,$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным (так как E изоморфно аффинному пространству с координатами $z_3, \ldots z_n, w$). Многообразие $\tilde{X}$ является гладким в каждой точке E.

Таким образом, исключительный дивизор E является гладким рациональным многообразием, следовательно, универсально CH_0-тривиальным (см. [4] 1.5).

□

Лемма 3.4. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть*

$$X:\ y^2 = f(x_1, \ldots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, где $n \geq 3$ нечётно и $(0, \ldots, 0)$ – почти невырожденная критическая точка многочлена f. Пусть $\tilde{X} \to X$ – раздутие точки P. Тогда :

(i) в окрестности точки P накрытие X задаётся условием

$$y^2 = ax_1^2 + x_2x_3 + x_4x_5 + \ldots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \ldots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи $g(x_1, \ldots, x_n)$ имеет степень не менее трёх, и коэффициент b многочлена g при x_1^3 не равен нулю.

(ii) многообразие $\tilde{X}$ является гладким в окрестности исключительного дивизора E и многообразие E является универсально CH_0-тривиальным.

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.7 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и $\tilde{X}$ задаётся условием

$$1 = az_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n)$$

в аффинных координатах $y, z_1, \ldots z_n$.

Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n)$ делится на y. Исключительный дивизор E раздутия $\tilde{X} \to X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

$$az_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \ldots + z_{n-1}z_n = 1.$$

При $a = 0$ получаем произведение $\mathbb{A}^1$ и гладкой квадрики. При $a \neq 0$ получаем неприводимую квадрику, сингулярную в одной точке $z_i = 0, i > 1$ и $az_1^2 = 1$.

Многообразие $\tilde{X}$ является гладким в каждой точке E : сингулярная точка $\tilde{X}$ должна удовлетворять условиям : $z_2 = \ldots = z_n = 0$, $y = 0$, $bz_1^3 = 0$ и $az_1^2 = 1$, что невозможно.

2. $y = wx_2$, $x_i = x_2 z_i$, $i \neq 2$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_2 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для $\tilde{X}$ и E соответственно :

$$w^2 = az_1^2 + z_3 + z_4 z_5 + \ldots + z_{n-1} z_n + \frac{1}{x_2^2} g(x_2 z_1, x_2, x_2 z_3 \ldots, x_2 z_n)$$

и

$$z_3 = -(az_1^2 + z_4 z_5 + \ldots + z_{n-1} z_n) + w^2.$$

Как и в предыдущих вычислениях, многочлен $\frac{1}{x_2^2} g(x_2 z_1, x_2, x_2 z_3 \ldots, x_2 z_n)$ делится на x_2. Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие $\tilde{X}$ является гладким в каждой точке E.

3. $y = wx_1$, $x_i = x_1 z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для $\tilde{X}$ и E соответственно :

$$w^2 = a + z_2 z_3 + z_4 z_5 + \ldots + z_{n-1} z_n + \frac{1}{x_1^2} g(x_1, x_1 z_2, \ldots, x_1 z_n)$$

и

$$a + z_2 z_3 + z_4 z_5 + \ldots + z_{n-1} z_n - w^2 = 0.$$

Многообразие E является неприводимой квадрикой, сингулярной в одной точке $z_i = 0; \forall i$ et $a - w^2 = 0$. Так как коэффициент g при x_1^3 не равен нулю, многообразие $\tilde{X}$ является гладким в каждой точке E (аналогично вычислениям в пункте 1).

Получаем, что многообразие E является непроводимым, имеет только изолированную сингулярную точку $(c : 1 : 0 : \ldots 0)$, где $c^2 = a$, и открытое подмногообразие E является гладким и рациональным. По лемме 2.3, E универсально CH_0-тривиально.

□

Лемма 3.5. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и пусть*

$$X : \; y^p = f(x_1, \ldots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$*, где* $(0, \ldots, 0)$ *– невырожденная критическая точка многочлена* f*. Предположим, что* n *чётно. Тогда :*

(i) *в окрестности точки* P *накрытие* X *задаётся условием* $y^p = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \ldots, x_n)$*, где каждый одночлен в записи* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет степень не менее трёх.*

(ii) *Многообразие* $\tilde{X}$*, полученное в результате раздутия точки* P *и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек с образом* P *в* X*, является гладким в окрестности* $\tilde{X}_P$ *и слой* $\tilde{X}_P$ *является универсально* CH_0*-тривиальным (но, в общем случае,* $\tilde{X}_P$ *не является неприводимым).*

Доказательство. Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Пусть $X' \to X$ – раздутие X в точке P. Достаточно рассмотреть следующие карты :

1. $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \ldots, x_1z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \ldots, x_1z_n)$ делится на x_1) и

$$z_2 = -(z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным. Многообразие X' является гладким в каждой точке E.

2. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и X' задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n).$$

Исключительный дивизор E раздутия $X' \to X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнение E в этой карте :

$$z_1z_2 + z_3z_4 + \ldots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке $(z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$.

Многообразие X' является сингулярным в единственной точке $P' = (y, z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots 0)$ если $p > 3$ и гладким, если $p = 3$. Если $p > 3$, пусть $X'' \to X'$ раздутие X' в точке P'. Аналогично, рассматриваем следующие карты :

(a) $y = z_1 w$, $z_i = t_i z_1$, $i \neq 1$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2} z_1^{p-4} = t_2 + t_3 t_4 + \ldots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{z_1^2} h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \ldots, z_1 t_n),$$

$$t_2 + t_3 t_4 + \ldots + t_{n-1} t_n = 0,$$

где мы обозначили $\frac{1}{y^2} g(yz_1, \ldots, yz_n) = h(y, z_1, \ldots, z_n)$. Заметим, что многочлен $h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \ldots, z_1 t_n)$ делится на z_1^3. Получаем, что E' является гладким и рациональным: произведение $\mathbb{A}^1$ (соответствующего координате w), и многообразия $t_2 = -(t_3 t_4 + \ldots + t_{n-1} t_n)$, и что X" является гладким в каждой точке E' в этой карте.

(b) $z_i = y t_i$, $1 \leq i \leq n$, E' задаётся условием $y = 0$ и X'' задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1 t_2 + t_3 t_4 + \ldots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \ldots, y^2 t_n)$$

в этой карте. Многочлен $\frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \ldots, y^2 t_n)$ делится на y. Исключительный дивизор E' является квадрикой

$$t_1 t_2 + t_3 t_4 + \ldots + t_{n-1} t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие X" является сингулярным в единственной точке $(y, t_1, \ldots, t_n) = (0, \ldots 0)$ если $p > 5$ и гладким, если $p = 5$. Если X" сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие $\tilde{X} \to X$, гладкое в каждой точке над P и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой $\tilde{X}_P$ является связным CH_0-универсально тривиальным многообразием.

$\square$

Лемма 3.6. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$ и пусть*

$$X : \ y^p = f(x_1, \ldots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, *где* $(0, \dots, 0)$ *– невырожденная критическая точка многочлена* f. *Предположим, что* n *нечётно. Тогда :*

(*i*) *в окрестности точки* P *накрытие* X *задается условием* $y^p = x_1^2 + x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n)$, *где каждый одночлен в записи* $g(x_1, \dots, x_n)$ *имеет степень не менее трёх.*

(*ii*) *Многообразие* $\tilde{X}$, *полученное в результате раздутия точки* P *и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек*

с образом P *является гладким в окрестности* $\tilde{X}_P$ *и слой* $\tilde{X}_P$ *является универсально* CH_0*-тривиальным (но, в общем случае,* $\tilde{X}_P$ *не является неприводимым).*

Доказательство. Свойство (*i*) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (*ii*). Пусть $X' \to X$ – раздутие X в точке P. Достаточно рассмотреть следующие карты :

1. $y = wx_1$, $x_i = x_1z_i$, $i \neq 1$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_1 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = 1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$ делится на x_1) и

$$1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0.$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным : произведение $\mathbb{A}^1$ (соответствующего координате w) и гладкой квадрики $1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0$. Многообразие X' является гладким в каждой точке E в этой карте.

2. $y = wx_2$, $x_i = x_2z_i$, $i \neq 2$. Исключительный дивизор E задаётся условием $x_2 = 0$. Получаем следующие уравнения в этой карте для X' и E соответственно :

$$x_2^{p-2}w^p = z_1^2 + z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$$

(где многочлен $\frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$ делится на x_2) и

$$z_3 = -(z_1^2 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие E является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие X' является гладким в каждой точке E в этой карте.

3. $x_i = yz_i$, $1 \leq i \leq n$ и X' задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \ldots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n).$$

Заметим, что многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n)$ делится на y.

Исключительный дивизор E раздутия $X' \to X$ задаётся условием $y = 0$. Получаем уравнения E в этой карте :

$$z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \ldots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке $(z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$.

Многообразие X' также является сингулярным в единственной точке $P' = (y, z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$ если $p > 3$ и гладким в окрестности исключительного дивизора, если $p = 3$. Если $p > 3$, пусть $X'' \to X'$ раздутие X' в точке P'. Аналогично предыдущей лемме, рассматриваем следующие карты :

(a) $y = z_1w$, $z_i = t_iz_1$, $i \neq 1$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_1 = 0$. Получаем следующие уравнения для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2}z_1^{p-4} = 1+t_2t_3+t_4t_5+\ldots+t_{n-1}t_n+\frac{1}{z_1^2}h(z_1w, z_1, z_1t_2, \ldots, z_1t_n),$$

$$1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \ldots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где многочлен $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \ldots, yz_n) = h(y, z_1, \ldots, z_n)$ делится на z_1^3. Получаем, что E' является гладким и рациональным: произведение $\mathbb{A}^1$ (соответствующего координате w) и многообразия, заданного уравнением $1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \ldots + t_{n-1}t_n = 0$. Многообразие X' является гладким в каждой точке E' в этой карте.

(b) $y = z_2w$, $z_i = t_iz_2$, $i \neq 2$, исключительный дивизор E' задаётся условием $z_2 = 0$. Получаем следующие уравнения для X'' и E' соответственно :

$$w^{p-2}z_2^{p-4} = t_1^2+t_3+t_4t_5+\ldots+t_{n-1}t_n+\frac{1}{z_2^2}h(z_2w, z_2t_1, z_2, z_2t_3, \ldots, z_2t_n),$$

$$t_1^2 + t_3 + t_4t_5 + \ldots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где мы обозначили $\frac{1}{y^2}g(yz_1,\ldots,yz_n) = h(y,z_1,\ldots,z_n)$. Получаем, что E' является гладким и рациональным и что X" является гладким в каждой точке E' в этой карте.

(c) $z_i = yt_i$, $1 \leq i \leq n$, E' задаётся условием $y = 0$ и X'' задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \ldots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{y^4}g(y^2t_1,\ldots,y^2t_n).$$

Многочлен $\frac{1}{y^4}g(y^2t_1,\ldots,y^2t_n)$ делится на y. Исключительный дивизор E' является квадрикой

$$t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \ldots + t_{n-1}t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие X" является сингулярным в орестности E в этой карте в единственной точке $(y,t_1,\ldots,t_n) = (0,\ldots 0)$ если $p > 5$ и гладким, если $p = 5$. Если X" сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие $\tilde{X} \to X$, гладкое в каждой точке над P и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой $\tilde{X}_P$ является связным CH_0-универсально тривиальным многообразием.

$\square$

Следующее утверждение даёт ключевые нетривиальные инварианты циклических накрытий.

Напомним, что коэффициенты многочленов $f \in k[(x_0,\ldots,x_n]$ заданной степени параметризуются точками некоторого проективного пространства. Общий выбор коэффициентов f означает, что мы рассматриваем коэффициенты из некоторого непустого открытого (в топологии Зарисского) подмногообразия этого проективного пространства.

Теорема 3.7. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики p и пусть $f(x_0,\ldots,x_n)$ – однородный многочлен степени $mp \geq n+1$, $n \geq 3$. Для общего выбора коэффициентов f выполняются следующие условия:*

(i) все критические точки f являются невырожденными, если $p > 2$ или $p = 2$ и n чётно;

(ii) все критические точки f являются почти невырожденными, если $p = 2$ и n нечётно.

(iii) Если $\tilde{X} \to X$ – разрешение особенностей X, полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то морфизм $\tilde{X} \to X$ является CH_0-универсально тривиальным, $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$ и многообразие $\tilde{X}$ не является CH_0-универсально тривиальным.

Доказательство. Свойства (i) и (ii) следуют из упражнений [7]V.5.7 и 5.11. Предположим, $P = (b, a_1, \dots, a_n)$ – критическая точка f. При помощи линейной замены переменных $y - c, x_i - a_i$, где $c^p = f(P)$ (поле k алгебраически замкнуто) можно предположить, что $P = (0, \dots 0)$. Тогда можно разложить f в сумму линейной части, квадратичной части и части высших степеней: $f = f_1(x_1, \dots x_n) + f_2(x_1, \dots x_n) + f_3(x_1, \dots x_n)$. Так как P – критическая точка, то $f_1 = 0$. Так как поле k алгебраически замкнуто, то каждая квадратичная форма над k может быть представлена в диагональной форме либо суммой квадратов (если характеристика поля не равна 2), либо суммой $\sum x_i y_i$ (регулярная часть) и суммой квадратов. Таким образом, несложно проверить, что условие, что P невырожденная (соотв. почти невырожденная) точка, соответствует разложению в леммах 3.3, 3.5, 3.6 (соотв. 3.4), что выполняется для общего выбора коэффициентов f (см. упражнение [7] V. (5.6.6.3)).

Для доказательства (*iii*), как и в работе Тотаро [9], мы используем [7] V.5.11 для $\mathbb{P}^n_k$, $n \geq 3$ и $L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp)$. Получаем :

1. $K_{\mathbb{P}^n} \otimes L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$,

2. При условии $mp \geq 4$ отображение $H^0(\mathbb{P}^n, L^p) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/m_x^4 \otimes L^p$ сюрьективно для любой замкнутой точки $x \in X$.

Как следует из [7] V.5.7 (см. также [7] V.5.11, [8] Теорема 4.4), для общего выбора $f \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp))$ (в частности, удовлетворяющего (i) и (ii)), если $q : X \to \mathbb{P}^n_k$ – циклическое накрытие $\mathbb{P}^n_k$ степени p, разветвлённое над гиперповехностью $f = 0$ и $\pi : \tilde{X} \to X$ – разрешение особенностей X, полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то $\pi^* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$ является подпучком $\Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}$, в частности, если $mp - n - 1 \geq 0$, то $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$.

Как доказано в работе Тотаро [9] (Лемма 2.2), если $\tilde{X}$ является CH_0-универсально тривиальным, то $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) = 0$. Из лемм 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 следует, что все слои морфизма $\tilde{X} \to X$ являются CH_0-универсально тривиальными, значит, и морфизм $\tilde{X} \to X$ также CH_0-универсально тривиальный (см. [4] 1.8) □

Замечание. Если $n+1 > mp - m$ и многообразие X нормально (что верно, в частности, если f имеет только изолированные критические точки), то X является многообразием Фано : пучок K_X обилен (см. [8] 4.14).

4 Накрытия, которые не являются стабильно рациональными

Теорема 4.1. *Пусть X – циклическое накрытие $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, n \geq 3$ степени p, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ степени mp. Предположим, что $m(p-1) < n+1 \leq mp$. Тогда X – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием. Существует не стабильно рациональное накрытие степени p, разветвлённое над гиперповерхностью степени mp, определённое над числовым полем.*

Доказательство. Пусть $Y : y^p = f(x_0, \ldots, x_n)$ – накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 3.7. Можно выбрать Y таким образом, что коэффициенты многочлена f определены над некоторым конечным полем $\mathbb{F}_q$; так как в теореме 3.7 условие $f = 0$ задаёт очень общую гиперповерхность, то можно также предположить, что гиперповерхность $f = 0$ является гладкой над $\mathbb{F}_q$. Таким образом, существует многочлен H степени mp с коэффициентами в некотором числовом поле, такой, что f является редукцией многочлена H по модулю p, и что накрытие $X : y^p = H(x_0, \ldots, x_n)$ является гладким многообразием. Так как X вырождается в Y и разрешение особенностей $Y' \to Y$, построенное в леммах 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 и теореме 3.7 является CH_0-универсально тривиальным, то $X_{\mathbb{C}}$ не является CH_0-универсально тривиальным многообразием по теореме 3.7 и [4] 1.14(iii). Следовательно, X не является стабильно рациональным. Более того, по построению мы получаем пример над числовым полем. Так как коэффициенты многочленов степени mp с комплексными коэффициентами параметризуются неприводимым многообразием (проективным пространством), то по [4] 2.3 для очень общего выбора такого многочлена, соответствующее накрытие $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ степени p не является CH_0-универсально тривиальным.

□

Замечание. Таким образом, мы получаем, что циклическое накрытие X проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ степени p, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ степени mp не является CH_0-универсально тривиальным. Аналогично работе [4], из этого следует, что X не является рациональным ретрактом. Напомним, что стабильно рациональное многообразие является рациональным ретрактом, однако до сих пор неизвестно, различны ли эти понятия.

Примеры.

1. При $p = 2, n = 3$ и $mp = 6$ получаем другое доказательство результата А. Бовиля [3].

2. При $n = 3, m = p = 2$ получаем двойные накрытия $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, разветвлённые над квартикой (более общие результаты получены в работе Клэр Вуазан [10]).

3. При $p = 2, n = 4$ и $mp = 6, 8$ получаем, что двойное накрытие $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, разветвлённое над очень общей гиперповерхностью степени 6 или 8 не является стабильно рациональным.

4. При $p = 2, n = 5$ получаем примеры для $2m = 8, 10$.

5. При $p = 3, n = 4$ и $mp = 6$ получаем пример многообразия Фано размерности 4, которое не является стабильно рациональным : накрытие степени 3, разветвлённое над очень общей поверхностью степени 6.

6. Результаты о двойных накрытиях $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n = 4, 5$, разветвлённых над квартикой (А. Бовиль [2]), не покрываются результатами теоремы 4.1.

Список литературы

[1] A.Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J.Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*. Ann. of Math, **121** (1985) 283–318.

[2] A. Beauville, *A very general quartic double fourfold or fivefold is not stably rational*, arXiv:1411.3122, готовится к публикации в J. Algebraic Geometry.

[3] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, arXiv:1411.7484.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, готовится к публикации в Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.

[5] B. Hassett, A. Kresch, Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, http://arxiv.org/abs/1503.08497.

[6] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces.* J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 1, 241–249.

[7] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[8] J. Kollár, K. Smith, A. Corti, *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **92**, 2004.

[9] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, arXiv:1502.04040.

[10] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycles*, arXiv:1312.2122 décembre 2013, готовится к публикации в Invent. math.