Unverzweigte Kohomologie, Nullzyklen und stabile Rationalität

J.-L. Colliot-Thélène

Gemeinsame Arbeit mit Alena Pirutka
Universität Regensburg
10-12 März 2014
Anlässlich des 60. Jahrestages Uwe Jannsens

Существуют гладкие квартики $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$, которые не являются стабиљно рационаљными, а именно, группа Чжоу нуљ циклов X не универсаљно тривиаљна. Доказатељство основано на методе специализации, введенном К.Вуазан.

X eine reduzierte, irreduzible Varietät über $\mathbf{C}$ der Dimension d. Eigenschaften.

rational : X ist birational zu $\mathbf{P}^d$
$\Longrightarrow$ **Stabil rational** : Es gibt $n \geq 0$ mit $X \times \mathbf{P}^n$ rational
$\Longrightarrow$ **Faktor rational** : Es gibt $Y/\mathbf{C}$ mit $X \times Y$ rational
$\Longrightarrow$ **Retrakt Rational** : Es gibt offene Mengen $\emptyset \neq U \subset X$, $V \subset \mathbf{P}^n$, und $U \to V \to U$ Abbildungen deren Komposition die Identität von U ist (D. Saltman)
$\Longrightarrow$ **Unirational** : Es gibt eine rationale dominante Abbildung von $\mathbf{P}^n$ nach X – hier kann man $n = d$ nehmen.
$\Longrightarrow$ **Rational zusammenhängend** : Durch zwei beliebige Punkte von X läuft eine Kurve vom geometrischen Geschlecht 0. Beispiel : Fano Varietäten. (Campana; Kollár, Miyaoka, Mori).

Für $d = 1$ (Lüroth) und $d = 2$ (Castelnuovo) sind alle diese Eigenschaften äquivalent.

Mit $d \geq 3$ ändert sich die Lage.

$X/\mathbf{C}$ glatt und projektiv, unirational und nicht rational

1972 Clemens–Griffiths
X kubische Hyperfläche in $\mathbf{P}^4$.
[X ist birational zu einer Kegelschnittfamilie über $\mathbf{P}^2$]
Alle unirational, keine rational
Methode : Mittlere Jacobische Varietät, Prym Varietäten (Mumford)
Schließt nur die Rationalität aus

1972 Iskovskikh–Manin
X quartische Hyperfläche in $\mathbf{P}^4$
Einige unirational (alle ?)
Methode: Rigidität : $Biraut(X) = Aut(X)$, endlich, also keine ist rational
Schließt nur die Rationalität aus

1972 Artin–Mumford

X ist birational zu $z^2 = f_4(u, v, w)$, d. h. eine doppelte Überlagerung von $\mathbf{P}^3$, und der Verzweigungsort ist eine bestimmte (singuläre) quartische Fläche.

X ist birational zu einer bestimmten Kegelschnittfamilie über $\mathbf{P}^2$

X ist unirational

Methode für Nichtrationalität : $H^3(X, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$, oder auch Brauergruppe $Br(X) \neq 0$.

Zeigt, daß X nicht retrakt rational ist und im Besonderen nicht stabil rational ist.

Rational $\neq$ Stabil rational (Beauville, CT, Sansuc, Swinnerton-Dyer 1985)
Methode für Nichtrationalität : Mittlere Jacobische Varietät, Prym Varietäten (Clemens-Griffiths 1972, Mumford, Beauville 1977)

Stabile Rationalität $\subset$ Faktor rationalität $\subset$ Retrakt Rationalität
Alle äquivalent ? Beispiel für Retrakt Rationalität : GL_n/PGL_p mit p Primzahl (Saltman 1984).

Retract Rationalität $\neq$ Unirationalität : Brauergruppe, Artin–Mumford

Unirational $\neq$ rational zusammenhängend ? Unbekannt.

$X \subset \mathbf{P}^n$ glatte kubische Hyperfläche, $n \geq 4$.
Alle unirational. Artin-Mumford Invariante $Br(X) = 0$.
$n = 4$. Nie rational (Clemens–Griffiths). Sind einige, sind alle retrakt rational ? Offenes Problem.
$n = 5$: einige sind rational (klassisch; Hassett). Ist das eine Ausnahme ?
n beliebig. Sind sie alle retrakt rational ? Offenes Problem.

$X \subset \mathbf{P}^4$ glatte quartische Hyperfläche.
Iskovskikh–Manin : X ist nie rational.
Artin-Mumford Invariante $Br(X) = 0$.

Ist X stabil rational ? retrakt rational ?
Das werden wir erörtern.

Einige stabile birationale Invarianten

k ein Körper, $Char.(k) = 0$.

X/k, glatt, projektiv, irreduzibel, retrakt rational

$\Longrightarrow$ Für *jeden* Körper F/k, $Grad_F : CH_0(X_F) \to \mathbf{Z}$ Isomorphismus.
Man sagt, X ist universell CH_0-trivial.

Sei $k = \mathbf{C}$.
Bloch-Srinivas (1983) und andere Autoren haben die Konsequenzen von $CH_0(X_\Omega) = \mathbf{Z}$ untersucht, wo Ω beliebig algebraisch abgeschlossen ist.
Sei $\Delta \subset X \times X$ die Diagonale. Die Annahme mit $F = \Omega$ ist gleichbedeutend mit : es gibt $N > 0$ in $\mathbf{N}$ und einen Punkt $x \in X$, so daß $N\Delta = Z_1 + Z_2 \in CH^d(X \times X)$, mit Träger von Z_1 in $x \times X$ und Träger von Z_2 in $X \times Y$, $Y \subset X$, $Y \neq X$ geschlossen.
Mit dieser Annahme sind alle $H^i(X, O_X) = 0$ $(i \geq 1)$.

$X/\mathbf{C}$ ist universell CH_0-trivial dann und nur dann, wenn es eine solche Zerfällung mit $N = 1$ gibt.

Warnung :

Es gibt schon Flächen $X/\mathbf{C}$ von allgemeinen Typ, also bestimmt nicht stabil rational, die universell CH_0-trivial sind.
Bei diesen Flächen ist $H^0(X,K)=0$, $H^0(X,2K)\neq 0$.

Unverzweigte Kohomologie

X/k, glatt, projektiv, irreduzibel, Funktionenkörper $k(X)$.
$H^i_{nr}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j}) :=$
$\bigcap_{x \in X^{(1)}} Ker[\partial_x : H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes j-1})]$

$=$ (Bloch-Ogus)

$\bigcap_{A \text{ disk. Bew. von } k(X),\ k \subset A}$
$Ker[\partial_A : H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1})]$

Also, birationale invariante. Wenn X/k retrakt rational, dann ist $H^i(k, \bullet) = H^i_{nr}(k(X)/k, \bullet)$ (CT-Ojanguren 1989)

Algebraisch abgeschlossene Körper $k \subset K$, dann Rigidiät : $H^i_{nr}(k(X)/k, \bullet) = H^i_{nr}(K(X)/K, \bullet)$ (CT, Jannsen, nach einer Methode von Suslin)

$X/\mathbf{C}$ glatt, projektiv
X retrakt rational
$\Longrightarrow X$ universell CH_0-trivial
$\Longrightarrow$ Für jeden Körper F/k, jede $i, n \in \mathbf{N}_{>0}$, jede $j \in \mathbf{Z}$,
$H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i_{nr}(F(X)/F, \mu_n^{\otimes j})$ Isomorphismus

$$H^1_{nr}(k(X)/k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^1_{et}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = Hom(\pi_1(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Für $F = \mathbf{C}$ ist diese Gruppe eine Erweiterung der endlichen Gruppe $NS(X)_{tors} = H^2_B(X, \mathbf{Z})_{tors}$ durch $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{b_1}$.
Falls X rational zusammenhängend, dann ist $\pi_1(X) = 0$ (Kollár).

$$H^2_{nr}(k(X)/k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = Br(X), \text{ Brauergruppe von } X.$$

Für $k = \mathbf{C}$ ist diese Gruppe eine Erweiterung der endlichen Gruppe $H^3_B(X, \mathbf{Z})_{tors}$ durch die Gruppe $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{b_2-\rho}$.
Fall X rational zusammenhängend, dann ist $b_2 - \rho = 0$.

$H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$
$k = \mathbf{C}$
$Z_4(X) := Hdg^4(X, \mathbf{Z})/Im(CH^2(X))$ (vermutlich endlich).

Satz (CT-Voisin 2012)
Für $k = \mathbf{C}$ ist $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ eine Erweiterung der endlichen Gruppe $Z_4(X)_{tors}$ durch eine teilbare Gruppe. Wenn $CH_0(X) = \mathbf{Z}$ ist, dann ist $Z_4(X)$ endlich und

$$H^3_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = Z^4(X).$$

Satz (Voisin 2006). *Sei X rational zusammenhängend der Dimension 3, dann ist $Z^4(X) = 0$, also auch $H^3_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = 0$.*

Beispiele von glatten, projektiven, unirationalen Varietäten X der Dimension ≥ 6 mit $Br(X) = 0$, $H^3_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \neq 0$, also auch $Z^4(X) \neq 0$, CT-Ojanguren 1989, via Arason 1975 (Vorläufer von Merkurjev-Suslin 1983).

X rational zusammenhängend, $dim(X) = 4, 5$. Ist $H^3_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \neq 0$ möglich? Offenes Problem.

Man kann Beispiele von unirationalen X bauen, mit allen $H^i_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$ für $i < n$ und $H^n_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \neq 0$. Peyre 93, Asok 2013. Methode : Merkurjev-Suslin 1983, Jacob-Rost 1989, Orlov-Vishik-Voevodsky 2007.

Eine andere (stabile) birationale Invariante.
$X/\mathbf{C}$ glatt projektiv. $F/\mathbf{C}$, $\overline{F}$ algebraischer Abschluß, $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

Coker $[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G]$ ist eine birationale invariante von $X/\mathbf{C}$. Beweis : Aufblasungen.

Nehmen wir an, $CH_0(X) = \mathbf{Z}$, und $H^i(X, \mathbf{Z})_{tors} = 0$ für $i = 2, 3$, und $H^3_{nr}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = 0$. Dann exakte Folge

$$0 \to H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))/H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to$$

$$\to Coker[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G]$$

$$\to H^2(G, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times}).$$

(Bloch, CT-Raskind 1985, Kahn 1996, CT 2013)

Satz. *Sei* $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *eine glatte kubische Hyperfläche.*
(i) Für alle $n \geq 4$ *ist* $H^3_{nr}(\mathbf{C}(X)/\mathbf{C}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) = 0$.
(ii) Für alle $n \geq 5$, *für alle Körper* $F/\mathbf{C}$, *die Abbildung* $H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ *ist ein Isomorphismus.*
(iii) Für alle $n \geq 5$, *für alle Körper* $F/\mathbf{C}$, *die Abbildung* $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ *ist surjektiv.*

Beweise (2013) : Auel, CT, Parimala (für $n = 5$, nur spezielle Fälle); Voisin ($n = 5$, allgemeiner Fall).
Viele Fälle werden mit K-Theoretischen Methoden behandelt (Ergebnisse von Merkurjev-Suslin, Kahn, Rost, Sujatha).
Den Fall $n = 5$ dagegen kann man bis jetzt nur unter Benutzung eines Hodgetheoretischen Ergebnisses von C. Voisin zeigen.

Bleibt der klassische Fall der kubischen Hyperflächen $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$. Für $F/\mathbf{C}$,

$$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))/H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \simeq Coker[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G]$$

Gibt es wenigstens einen Fall, wo diese Gruppe nicht null ist (und daher X nicht stabil rational) ?
Der Fall wo F der Funktionenkörper der mittleren Jacobischen Varietät $J^3(X)$ ist von C. Voisin betrachtet worden. Sie hat angekündigt, daß diese Gruppen "oft" null sind.

Eine neue Art, die Nichtrationalität zu erzwingen : Die Spezialierungsmethode

Zwei Varianten

C. Voisin (Dez. 2013) : Aktion der Korrespondenzen auf die Chowgruppen und auf die Betti Kohomologie

CT-Pirutka (Feb. 2014) : Chowgruppe der Nullzyklen, Spezialisierungsabbildung (Fulton)

Spezialisierungsmethode von Claire Voisin (Dez. 2013)
$B/\mathbf{C}$ glatte Kurve, $X/\mathbf{C}$ glatt, $X \to B$ projektiv, flach, Fasern der Dimension d
allgemeine Faser glatt, spezielle Faser X_0 höchstens ordinäre Singularitäten, Entsingularisierung $\tilde{X}_0 \to X_0$.
(a) Wenn Chow Zerfällung der Diagonale für allgemein X_t gilt, dann gilt dasselbe für $\tilde{X}_0$.
(b) Wenn Kohomologische Zerfällung des Bildes der Diagonale in $H^{2d}(X_t \times X_t)$ für allgemein X_t gilt, und wenn die gerade Kohomologie von $\tilde{X}_0$ algebraisch ist, dann gibt es Kohomologische Zerfällung der Diagonale für $\tilde{X}_0$.

Einige Ergebnisse von C. Voisin (Dez. 2013)

$X \subset \mathbf{P}(2,1,1,1,1)$ doppelte Überlagerung von $\mathbf{P}^3$ verzweigt entlang einer quartischen Fläche $S \subset \mathbf{P}^3$.

Satz 1 *Sei* $0 \leq n \leq 7$. *Wenn* S n *ordinäre Singularitäten hat, ist dafür aber sehr allgemein, dann ist* X *nicht retrakt rational.*

Satz 2 *Wenn* S *sehr allgemein mit 7 ordinären Singularitäten ist, dann gibt es einen Körper* F *mit* $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)$ *nicht gleich* $H^3(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$.

Methode : Spezialiserung zu einer Artin-Mumford Varietät Y. Das ist eine doppelte Überlagerung von $\mathbf{P}^3$ verzweigt enlang einer quartischen Fläche $S \subset \mathbf{P}^3$ mit 10 ordinären Singularitäten.
Nach Artin-Mumford gibt es eine Entsingularisierung $Z \to Y$ mit $Br(Z) \neq 0$.

Mit dem zweiten Satz erreicht C. Voisin gleichzeitig folgendes.

Es gibt eine glatte drei-dimensionale rational zusammenhängende Varietät (sogar unirationale) X, deren mittlere Jacobische Varietät $J^3(X)$ keinen universellen Kodimension 2 Zyklus besitzt.
Das heißt, es gibt keinen Kodimension 2 Zyklus auf $J^3(X) \times X$, der alle Zyklen in $CH^2_{hom}(X)$ parametriziert.

Spezialisierungssatz (CT-Pirutka 2014)

A Bewertungsring, K Fraktionskörper, Restklassenkörper k algebraisch abgeschlossen, Char.k null. $\mathcal{X}/A$ projektiv und flach über A.
Annahme 1 : Geometrische generische Faser $\mathcal{X} \times_A \overline{K}$ integral, glatt und retrakt rational.
Annahme 2 : Spezielle Faser $Y := \mathcal{X} \times_A k$ integral, Entsingularisierung $p : Z \to Y$ universell CH_0-trivial, d. h. für alle F/k ist $p_{F,*} : CH_0(Z_F) \to CH_0(Y_F)$ ein Isomorphismus.

Dann ist Z/k universell CH_0-trivial, im Besonderen hat man für alle F/k und alle i, n, j

$$H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \simeq H^i_{nr}(F(Z)/k, \mu_n^{\otimes j}).$$

Beweis. Man kann $A = k[[t]]$ annehmen. Nach einer endlichen Erweiterung von K kann man annehmen, daß $\mathcal{X} \times_A K$ retrakt rational ist. Dann ersetzt man $A = k[[t]]$ durch $B = F[[t]]$ und K durch $L = F((t))$.
Sei $U \subset Y$ nicht leere glatte offene Menge mit $p : p^{-1}(U) \to U$ Isomorphismus, sei $V = p^{-1}(U)$. Sei z ein Nullzyklus vom Grad Null auf Z_F. Weil Z_F glatt ist, ist z rational äquivalent auf Z_F zu einem Nullzyklus z_1 mit Träger in V_F. Dann liegt der Nullzyklus $p_*(z_1)$ in U_F. Weil U glatt ist und B vollständig, kann man den Nullzykus $p_*(z_1)$ zu einem 1-Zyklus auf $\mathcal{X}_B$ von relativem Grad null auf B aufheben.
Wichtiger Punkt (Fulton) : Die Abbildung $CH_1(\mathcal{X}_B) \to CH_0(Y_F)$ induziert eine Abbildung $CH_0(X_L) \to CH_0(Y_F)$.
Da $Grad_L : CH_0(\mathcal{X}_L) \simeq \mathbf{Z}$ folgt $p_*(z_1) = 0 \in CH_0(Y_F)$. Da $p_* : CH_0(Z_F) \to CH_0(Y_F)$ ein Isomorphismus ist, folgt $z = 0 \in CH_0(Z_F)$. Was zu beweisen war.

- Wir setzen keine Regularitätsbedingung für $\mathcal{X}$.
- Man braucht sogar nicht anzunehmen, daß $\mathcal{X} \times_A \overline{K}$ glatt ist.

Annahme über die spezielle Faser

• Die Bedingung $p : Z \to Y$ universell CH_0-trivial hängt nur von Y ab.

• Wenn alle Fasern $Z_M/\kappa(M)$, $M \in Y$, universell CH_0-trivial sind, dann ist $p : Z \to Y$ universell CH_0-trivial.

• Einfaches Beispiel für $p : Z \to Y$ universell CH_0-trivial :
k algebraisch abgeschlossen, $dim(Y) \geq 2$, und die einzige Singularitäten von Y sind ordinäre quadratische Singularitäten.

Wir verfügen über zwei Beispiele von singulären quartischen Hyperflächen $Y \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ deren Entsingularisierung $p : Z \to Y$ die beide folgende Eigenschaften hat :
(i) $p : Z \to Y$ universell CH_0-trivial :
(ii) $Br(Z) \neq 0$, oder auch $H^3(Z, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$, oder auch $H^4(X, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$.

Man fängt mit einer Artin-Mumford Fläche in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ an :

$$\alpha_2(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta_3(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma_4(z_0, z_1, z_2) = 0$$

$\beta^2 - \alpha\gamma = \varepsilon_1.\varepsilon_2$, mit $\varepsilon_i = 0$ elliptische Kurven, und mit dem Kegelschnitt $\alpha = 0$ tangential zu beiden.

• June Huh (A counterexample to the geometric Chevalley-Lang conjecture, 2013)
$\alpha_2(z_0,z_1,z_2)z_3^2+\beta_3(z_0,z_1,z_2)z_3+\gamma_4(z_0,z_1,z_2)+\delta_2(z_0,z_1,z_2)z_4^2=0$
Hier ist $\delta_2(z_0,z_1,z_2)=0$ glatt und allgemein genug.
Bildet Entsingularisierung $p:Z\to Y$, zeigt : $\mathbb{L}$-Entsingularisierung (ähnlich wie universell CH_0-trivial). Muß $H^4(Z,\mathbf{Z})_{tors}\neq 0$ zeigen (wie bei Artin-Mumford).

• CT-Pirutka (2014)
$\alpha_2(z_0,z_1,z_2)z_3^2+\beta_3(z_0,z_1,z_2)z_3+\gamma_4(z_0,z_1,z_2)+z_0^2z_4^2=0$
Wir berechnen eine Entsingularisierung $p:Z\to Y$ und zeigen (i).
Wir brauchen $H^4(Z,\mathbf{Z})_{tors}$ nicht zu berechnen, weil unsere Quartik birational zu der 3-dimensionalen Artin-Mumford Varietät ist, also weiß man schon, daß $Br(Z)\neq 0$.

$\Longrightarrow$ Hauptsatz des Vortrages (CT et Pirutka, Februar 2014) :

Eine "sehr allgemeine" quartische Hyperfläche in $\mathbf{P}^4_{\mathbf{C}}$ ist nicht retrakt rational, also im Besonderen nicht stabil rational.

Außerdem gibt es glatte quartische Hyperflächen, die auf einem algebraischen Abschluß von $\mathbf{Q}(t)$ definiert sind, und die nicht retrakt rational sind.

Zu vergleichen mit Iskovkikh-Manin (1972) : glatte quartische Hyperflächen sind nicht rational.