Introduction aux variétés rationnellement connexes

J.-L. Colliot-Thélène

Ce texte reprend des notes préparées pour l'atelier GAC (Luminy, 13-17 janvier 2003) et pour la conférence Motives, K-theory and Arithmetical Geometry (Sestri Levante, Genova (Gênes), Italie, 28 juin - 3 juillet 2004) Dernières corrections : 26 février 2008.

Variétés rationnellement connexes par chaînes (RCC)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Une k-variété intègre propre X est rationnellement connexe par chaînes si elle satisfait l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) Il existe une k-variété intègre T et un T-schéma $\mathcal{C}$ équipé d'un morphisme $\mathcal{C} \to X$ tels que
(a) les fibres de la projection $\mathcal{C} \to T$ sont des courbes connexes (propres) dont toutes les composantes sont rationnelles.
(b) La projection $\mathcal{C} \times_T \mathcal{C} \to X \times X$ est dominante.

(ii) Pour tout corps algébriquement clos Ω contenant k, une paire générale de points de $X(\Omega)$ est liée par une chaîne de courbes rationnelles.

(iii) Pour tout corps algébriquement clos Ω contenant k, deux points quelconques de $X(\Omega)$ sont liés par une chaîne de courbes rationnelles.

(iv) Il existe un corps algébriquement clos Ω non dénombrable contenant k, tel qu'une paire générale de points de $X(\Omega)$ soit liée par une chaîne de courbes rationnelles.

Exemple : variétés fibrées en coniques au-dessus du plan projectif.

Variétés rationnellement connexes (RC)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Une k-variété intègre propre X est dite rationnellement connexe si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) Il existe une k-variété intègre T et un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \times T \to X$ tels que l'application $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times T \to X \times X$ donnée par $(t, t', z) \to (f(t, z), f(t', z))$ soit dominante. (On peut dans cette définition se contenter d'une application rationnelle f.)

(ii) Il existe une k-variété intègre Y, un point lisse $x \in X(k)$ et un k-morphisme dominant $F : \mathbf{P}^1 \times Y \to X$ envoyant $O \times Y$ sur le point x.

(iii) Il existe une k-variété Y comme en (ii) telle que de plus l'application $\infty \times Y \to X$ induite par F soit dominante.

(iv) Il existe un corps algébriquement clos non dénombrable Ω contenant k tel qu'une paire générale de points de $X(\Omega)$ soit liée par un $\mathbf{P}^1_{\Omega}$.

Exemple : variété unirationnelle.

Variétés séparablement rationnellement connexes (SRC)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Une variété projective lisse connexe X sur k est dite séparablement rationnellement connexe si elle satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) Il existe un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ très libre, i.e. tel que f^*T_X soit ample, i.e. somme de $\mathcal{O}(n_j)$ avec tous les $n_j > 0$. Ceci est encore équivalent à $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-2)) = 0$.

(ii) Il existe une k-variété intègre et un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \times T \to X$ tel que l'application $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times T \to X \times X$ donnée par $(t, t', z) \to (f(t, z), f(t', z))$ soit génériquement lisse.

(iii) Il existe une k-variété intègre Y, un point $x \in X(k)$ et un k-morphisme génériquement lisse $F : \mathbf{P}^1 \times Y \to X$ envoyant $O \times Y$ sur le point x.

(iv) Etant donnés des points $P_1, \ldots, P_r$ de X (et des directions tangentes $l_1, \ldots, l_r$ en ces points), il existe un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ très libre non ramifiée dont l'image passe par chaque p_i (avec la direction l_i). En dimension au moins 3, on peut prendre pour f un plongement.

Théorème (KMM 1992) *Si k est un corps de caractéristique zéro, et X/k est projective et lisse, les trois notions RCC, RC et SRC sont équivalentes.*

Voir Kollár IV.3.10 p. 204 ou Debarre IV.7 p. 104.

L'équivalence de RC et SRC est facile (un morphisme dominant de k-variétés intègres en caractéristique zéro est génériquement lisse). Le passage de RCC à RC utilise des lissages de courbes non libres, il utilise aussi le théorème (**) ci-dessous.

Exemples

Une variété (séparablement) unirationnelle est (S)RC.

Un fibré en coniques sur une variété RCC est RCC.

Une variété de Fano est RCC (en toute caractéristique). C'est un théorème profond de Campana et de KMM (voir Kollár V.2.13 ou Debarre p. 130). La preuve utilise une réduction à la caractéristique p, puis des déformations et lissages de courbes. Une telle variété est donc SRC en car. zéro.

En caractéristique positive, il peut ne pas exister de courbe rationnelle libre sur une variété de Fano, voir Kollár V.5. En d'autres termes, la variété n'est pas séparablement uniréglée, a fortiori n'est-elle pas SRC. Quid de RC ?

En combinant cela avec une technique de spécialisation de Matsusaka, Kollár a donné beaucoup d'exemples de variétés de Fano en caractéristique zéro qui ne sont pas réglées.

Voir aussi l'exemple de Kollár, V.5.19 p. 283 (variété séparablement uniréglée, rationnellement connexe mais pas SRC).

Cohomologie cohérente des variétés SRC

Une variété X projective et lisse qui est SRC satisfait

$$H^0(X, (\Omega^1)^{\otimes m}) = 0$$

pour tout $m \geq 1$ (on a a de fait $H^0(X, (\Omega^p)^{\otimes m}) = 0$ pour tout $m > 0$ et tout $p > 0$).

En caractéristique zéro, la réciproque est conjecturée en toute dimension et connue en dimension 2 (Castelnuovo) et en dimension 3.

En caractéristique zéro, on en déduit, via la théorie de Hodge, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i \geq 1$.

On en déduit, en car. zéro, que X est algébriquement simplement connexe. Cet énoncé vaut en fait en toute caractéristique (Kollár).

L'outil de base : La théorie des déformations

Courbes r-libres

Sur la droite projective, tout fibré vectoriel E est isomorphe à une somme directe

$$E \simeq \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}(a_i),$$

avec chaque $a_i \in \mathbf{Z}$. Cette décomposition n'est pas unique, mais la suite ordonnée des entiers a_i l'est.

Soit r entier. Le fibré E est dit r-libre si dans la décomposition ci-dessus, on a $a_i \geq r$ pour tout i. Cette condition équivaut à $H^1(\mathbf{P}^1, E(-r-1)) = 0$. Elle implique $H^1(\mathbf{P}^1, E(-s)) = 0$ pour $s \leq r+1$.

Pour $r = 0$, on parle d'un fibré semipositif, pour $r = 1$, on parle d'un fibré ample.

Soit X une variété lisse. On dit d'un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ qu'il est r-libre si le fibré f^*T_X est r-libre. Pour $r = 0$, un tel morphisme est dit libre. Pour $r = 1$, un tel morphisme est dit très libre.

Calcul différentiel sur les schémas ***Hom*****.**

On considère les morphismes d'évaluation
$ev : \mathbf{P}^1 \times Mor(\mathbf{P}^1, X) \to X$
$ev : \mathbf{P}^1 \times Mor(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x_0) \to X$
(où x_0 est un point fixe de X).

On s'intéresse à savoir si ces morphismes sont lisses en un point donné $(x, [f])$. On a les résultats suivants (Kollár, p. 115).

Si f est libre, i.e. $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-1)) = 0$, alors $Mor(\mathbf{P}^1, X)$ est lisse en $[f]$, et l'application d'évaluation est lisse au voisinage de $\mathbf{P}^1 \times [f]$.

Si $f(0) = x_0$ et f est très libre, i.e. $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-2)) = 0$, alors $Mor(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x_0)$ est lisse en $[f]$, et l'application d'évaluation est lisse le long de $(\mathbf{P}^1 \setminus 0) \times [f]$.

On a une sorte de réciproque. Soit Y une variété lisse intègre.

Si $F : \mathbf{P}^1 \times Y \to X$ est génériquement lisse (ce qui équivaut à F dominant en car. zéro), alors il existe un ouvert non vide U de Y tel que $F_y : \mathbf{P}^1 \to X$ soit libre si $y \in U$.

Si $F : \mathbf{P}^1 \times Y \to X$ est génériquement lisse (ce qui équivaut à F dominant en car. zéro), et si F envoie $0 \times Y$ sur $x_0 \in X$, alors il existe un ouvert non vide U de Y tel que $F_y : \mathbf{P}^1 \to X$ soit très libre si $y \in U$.

Voir Kollár pages 117 et 118.

On en déduit le théorème suivant (KMM, Kollár II.3.11 p. 118; Debarre IV.14 p. 94 et IV.20, p. 98).

Théorème (**) *Supposons k algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective et lisse connexe.*

(a) Il existe une union dénombrable Y de fermés propres Y_i de X telle que pour toute extension L/k, tout L-morphisme $\mathbf{P}^1_L \to X_L$ d'image non contenue dans Y_L est libre.

(b) Soit $x_0 \in X(k)$. Il existe une union dénombrable $Z = Z(x_0)$ de fermés propres Z_i de X telle que pour toute extension L/k, tout L-morphisme $f : \mathbf{P}^1_L \to X_L$ d'image non contenue dans Z_L et tel que $f(0) = x_0$ est très libre.

Ce théorème est utilisé pour montrer qu'en caractéristique zéro, une variété RCC est SRC. Voir Kollár V. 3. 10 p. 204 et Debarre §IV.7.

Théorème *Soit* (S, O) *un schéma pointé, soit* k *le corps résiduel en* O.
On se donne :
un morphisme propre et plat $\mathcal{Y} \to S$
un morphisme lisse $\mathcal{X} \to S$
Un sous-schéma fermé $B \subset \mathcal{Y}$
Un S*-morphisme* $g : B \to \mathcal{X}$. *Soit* $g_O : B_O \to \mathcal{X}_O$ *le morphisme induit sur les fibres en* O.
Un k*-morphisme* $f_O : Y_O \to \mathcal{X}_O$, *qui induit sur* $B_O \subset Y_O$ *le morphisme* g_O.
On suppose Y_O *sans composante immergée.*
On suppose $H^1(Y_O, f_O^* T_{\mathcal{X}_O} \otimes I_{B_O}) = 0$, *où* I_{B_O} *est l'idéal de* $B_O \subset \mathcal{X}_O$.
Alors le S*-schéma* $Mor_S(Y, \mathcal{X}, g)$ *est lisse au-dessus de* S *au point* $[f]$.

Corollaire *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un morphisme étale* $h : T \to S$ *et un point fermé* O' *de* S *de corps résiduel* k *avec* $h(O') = O$, *et un* T*-morphisme* $\mathcal{Y} \times_S T \to \mathcal{X} \times_S T$ *induisant* $g_T : B \times_S T \to \mathcal{X} \times_S T$ *et induisant* f_0 *au-dessus du point* O'.

Le premier cas intéressant est le suivant. On considère une k-variété X projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $S = \mathbf{A}^1_k$. On prend ici $\mathcal{X} = X \times_k S$, si bien que l'on ignorera $\mathcal{X}$ et fera référence seulement à X. On considère un arbre C de courbes rationnelles lisses, globalemement défini sur le corps k. Les intersections géométriques sont transverses. On considère un sous-schéma fini (fermé) réduit B du lieu lisse de C. On se donne un k-morphisme $f : C \to X$. On a donc le morphisme $f_B : B \to X$ induit. On souhaite déformer ce morphisme en un morphisme de la droite projective vers X, dont l'image passe encore par les points images de f_B.

Par éclatement de $\mathbf{P}^1_k \times_k S$ en des points fermés situés au-dessus du point $O \in \mathbf{A}^1(k)$, on peut aisément fabriquer une surface $\mathcal{Y}$ et un morphisme $\mathcal{Y} \to S$ tel que toute fibre $\mathcal{Y}_s$ avec $s \neq O$ soit isomorphe à $\mathbf{P}^1_{k(s)}$, et que la fibre $\mathcal{Y}_O$ au point O, soit isomorphe à C.

En outre on peut définir un S-plongement $B \times_k S$ dans $\mathcal{Y}$ tel que la fibre de ce plongement en $s = O$ soit le plongement $B \subset C$.

On considère alors le problème de déformation : trouver un S-morphisme $\mathcal{Y} \to X$ induisant $f : C \to X$ au-dessus du point $O \in S$ et tel que le composé $B \times_k S \to \mathcal{Y} \to X$ coïncide avec le morphisme composé $B \times_k S \to B \to C \to X$. Soit $I_B \subset \mathcal{O}_C$ l'idéal définissant $B \subset C$. Sous l'hypothèse clé
$$H^1(C, f^* T_X \otimes I_B) = 0,$$
il existe un morphisme étale $q : T \to S$ qui induise un isomorphisme $O' = q^{-1}(O) \to O = \mathrm{Spec}(k)$, et un morphisme $\mathcal{Y} \times_S T \to X$ qui induise $C \to X$ au-dessus du point $O' \in S$ et tel que le le composé $B \times_k T \to \mathcal{Y} \times_S T \to X$ coïncide avec le morphisme composé $B \times_k T \to B \to C \to X$.

De plus la condition d'annulation du H^1, qui vaudra encore dans un voisinage, va donner des informations sur la r-liberté des morphismes $\mathbf{P}^1 \to X$ obtenus.

Un exercice de base

Supposons pour simplifier le corps de base k algébriquement clos. Soit $C = \cup_{i=0}^n C_i$, chaque C_i étant isomorphe à la droite projective, et C_{r+1} coupant $C^r := \cup_{i=0}^r C_i$ transversalement en un seul point p_{r+1}. La courbe C^r est un fermé de C^{r+1}, et on a la suite exacte de faisceaux
$$0 \to \mathcal{O}_{C_{r+1}}(-p_{r+1}) \to \mathcal{O}_{C^{r+1}} \to \mathcal{O}_{C^r} \to 0.$$
En utilisant ces suites, on établit le résultat suivant ;

Si E est un fibré vectoriel sur C tel que $H^1(C_0, E_{C_0}) = 0$ et $H^1(C_i, E_{C_i}(-1)) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors $H^1(C, E) = 0$.

Un exemple de courbe C du type ci-dessus est donné par un peigne : toutes les courbes C_i, $i \geq 1$ rencontrent C_0, elles ne se rencontrent pas entre elles.

Une application sur un corps algébriquement clos

Etablissons l'énoncé suivant, typique des résultats de Kollár-Miyaoka-Mori.

Proposition *Soient k un corps algébriquement clos et X/k une variété projective lisse, connexe. Supposons que par tout point $x \in X(k)$ il existe un morphisme très libre $\mathbf{P}^1 \to X$ d'image passant par x. Alors pour tout ensemble fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de $X(k)$ il existe un morphisme très libre $\mathbf{P}^1 \to X$ d'image contenant les x_i.*

Démonstration Pour chaque x_i, on peut trouver une variété Y_i et un morphisme $F_i : \mathbf{P}^1 \times Y_i \to X$ génériquement lisse tel que $O \times Y_i$ ait pour image x_i et que chaque $F_y : \mathbf{P}^1 \to X$ soit très libre. Soit $U \subset X$ un ouvert contenu dans l'intersection des images des F_i. Soit $g_0 : \mathbf{P}^1 \to X$ un morphisme très libre dont l'image rencontre U. On peut choisir des points p_i distincts sur $g_0(\mathbf{P}^1) \cap U$, chaque p_i étant distinct de x_i. Le point p_i est de la forme $F_i(t_i, y_i)$ pour (t_i, y_i) convenables (le corps k est algébriquement clos). On considère alors le morphisme $g_i : \mathbf{P}^1 \to X$ défini par $g_i(t) = F_i(t, y_i)$.

On considère alors le peigne évident $C = C_0 \cup \cup_{i=1}^n C_i$. Soit $c_i = C_0 \cap C_i$. On définit $G : C \to X$ comme le morphisme qui sur $C_0 = \mathbf{P}^1$ est donné par g_0 et qui sur $C_i = \mathbf{P}^1$ est donné par g_i. Soit $d_i \neq c_i$ un point de C_i d'image x_i par le morphisme g_i.

Le fibré vectoriel $E = G^* T_X \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^n d_i)$ sur C vérifie $E_{C_0} = g_0^* T_X$ et $E_{C_i} = g_i^* T_X \otimes \mathcal{O}(-1)$ pour $i \geq 1$. Comme chaque g_i est très libre, on a $H^1(C_i, g_i^* T_X(-s)) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$, et $s \leq 2$. Les hypothèses de l'exercice de base appliqué à E sont satisfaites, on a donc

$$H^1(C, G^* T_X \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^n d_i)) = 0,$$

et l'on peut appliquer la technique décrite ci-dessus, en prenant pour $B \subset C$ le schéma formé de la réunion des d_i.

Il existe une courbe lisse connexe pointée (S, O), une surface lisse $\mathcal{Y}$ équipée d'un morphisme propre $\mathcal{Y} \to S$ dont les fibres $\mathcal{Y}_s$ pour $s \neq O$ sont des courbes lisses rationnelles, dont la fibre $\mathcal{Y}_O$ est C, et un morphisme $h : \mathcal{Y} \to X$ qui induit $C \to X$ au-dessus de $s = O$, tel que le composé $B \times_k T \to \mathcal{Y} \times_S T \to X$ coïncide avec le morphisme composé $B \times_k T \to B \to C \to X$.

Pour chaque $s \in T$, $s \neq 0$, dans un voisinage de s, on a $H^1(\mathbf{P}^1, h_s^*(T_X)(-n)) = 0$. Donc pour $n \geq 2$, les morphismes h_s sont très libres.

Un exemple sur le corps des réels

Proposition (Araujo-Kollár, p. 26/27) *Soit $X/\mathbf{R}$ une $\mathbf{R}$-variété projective et lisse géométriquement connexe. Soit $P \in X(\mathbf{R})$. S'il existe un $\mathbf{C}$-morphisme libre $f : \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \to X_{\mathbf{C}}$ passant par P, alors il existe un $\mathbf{R}$-morphisme $g : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to X$ libre.*

Démonstration On considère la surface $\mathcal{Y}$ fibrée en coniques définie par

$$x_0^2 + x_1^2 - t x_3^2 = 0$$

dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}[t]}$. Les fibres pour $t > 0$ sont isomorphes à $\mathbf{P}^1_R$, celles pour $t < 0$ sont des coniques lisses sans point réel. Soit C la fibre au-dessus de $t = 0$. La $\mathbf{C}$-courbe $C_{\mathbf{C}}$ est la réunion de deux $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ conjugués, soient C_1 et C_2, se coupant transversalement en un unique point, soit M. Soit $\varphi : C_1 \simeq \mathbf{P}^1$ un isomorphisme.

Le morphisme f définit un morphisme $f_1 : \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \to X_{\mathbf{C}}$ envoyant un point convenable $x_1 \in C_1$ sur P. La conjugaison complexe σ définit un $\mathbf{C}$-morphisme $f_2 : \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma : \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \to X_{\mathbf{C}}$. Son image est la courbe "conjuguée" de $f(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}})$ dans $X_{\mathbf{C}}$. Le point $\sigma(x_1)$ est envoyé sur $\sigma(P) = P$. On définit alors un $\mathbf{C}$-morphisme h de la réunion des deux $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ en utilisant f_1 sur le premier $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ et f_2 sur le second. Comme le premier morphisme envoie x_1 sur P et le second $\sigma(x_1)$ aussi sur P, on peut ainsi définir un morphisme $F_{\mathbf{C}}$ de $C_{\mathbf{C}}$ vers $X_{\mathbf{C}}$. On vérifie que ce morphisme est invariant par la conjugaison complexe, et donc définit un $\mathbf{R}$-morphisme F de C vers X, envoyant le point M sur P.

On a (sur les complexes) la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{C_1}(-M) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C_2} \to 0,$$

qu'on tensorise avec $F^*(T_X)$, ce qui donne :

$$0 \to f_1^*(T_X)(-M) \to F^*(T_X) \to f_1^*(T_X) \to 0,$$

Comme les morphismes $C_1 \to X_{\mathbf{C}}$ et $C_2 \to X_{\mathbf{C}}$ sont libres, on a $H^1(C_i, f_i^*T_X(-1)) = 0$ et a fortiori $H^1(C_i, f_i^*T_X) = 0$. On a donc $H^1(C, F^*(T_X)) = 0$. Ce calcul est fait sur $\mathbf{C}$, mais il implique l'annulation du dernier groupe sur $\mathbf{R}$.

On a en fait un peu plus. Soit M_2 un point de C_2, et tensorisons la suite exacte par $h^*(T_X)(-M_2)$. On trouve

$$0 \to f_1^*(T_X)(-M) \to F^*(T_X)(-M_2) \to f_1^*(T_X)(-M_2) \to 0.$$

On a donc $H^1(C, h^*(T_X)(-M_2)) = 0$.

Le théorème général de déformation permet alors de déformer C, sur $\mathbf{R}$: il existe un morphisme étale de $\mathbf{R}$-courbes $S \to \mathrm{Spec}(\mathbf{R}[t])$, avec un point réel $O \in S$ au-dessus du point $t = 0$, et un morphisme $h : \mathcal{Y} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[t])} S \to X$ induisant sur $\mathcal{Y}_0 = C$ le morphisme F. Comme le morphisme $S \to \mathrm{Spec}(\mathbf{R}[t])$ est étale, il induit un isomorphisme local (théorème des fonctions implicites) de $S(\mathbf{R})$ vers $\mathbf{A}^1(\mathbf{R})$ au voisinage de O. Les point dans ce voisinage correspondant à des points avec $t > 0$ ont des fibres isomorphes à $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$. On obtient donc des R-morphismes $h_t : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to X$.

On peut trouver une section de la projection $\mathcal{Y}_{\mathbf{C}} \to \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t])$ passant par le point $M_2 \in C_2$. Cette section définit une section de $\mathcal{Y} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[t])} S \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to S \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, c'est-à-dire un certain diviseur horizontal L. L'annulation de $H^1(C, h^*(T_X)(-M_2))$ et la semicontinuité du H^1 assure alors $H^1(\mathcal{Y}_s, h_t^*T_X(-1)) = 0$ dans un voisinage (Zariski) de O. On trouve donc beaucoup de $\mathbf{R}$-morphismes libres $h_t : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to X$.

Discuter ce qui se passe quand $X/\mathbf{R}$ est géométriquement rationnellement connexe, mais $X(\mathbf{R}) = \emptyset$. Montrer que par toute paire de points complexes conjugués il passe une courbe de genre 1 définie sur $\mathbf{R}$ (remarque de CT, 2003).

Problème ouvert : existence de coniques lisses.

Théorème (Kollár, 1999) *Soient k un corps et X/k une variété projective et lisse, géométriquement connexe, SRC. Soit $x_0 \in X(k)$. Il existe alors une k-courbe lisse connexe T, un point $O \in T(k)$, une k-surface lisse connexe Z équipée d'un k-morphisme $\pi : Z \to T$, telle que la restriction de Z au-dessus de $T \setminus O$ soit isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times (T \setminus O)$, une section σ de π, et un k-morphisme $h : Z \to X$ tels que $F \circ \sigma$ envoie T sur x_0. De plus, pour toute extension de corps K/k et tout $t \in T(K)$ différent du point O_K, le morphisme $h_t : \mathbf{P}^1_K \simeq Z_t \to X_K$ est un morphisme très libre et x_0 est l'image d'un K-point de $\mathbf{P}^1_K$.*

On dit qu'un corps est "large" (ou "fertile") s'il a la propriété suivante : si une k-variété lisse connexe possède un k-point, alors les k-points sont Zariski-denses sur cette variété. Il suffit de requérir cette propriété pour les courbes. Il suffit d'ailleurs d'exiger pour cette dernière la condition que si elles possèdent un k-point, alors elles en possèdent au moins un autre.

On trouve aussi dans la littérature la notion de corps k pseudo-algébriquement clos (PAC) : toute k-variété lisse géométriquement intègre possède un k-point.

Tout corps PAC est fertile.

Exemple de corps PAC : les corps séparablement clos ; une extension algébrique infinie d'un corps fini.

Exemple de corps fertile : le corps des réels, un corps local usuel (extension finie de $\mathbf{Q}_p$ ou de $\mathbf{F}_q((t))$, les variantes henséliennes de ces derniers, plus généralement le corps des fractions d'un anneau de valuation hensélien (corps résiduel quelconque), un corps k dont le groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe, par exemple tout corps réel clos.

Corollaire *Soient k un corps fertile et X/k une variété projective et lisse, géométriquement connexe, géométriquement SRC. Soit $x_0 \in X(k)$. Il existe un k-morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ tel que $f(0) = x_0$.*

Démonstration du théorème L'hypothèse que X/k est géométriquement SRC assure l'existence d'un ouvert lisse non vide dans le k-schéma $Mor(\mathbf{P}^1, X, 0 \to x_0)$. Toute k-variété lisse possède un point dans une extension finie séparable de son corps de base. Il existe donc K/k finie séparable et un K-morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1_K \to X_K$, envoyant le point 0 sur x_0.

Soit $M \in \mathbf{P}^1_k$ un point fermé de corps résiduel K, qu'on peut supposer distinct du point 0.

Dans la surface $\mathbf{P}^1_k \times_k \mathbf{A}^1_k$, on dispose du diviseur $M \times \mathbf{A}^1_k$. On a aussi la section donnée par $t \mapsto (0, t)$ qui définit un autre diviseur.

Soit $S = \mathbf{A}^1_k$. Soit $\mathcal{Y}$ l'éclaté de $\mathbf{P}^1_k \times_k \mathbf{A}^1_k$ en le point (M, O). Soit $B \subset \mathcal{Y}$ la réunion du diviseur horizontal Δ transformé propre du diviseur $M \times \mathbf{A}^1_k$ et du diviseur horizontal défini par la section $t \mapsto (0, t)$, diviseur qui est une section Δ_0 de la projection $\mathcal{Y} \to S$. Géométriquement, Δ se décompose en une union finie disjointe de sections Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ de $\mathcal{Y} \to S$.

La fibre spéciale $\mathcal{Y}_O$ est, géométriquement, un peigne $C = C_0 \cup \cup_{i=1}^n C_i$ de manche C_0.

On définit un k-morphisme $f_O : C \to X$: le manche C_0 du peigne est envoyé sur le point x_0. Le K-morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1_K \to X_K$, envoyant le point 0 sur x_0 permet de définir des morphismes géométriques très libres $f_i : C_i \to X_{k_s}$ envoyant le point $q_i = C_0 \cap C_i$ sur x_0. Ces divers morphismes se recollent en un k-morphisme qu'on notera f_O. On notera qu'ici, à la différence du cas ci-dessus, l'une des composantes de ce morphisme, à savoir $C_0 \to X$ est loin d'être libre : c'est une application constante.

On se place maintenant sur k_s. Soit $p_i = \Delta_i \cap C_i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Considérons le fibré vectoriel $E = f_O^* T_X(-p_0 - p_1 \ldots - p_n)$ sur $C = \mathcal{Y}_O$.

La restriction de E sur C_0 est isomorphe à $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1))^d$, où d est la dimension de X. On a donc $H^1(C_0, E_{C_0}) = 0$.

Pour $i \geq 1$, on a $E_{C_i} = f_i^* T_X(-1)$. Comme f_i est très libre, on a $H^1(C_i, f_i^* T_X(-2)) = 0$, et donc $H^1(C_i, E_{C_i}(-1)) = 0$.

On peut alors appliquer le lemme de base et conclure $H^1(\mathcal{Y}_O, f_O^* T_X(-p_0 - p_1 \ldots - p_n)) = 0$. A fortiori a-t-on $H^1(\mathcal{Y}_O, f_O^* T_X(-p_0)) = 0$. On peut alors appliquer le théorème général de déformation en prenant pour B la section Δ_0.

On trouve une courbe lisse connexe T, étale au-dessus de S, telle que l'image réciproque de O par $T \to S$ soit un unique k-point O', que l'on ait un morphisme $g : \mathcal{Y} \times_S T \to X$ envoyant $\Delta_0 \times_S T$ sur x_0, et que pour tout point $t \in T$ différent de O', le morphisme $g_t : \mathbf{P}^1_{k(t)} \simeq \mathcal{Y} \times_S T \times_T k(t) \to X_{k(t)}$ soit très libre.

Ce dernier point est à justifier. Il résulte du fait que $H^1(\mathcal{Y}_O, f_O^* T_X(-p_0 - p_1 \ldots - p_n)) = 0$, qui par semicontinuité garantit $H^1(\mathbf{P}^1_{k(t)}, g_t^* T_X(-n-1)) = 0$ dans un voisinage ; comme $n + 1 \geq 2$, ceci assure que g_t est très libre.

Théorème (Kollár 1999) *Soit k un corps local (réel ou p-adique). Soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement SRC. Les classes de R-équivalence sur $X(k)$ sont ouvertes, et il n'y a qu'un nombre fini de telles classes. Pour $k = \mathbf{R}$, ces classes coïncident avec les composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.*

Démonstration Comme $X(k)$ est compact, et que $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est connexe, les deux dernières assertions résultent de l'assertion que les classes sont ouvertes.

Soit $P \in X(k)$. D'après le théorème précédent il existe $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ très libre avec $f(0) = P$ et $f(\infty) = Q \neq P$.

D'après les propriétés différentielles des morphismes très libres, le morphisme d'évaluation

$$\mathbf{P}^1_k \times_k Mor(\mathbf{P}^1_k, X, \infty \mapsto Q) \to X$$

est lisse sur un ouvert contenant $(\mathbf{P}^1 \setminus \infty) \times [f]$. Soit donc Y un ouvert de type fini du produit tel que la restriction de l'évaluation à Y soit lisse. Par le théorème des fonctions implicites, l'image de $Y(k)$ dans $X(k)$ est ouverte. Cette image contient $f(0)$. Tout point de cette image est de la forme $g(n)$ avec $g : \mathbf{P}^1 \to X$ et $g(\infty) = Q$. Ainsi $g(n)$ est R-équivalent à Q, qui est R-équivalent à P : l'ensemble des points R-équivalents à P est un ouvert.

On peut faire mieux.

Proposition *Soient $f_1 : \mathbf{P}^1_k \to X$ et $f_2 : \mathbf{P}^1_k \to X$ très libres, tels que $f_i(0) = P_i$ et $f_i(\infty) = Q$. Si le corps k est fertile, il existe un k-morphisme très libre $g : \mathbf{P}^1_k \to X$ tel que P_1 et P_2 soient dans $g(\mathbf{P}^1(k))$.*

Démonstration Avec la méthode usuelle, il suffit de montrer que si l'on prend pour $C = C_1 \cup C_2$ la courbe union de deux $\mathbf{P}^1_k$ se coupant transversalement en un k-point R, si l'on note $A_i \in C_i$ le point correspondant à $0 \in \mathbf{P}^1(k)$, si l'on considère le k-morphisme f de C vers X combiné des deux f_i, coïncidant sur chaque point ∞, on a $H^1(C, f^*T_X(-A_1 - A_2)) = 0$. C'est clair avec la suite exacte

$$0 \to f_1^*T_X(-R - A_1) \to f^*T_X(-A_1 - A_2) \to f_2^*T_X(-A_2) \to 0$$

et le fait que f_1 et f_2 sont très libres (il suffirait de libre pour f_2)).

A partir de là, on devrait démontrer que si k est un corps local usuel et si X est une k-variété projective lisse connexe géométriquement SRC si l'on considère la relation entre les k-points définie sur $X(k)$ par le fait d'être liés par un $\mathbf{P}^1_k$ très libre, alors cette relation est une relation d'équivalence dont les classes sont ouvertes.

Kollár a plus récemment montré que dans la situation ci-dessus, et plus généralement sur un corps fertile, si deux points d'une variété SRC sont R-équivalents, alors il existe un k-morphisme très libre f de $\mathbf{P}^1_k$ dans X tel que ces deux points appartiennent à $f(\mathbf{P}^1(k))$.

Cela implique en particulier que si $U \subset X$ est un ouvert de Zariski, alors l'application $U(k)/R \to X(k)/R$ est injective – et en fait une bijection.

Si k est un corps local usuel, on en conclut que $U(k)/R$ est fini.

Kollár (prépublication 2002) a un exemple très intéressant de variété SRC sur des corps “raisonnables” pour lesquels la R-équivalence n'est pas finie.

Il construit des quartiques lisses X/k en beaucoup de variables avec $X(k)/R$ infini sur chacun des corps suivants : $\mathbf{Q}(t), \mathbf{Q}((t)), \mathbf{R}(t), \mathbf{R}((t))$. Il peut même fabriquer un tel exemple sur un corps réel clos (la réunion des $\mathbf{R}((t^{1/n}))$). On peut aussi fabriquer de tels exemples sur $\mathbf{Q}_p(t), \mathbf{Q}_p((t))$.

Variétés rationnellement connexes sur un corps fini ;
Variétés rationnellement connexes avec bonne réduction sur un corps p-adique.

Dans ce chapitre, j'essaye de donner une idée de la démonstration des théorèmes suivants (Kollár et Szabó 2003).

Théorème A *Il existe une application $\Phi : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que si $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{F}}$ est une $\mathbf{F}$-variété projective lisse géométriquement connexe SRC sur le corps fini $\mathbf{F}$, si $S \subset X$ est un sous-schéma fini lisse si le cardinal du corps fini $\mathbf{F}$ est plus grand que $\Phi(\deg(X), \dim(X), \deg(S))$, alors il existe un $\mathbf{F}$-morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}} \to X$ passant par S.*

Pour simplifier l'exposé, je donne seulement la démonstration du théorème plus faible suivant.

Théorème B *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{F}}$ une $\mathbf{F}$-variété projective lisse géométriquement connexe SRC sur le corps fini $\mathbf{F}$. Soient $P_1, P_2 \in X(\mathbf{F})$. Sur tout extension algébrique infinie $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$, il existe un morphisme très libre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}'} \to X'$ dont l'image contient P_1 et P_2.*

Corollaire du théorème B *Pour $X/\mathbf{F}$ comme dans le théorème B, le groupe de Chow réduit $A_0(X)$ est nul.*

Ce dernier énoncé peut être vu comme un corollaire d'un théorème général de Kato et Saito : pour toute $\mathbf{F}$-variété X géométriquement connexe projective et lisse, le groupe $A_0(X)$ est dual du groupe des invariants sous Galois de $H^1(X_{\mathbf{F}_s}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Si X est SRC, alors ce dernier groupe est nul (Kollár).

Mais l'intérêt de la présente démonstration est qu'elle permet de traiter les variétés sur un corps p-adique avec bonne réduction, ce que ne permettait pas la méthode de Kato et Saito (mais voir la note ci-dessous). On a en effet le :

Théorème *Soit A l'anneau des entiers d'un corps p-adique k (extension finie de $\mathbf{Q}_p$). Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et lisse à fibres géométriquement connexes, à fibre spéciale une variété Y SRC sur le corps fini $\mathbf{F}$. Soit X/k la fibre générique. Alors $A_0(X) = 0$.*

Démonstration Par des arguments de trace standard, en utilisant le théorème B, on se ramène à établir l'énoncé suivant : si deux k-points P_1 et P_2 de $X(k)$ ont des réductions p_1 et p_2 dans $Y(\mathbf{F})$ distinctes (on peut assurer ce dernier point par l'astuce de remplacer X par $X \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}}$), et si p_1 et p_2 sont liés par un $f : \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}} \to Y$ très libre, alors P_1 et P_2 sont liés par un morphisme très libre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}} \to X$.

Soit $T = \mathrm{Spec}(A)$. On considère le schéma $\mathcal{Y} = \mathbf{P}^1_A$ et le sous-schéma $B \subset \mathbf{P}^1_A$ défini par les deux points 0 et ∞. On considère le S-schéma $Mor_S(\mathbf{P}^1_S, \mathcal{X}, 0 \to P_1, \infty \to P_2)$, avec l'abus que P_1 et P_2 sont identifiés à des points de $\mathcal{X}(A)$.

Ce schéma possède un point lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}) \subset \mathrm{Spec}(A)$, donné par $[f]$. (Le fait que f soit très libre assure la lissité). Ce point lisse se relève, l'anneau A étant hensélien.

Remarque Avant le travail [Ko/Sz], le théorème n'était connu qu'en dimension 2, via des méthodes de K-théorie algébrique (Bloch, CT/Sansuc, CT 1983). Dans ce cas, on établit la nullité de $A_0(X)$ sur tout corps parfait de dimension cohomologique 1.

Note ajoutée en 2007 : en 2006/2007, S. Saito et K. Sato ont développé toute une méthode pour étudier le groupe de Chow des zéro-cycles de variétés sur les corps p-adiques. Leur résultat donne le théorème ci-dessus, à la p-torsion près.

Corollaire du théorème A *Soient k un corps de nombres et X/k une k-variété projective et lisse, géométriquement connexe, géométriquement rationnellement connexe. Alors pour presque toute place v de k, l'ensemble $X(k_v)/R$ consiste en un élément.*

Le cas particulier suivant avait été établi par P. Gille : celui où $X = X_G$ est un modèle projectif et lisse d'un quotient V/G, avec G groupe fini agissant linéairement et fidèlement sur un k-vectoriel V. Dans ce cas, le résultat de Gille est un peu plus précis : si l'ordre de G est premier à la caractéristique résiduelle de k_v, alors $X_G(k_v)/R$ consiste en une seule classe.

Démonstration du théorème B

Proposition 1 *Soient k un corps et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, géométriquement SRC. Soit $P \in X(k)$. Il existe alors une k-variété géométriquement intègre et lisse V_P et un k-morphisme $F : V_P \times_k \mathbf{P}^1 \to X$ tel que*

(i) $F(V_P \times 0) = P$.

(ii) Le morphisme $V_P = V_P \times \infty \to X$ induit par F est lisse.

(iii) Pour tout point schématique $r \in V_P$, le morphisme $F_r = \mathbf{P}^1_{k(r)} \to X_{k(r)}$ est très libre.

L'énoncé suivant est beaucoup plus délicat à établir. Il s'agit d'un théorème de Lefschetz pour les variétés SRC.

Proposition 2 *Soient k un corps et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, géométriquement SRC. Il existe une k-variété U lisse et géométriquement intègre et un k-morphisme $F : U \times_k \mathbf{P}^1_k \to X$ possédant la propriété suivante : pour toute k-variété géométriquement intègre Y et tout k-morphisme génériquement lisse $h : Y \to X$, il existe un ouvert dense $U^h \subset U$ tel que*

(i) Pour tout point $u \in U^h(\bar{k})$, le produit fibré de $\bar{Y} \to \bar{X}$ et de l'application composée $u \times_{\bar{k}} \mathbf{P}^1_{\bar{k}} \to \bar{U} \times_{\bar{k}} \mathbf{P}^1_{\bar{k}} \to \bar{X}$ est irréductible.

(ii) Pour tout $r \in U$, le morphisme $F_r = \mathbf{P}^1_{k(r)} \to X_{k(r)}$ est très libre.

(iii) En outre, si la dimension de X est au moins 3, alors pour tout $r \in U$, le morphisme $F_r = \mathbf{P}^1_{k(r)} \to X_{k(r)}$ est un plongement.

C'est un énoncé subtil. Lorsque X possède un k-point, il y a une variante avec un point base. Cette variante donne un U tel que toute compactification lisse de U possède un k-point. Si le corps k est fertile, alors $U(k) \neq \emptyset$. Ceci mène à une démonstration du théorème de Harbater selon lequel pour tout groupe fini G et tout corps fertile k il existe un revêtement génériquement galoisien $C \to \mathbf{P}^1_k$ de groupe G, où C/k est une k-courbe géométriquement intègre. On consultera à ce sujet un article de l'auteur, un article de Moret-Bailly, et deux articles de Kollár.

On a une variante sur $k = \bar{k}$. Soit V un ouvert non vide de X. Il existe un morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1 \to X$ tel que si $V \to U$ est un revêtement fini étale connexe, alors son image réciproque sur $f^{-1}(U)$ l'est aussi. Si la dimension de X est au moins 3, on peut prendre pour f un plongement.

Soit alors X une k-variété projective et lisse, SRC, et soient $P_1, P_2 \in X(k)$.

On dispose (sur le corps k) de V_1/k lisse et géométriquement intègre et de $F_1 : V_1 \times \mathbf{P}^1 \to X$ génériquement lisse, tels que $V_1 \times 0 \mapsto P_1$ et $V_1 \times \infty \to X$ est dominant.

On dispose (sur le corps k) de V_2/k lisse et géométriquement intègre et de $F_2 : V_2 \times \mathbf{P}^1 \to X$ génériquement lisse, tels que $V_2 \times 0 \mapsto P_2$ et $V_2 \times \infty \to X$ est dominant.

On dispose de U/k lisse géométriquement intègre et de $F : U \times \mathbf{P}^1_k \to X$ avec la propriété de la Proposition 2.

On considère le produit fibré Z_1 de $F : U \times \mathbf{P}^1 \to X$ avec $F_{1,\infty} : V_1 \to X$ (qui est dominant), en restreignant un peu U pour que pour tout $u \in U$, le le produit fibré de $\bar{Y} \to \bar{X}$ et de l'application composée $u \times_{\bar{k}} \mathbf{P}^1_{\bar{k}} \to \bar{U} \times_{\bar{k}} \mathbf{P}^1_{\bar{k}} \to \bar{X}$ est irréductible, si bien que la projection $Z_1 \to U$ est à fibres géométriques intègres.

Notons que la projection de $U \times \mathbf{P}^1 \times V_1$ sur $U \times V_1$ induit un isomorphisme entre

$$Z_1 = \{(u, t, v_1) \;\; F(u, t) = F_1(v_1, \infty)\} \subset U \times \mathbf{P}^1 \times V_1$$

et le fermé

$$\{(u, v_1) \;\; F(u, t) = F_{1,v_1}(\infty)\} \subset U \times \mathbf{P}^1 \times V_1,$$

car t est déterminé par (u, v_1).

On obtient de même le fermé géométriquement intègre $Z_2 \subset U \times V_2$.

On considère alors le produit fibré $Z_1 \times_U Z_2$. C'est l'ensemble des $\{u, v_1, v_2)$ tels qu'il existe t, t' (uniques) satisfaisant $F(u, t) = F_1(v_1, \infty)$ et $F(u, t') = F_2(v_2, \infty)$.

Ce produit fibré est géométriquement intègre car la fibre au-dessus de tout point de U l'est.

Un triplet $u \in U, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ situé sur ce produit fibré et défini sur un corps L définit un triplet de courbes C_1, C_0, C_2, toutes L-rationnelles, C_i passant par P_i, la courbe C_0 rencontrant C_1 et C_2 en des points L-rationnels.

En résumé : il existe une k-variété géométriquement intègre W qui paramétrise les k-peignes $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ de manche C_0 avec chaque C_i k-rationnelle passant par P_i, les courbes C_0, C_1, C_2 étant très libres.

Si le corps k est PAC, par exemple si c'est une extension algébrique infinie d'un corps fini, alors la variété possède un point k-rationnel : ceci établit que P_1 et P_2 sont R-équivalents.

Mais on peut faire mieux. On est dans une situation de déformation où tout se passe bien car les courbes C_i sont très libres. On se place sur le corps $k(W)$. Par déformation, on trouve une courbe lisse $T/k(W)$ avec un $k(W)$-point, tel qu'un point schématique de corps résiduel L correspond à un morphisme de $\mathbf{P}^1_L$ vers X_L très libre, passant par P_1 et P_2. On applique cela à F, le corps résiduel de T. Le corps F est une extension de $k(W)$, le corps $k(W)$ étant algébriquement clos dans F. Le corps k est algébriquement clos dans $k(W)$. Ainsi k est algébriquement clos dans F. On écrit F comme corps des fractions d'une k-algèbre intègre A de type fini. Quitte à localiser A, on a un A-morphisme $\mathbf{P}^1_A \to X_A$ passant par P_1 et P_2 définissant des $\mathbf{P}^1 \to X$ très libres.

Si le corps k est PAC, par exemple si c'est une extension algébrique infinie d'un corps fini, alors la variété $\mathrm{Spec}(A)$ possède un point k-rationnel : ceci établit que P_1 et P_2 sont liés par un $\mathbf{P}^1_k$ très libre.

Pour avoir des résultats fins comme le théorème A, il faut contrôler un peu le degré des courbes formant les peignes, et utiliser des composantes du schéma de Hilbert.

Autres résultats de Kollár

Théorème C *Soient A un anneau de valuation discrète hensélien, $S = \mathrm{Spec}(A)$, K le corps des fractions de A, k le corps résiduel. Soit $\mathcal{X}/S$ projectif et lisse, de fibre spéciale Y/k SRC, de fibre générique X/K. Alors*

(i) L'application de spécialisation $X(K)/R \to Y(k)/R$ est une bijection.

(ii) Si k est parfait, l'application de spécialisation

$$CH_0(X) \to CH_0(Y)$$

est un isomorphisme.

Théorème D *Soit k un corps fertile. Soit X/k une variété SRC. Si les points $x_1, \ldots, x_n \in X(k)$ sont tous dans la même classe de R-équivalence, il existe un morphisme très libre $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ (plongement si la dimension de X est au moins 3) tel que chaque x_i soit dans $f(\mathbf{P}^1(k))$.*

Ainsi :

(a) Si deux points sont R-équivalents, alors ils sont liés directement par un $\mathbf{P}^1$.

(b) Si $U \subset X$ est un ouvert, l'application $U(k)/R \to X(k)/R$ est injective – on peut voir en fait qu'elle est une bijection. Si k est un corps local usuel, $U(k)/R$ est fini.

La démonstration de ces théorèmes, qu'on va esquisser ci-dessous, passe par une opération introduite par Graber, Harris et Starr dans leur travail sur la généralisation du théorème de Tsen.

Le problème est le suivant : étant donnée une courbe C, par exemple rationnelle, mais non libre, on voudrait pouvoir la déformer. Sur un corps algébriquement clos, il y a une méthode qui consiste à rajouter des “queues” à la courbe, de façon à forcer les conditions d'annulation de groupes de cohomologie qui permettent de déformer. Cette méthode fut utilisée sur un corps algébriquement clos par KMM dans la démonstration du fait que RCC implique SRC. Mais la méthode utilisée là était inadaptée au cas des corps non algébriquement clos, car on avait un mauvais contrôle du nombre de queues à rajouter.

Kollár vit que la nouvelle technique de Graber, Harris et Starr, utilisant l'adjonction de queues et la théorie de la déformation des courbes, plutôt que la déformation des morphismes, s'adapte bien au cas des corps non algébriquement clos.

Voici le type de résultat obtenu par Kollár (on ajoute des queues pour rendre une courbe déformable).

Théorème E *Soient k un corps, X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe, géométriquement SRC. Soit C une courbe projective, réduite, localement intersection complète. Soit $S \subset C$ un fermé fini lisse. Soit $g : C \hookrightarrow X \times_k \mathbf{P}^n_k$ un plongement. Il existe alors un peigne $C^* \hookrightarrow X \times_k \mathbf{P}^n_k$ de manche $g(C)$ tel que*

(a) Le faisceau normal N_{C^*} sur C^* est engendré par ses sections globales.

(b) La courbe C^* est lisse en $g(S)$.

(c) $H^1(C^*, O_{C^*}(-g(S)) \otimes N_{C^*}) = 0$.

(La condition (a) permet de lisser aux points d'intersection du manche avec les autres courbes.)

Montrons comment le théorème E implique le théorème C.

On se ramène immédiatement à démontrer : si deux points P, Q de $X(K)$ ont des réductions p, q directement liées (par $\mathbf{P}^1_k \to Y$), alors les deux points P, Q sont directement liés.

Soit $f : \mathbf{P}^1_k \to Y$ avec $f(0) = p$ et $f(\infty) = q$. Soit $F : \mathbf{P}^1_k \to X \times \mathbf{P}^1_k$ définit par $x \mapsto (f(x), x)$. C'est un plongement. On peut donc appliquer le théorème E. On trouve un peigne $C^* \subset Y \times_k \mathbf{P}^1_k$ passant par p, q, lisse en ces points, et satisfaisant $H^1(C^*, \mathcal{O}_{C^*}(-p-q)) = 0$.

On éclate $\mathcal{X} \times_S \mathbf{P}^1_S$ le long de $P \times 0$ et $Q \times \infty$. Soit $\mathcal{Z}$ le schéma obtenu. Au-dessus de K, on a deux diviseurs exceptionnels E_P et E_Q.

Soit $\mathcal{H}/S$ le schéma de Hilbert des sous-schémas de dimension 1 de $\mathcal{Z}$. On trouve $\sigma : S \to \mathcal{H}$ relevant C^*. La projection $\mathcal{H} \to S$ est, à cause de l'annulation du H^1, lisse au k-point correspondant à C^*. Comme A est hensélien, on peut donc relever ce k-point en un S-point de $\mathcal{H}$. Ce S-point définit un K-point, donc une courbe C_K de $X \times_K \mathbf{P}^1_K$. Cette courbe est de genre zéro et réduite. Elle vérifie $(C_K.E_P) = 1$ et $(C_K.E_Q) = 1$. On voit ainsi que P et Q sont R-liés.

Montrons comment le théorème E implique le théorème D.

Commençons par considérer deux points $x, y \in X(k)$ R-liés. Il existe donc $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ avec $f(0) = x$ et $f(\infty) = y$. Quitte à remplacer X par $X \times_K \mathbf{P}^1_k$, on peut supposer que f est un plongement.

En utilisant les schémas de Hilbert, la théorie de la déformation, et le théorème E, on trouve une courbe très libre $g : \mathbf{P}^1_k \hookrightarrow X$ telle que $g(0) = x$ et $g(\infty) = y$.

Supposons ensuite qu'on ait x et y R-liés, et y et z R-liés. Par l'argument précédent, on trouve un $\mathbf{P}^1$ très libre passant par x et y, et un autre $\mathbf{P}^1$ très libre passant par y et z. On vérifie (par l'argument de base) qu'on peut déformer la réunion des deux $\mathbf{P}^1$ en un $\mathbf{P}^1$ très libre passant par x et z. Etc. Ainsi on voit que si deux points sont R-équivalents, ils sont en fait R-liés par un $\mathbf{P}^1$ très libre.

Si maintenant $x_1, \ldots, x_n$ sont tous R-équivalents entre eux, on choisit un autre point y R-équivalent, on trouve des $C_i = \mathbf{P}^1_k$ très libres reliant y à x_i, on fixe un peigne $C = C_0 \cup \cup_{i=1}^n C_n$ on envoie C_0 sur le point y, et comme on a vu dans un argument antérieur, on peut déformer ce peigne en un $\mathbf{P}^1$ très libre passant par chacun des x_i.

Bibliographie

C. Araujo et J. Kollár, Rational curves on varieties, *Higher dimensional varieties and rational points* (Budapest, 2001), 13–68, Bolyai Soc. Math. Stud., 12, Springer, Berlin, 2003.

J.-L. Colliot-Thélène, Rational connectedness and Galois covers of the projective line, Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 1, 359–373.

O. Debarre, Higher-dimensional algebraic geometry, Universitext, Springer (2001).

O. Debarre, Variétés de Fano. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97. Astérisque No. 245 (1997), Exp. No. 827, 4, 197–221.

O. Debarre, Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A.J. de Jong), Séminaire Bourbaki 905 (Juin 2002). Astérisque No. 290 (2003), Exp. No. 905, ix, 243–266.

P. Gille, R-équivalence sur les G-revêtements sur les corps locaux non archimédiens, J. Number Theory 91 (2001), no. 2, 284–292.

T. Graber, J. Harris and J. Starr, Families of rationally connected varieties, JAMS 16 (2003) 57–67.

Graber, Harris, Mazur et Starr, Rational connectivity and sections of families over curves, Ann. Sc. École Normale Sup. 38 (2005) 671–692.

T. Graber, J. Harris, B. Mazur et J. Starr, Arithmetic questions related to rationally connected varieties, October 2002

A. J. de Jong et J. Starr, Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point. Amer. J. Math. 125 (2003), no. 3, 567–580.

A. J. de Jong and J. M. Starr, A remark on isotrivial families.

J. Kollár, Rational Curves on Algebraic Varieties, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 32, Springer, Berlin, 1996.

J. Kollár, Rationally connected varieties over local fields, Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 1, 357–367.

J. Kollár, Fundamental groups of rationally connected varieties, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday, Michigan Math. J. 48 (2000), 359–368.

J. Kollár, Rationally connected varieties and fundamental groups, *Higher dimensional varieties and rational points* (Budapest, 2001), 69–92, Bolyai Soc. Math. Stud., 12, Springer, Berlin, 2003.

J. Kollár, Specialization of zero-cycles, Specialization of zero cycles. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (2004), no. 3, 689–708.

J. Kollár, A conjecture of Ax and degenerations of Fano varieties, Preprint, May 31, 2006 (sur arXiv)

J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, Rational curves on Fano varieties, in Classification of irregular varieties, Minimal Models and Abelian Varieties, Trento 1990, ed. E. Ballico, F. Catanese, C. Ciliberto, Springer LNM 1515, Springer-Verlag p. 100–105.

J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, Rationally connected varieties, J. Algebraic Geometry 1 (1992), 429–448.

J. Kollár et E. Szabó, Endre, Rationally connected varieties over finite fields, Duke Math. J. 120 (2003), no. 2, 251–267.

D. Madore, L'équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p- adiques, Manuscripta Math. 110 (2003), 171–185.