Exposant et indice d'algèbres simples centrales non ramifiées

par J.-L. Colliot-Thélène

avec un appendice par O. Gabber

Soient K un corps et A une K-algèbre simple centrale (de dimension finie sur son centre). On appelle indice de A la racine carrée de la dimension, sur K, d'un corps gauche Brauer-équivalent à A. On appelle exposant de A l'exposant de la classe de A dans le groupe $\mathrm{Br}(K)$, groupe de Brauer du corps K. Comme le montra Richard Brauer, l'exposant divise l'indice, et les facteurs premiers de l'un et de l'autre coïncident (voir [Al2] et [D]). En outre, pour un corps quelconque, ce sont là les seules restrictions ([Br2], voir aussi [N]).

Le premier exemple où l'exposant e divise strictement l'indice i apparaît dans [Br1], et il est généralisé dans [K]. Brauer donne un exemple avec $e = 2$ et $i = 4$. C'est un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions (ce qu'on appelle maintenant une algèbre de biquaternions – une terminologie anciennement utilisée pour les octonions). Pour tout entier $n \geq 1$, Köthe donne un exemple avec $e = 2$ et $i = 2^n$; c'est un produit tensoriel de n algèbres de quaternions. Dans [Br2], la méthode qu'emploie Brauer est différente. Ces méthodes ont depuis été reprises par de nombreux auteurs (qui ne se limitent pas au problème exposant versus indice, mais s'intéressent à la construction de corps gauches indécomposables). On peut citer des travaux de Albert, Saltman, Tignol, Rowen, Jacob, Wadsworth, Fein-Saltman-Schacher, Brussel. Pour semble-t-il tous les exemples de K-algèbre simple centrale A construits par ces auteurs, à commencer par Brauer, il existe une valuation discrète de rang un du corps K par rapport à laquelle l'algèbre A est ramifiée.

En 1985, Schofield et van den Bergh ([vdB], [SvdB]) établirent un important théorème de "réduction d'indice", qui leur permit, sur une suggestion de D. Saltman, de donner de nouveaux exemples d'algèbres simples centrales pour lesquelles l'exposant divise strictement l'indice, et aussi de nouveaux exemples d'algèbres indécomposables ([SvdB], §2). Certains de ces exemples avaient été déjà obtenus par d'autres, sur des corps convenables, par la méthode "valuative", mais la méthode de [SvdB] est radicalement nouvelle, elle n'implique pas de valuations.

Dans un récent article, A. Kresch [Kr] montre comment construire une variété projective et lisse X de dimension 3 sur le corps des complexes, et une algèbre A de biquaternions sur le corps des fonctions $K = \mathbf{C}(X)$ qui est un corps gauche (donc $e = 2$ et $i = 4$) et qui est non ramifiée sur X (c'est-à-dire par rapport à toute valuation discrète de K). La méthode qu'il emploie est fort élaborée : il a recours aux champs algébriques, applications cycles sur ces champs, gerbes etc.

Je me propose ici de montrer que son résultat (un peu généralisé) peut être établi par la méthode de Schofield-van den Bergh. Par cette méthode, je montre en effet (pour un énoncé plus précis, voir le théorème 10) :

Théorème. *Soit $l = 2$ ou $l = 3$ (*). Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de l. Pour $1 \leq n < m$ entiers quelconques, il existe une variété*

(*) Un résultat récent de A. J. de Jong permet d'étendre le résultat à tout l premier.

projective et lisse Y sur k, de dimension $l^{m-n}+1$, et une algèbre à division sur le corps des fonctions $k(Y)$, non ramifiée sur Y, d'exposant l^n et d'indice l^m.

Pour $l=2, n=1, m=2$, on retrouve le résultat de Kresch ([Kr], Thm. 2). En effet un théorème d'Albert ([Al2], chap. XI, Thm. 2, p. 174) dit qu'une telle algèbre d'exposant 2 et d'indice 4 est automatiquement une algèbre de biquaternions.

Dans un premier paragraphe, je passe en revue quelques-uns des exemples ramifiés évoqués ci-dessus. Ce paragraphe de nature historique ne prétend à nulle originalité, son seul but est de mettre les résultats suivants en perspective. Au paragraphe 2 on rappelle le résultat de Schofield et van den Bergh, et on établit le théorème ci-dessus. Au paragraphe 3, je considère des familles d'algèbres non ramifiées, définies sur des produits de courbes, d'exposant un nombre premier p, et de degré une puissance de p. Sont-elles à division, *i.e.* d'indice égal à leur degré ? Pour la première famille, j'obtiens une réponse positive dans un cas particulier (Proposition 11). Il se pose alors la question : pour des courbes suffisamment générales, ces algèbres sont-elles à division ?

O. Gabber a répondu par l'affirmative à cette question. On trouvera sa solution décrite dans l'Appendice. *Grosso modo*, Gabber montre que la situation non ramifiée considérée se spécialise en une situation ramifiée où l'on peut contrôler l'indice, grâce précisément aux résultats classiques décrits au paragraphe 1.

Notations. Soient K/k une extension de corps et A une k-algèbre simple centrale. On note A_K la K-algèbre simple centrale $A \otimes_k K$. Pour K/k extension finie cyclique de corps, de groupe de Galois engendré par un élément σ, et $b \in k^*$, on note $(K/k, \sigma, b)$ l'algèbre cyclique standard : c'est la k-algèbre $\oplus_{i=0}^{r-1} K\xi^i$, satisfaisant $\xi^r = b$ et $\xi \cdot \alpha = \sigma(\alpha) \cdot \xi$ pour tout $\alpha \in K$.

Pour K/k cyclique de degré r (premier à la caractéristique), et k contenant une racine primitive r-ième de l'unité ζ_r, on peut écrire $K = k(a^{1/r})$ avec $a \in k^*$ et on définit σ par la condition $\sigma(a^{1/r}) = \zeta_r a^{1/r}$. On note alors $(K/k, \sigma, b) = (a, b)_{\zeta_r}$. Pour $r = 2$, on trouve une algèbre de quaternions, simplement notée (a, b).

Je remercie Jean-Pierre Tignol pour plusieurs messages. Je remercie Ofer Gabber de ses réponses à mes questions, et d'avoir accepté de les faire paraître en appendice à cet article.

1. Quelques résultats et exemples classiques.

Proposition 1 (Albert; [Al1], Thm. 3). *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a, b, c, d \in k^*$. La k-algèbre simple centrale $(a, b) \otimes_k (c, d)$ est un corps gauche si et seulement si la forme quadratique diagonale $< a, b, -ab, -c, -d, cd >$ est anisotrope sur le corps k.*

Des variantes de la proposition suivante se trouvent chez divers auteurs ([T1], Prop. 2.4, p. 211; [JW], Thm. 5.15; [FSS], Lemma 4.6, p. 473; [Bru], Lemma 4, p. 382).

Proposition 2. *Soient K/k une extension cyclique de corps, σ un générateur du groupe de Galois de K/k, et t une variable. Soit A une k-algèbre simple centrale. On a alors les formules*

$$i(A_{k(t)} \otimes_{k(t)} (K(t)/k(t), \sigma, t)) = i(A_K) \cdot [K : k]$$

et

$$i(A_{k((t))} \otimes_{k((t))} (K((t))/k((t)), \sigma, t)) = i(A_K) \cdot [K : k].$$

En particulier, si A est un corps gauche, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A_K est un corps gauche;

(ii) $A_{k(t)} \otimes_{k(t)} (K(t)/k(t), \sigma, t)$ est un corps gauche;

(iii) $A_{k((t))} \otimes_{k((t))} (K((t))/k((t)), \sigma, t)$ est un corps gauche.

En particulier, on a l'énoncé suivant :

Corollaire 3. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soient $a, b, c \in k^*$. Supposons $c \notin k^{*2}$, et soit $K = k(\sqrt{c})$. Soit t une variable. La K-algèbre de quaternions $(a, b)_K$ est un corps gauche si et seulement si la $k(t)$-algèbre de biquaternions $(a, b) \otimes (c, t)$ est un corps gauche.*

Comme le lecteur le vérifiera, ce dernier énoncé peut aussi se déduire de la proposition 1, du critère de Springer ([L1], chap. 6, Prop. 1.9) sur l'isotropie des formes quadratiques sur un corps $k((t))$, et du fait bien connu qu'une forme quadratique q de rang 4 sur un corps k est isotrope sur k si et seulement si elle l'est sur l'extension discriminant $k(\sqrt{d(q)})$ (conséquence immédiate de [L1], chap. 7, Lemma 3.1).

Un cas encore plus particulier est le suivant :

Corollaire 4. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient $a, b \in k^*$. Soit $K = k(x, y)$ le corps de fonctions rationnelles en deux variables. L'algèbre de biquaternions $A = (a, x) \otimes (b, y)$ sur le corps $k(x, y)$ est un corps gauche si et seulement si les classes de a et b dans k^*/k^{*2} sont indépendantes.*

Démonstration. Le cas où les classes de a et b ne sont pas indépendantes est clair. Si elles sont indépendantes, alors a n'est pas un carré dans $k(\sqrt{b})$, et donc l'algèbre de quaternions (a, x) sur le corps $k(x)(\sqrt{b}) = k(\sqrt{b})(x)$ est un corps gauche. On applique alors le corollaire 3 à $(k(x), a, x, b, y)$ en lieu et place de (k, a, b, c, t).

Le corollaire 4 donne immédiatement des exemples de corps d'exposant 2 et d'indice 4 sur le corps $k(x, y)$ avec k l'un quelconque des corps suivants : $k = \mathbf{Q}$ (on retrouve là l'exemple original de Brauer [Br1]), k un corps p-adique, k un corps de fonctions d'au moins une variable sur un corps quelconque, par exemple le corps des complexes. Le cas le plus simple est celui de l'algèbre de biquaternions générique $(x, y) \otimes (z, t)$ sur le corps de fractions rationnelles $K = \mathbf{C}(x, y, z, t)$, mais on donne tout aussi facilement des exemples sur le corps $K = \mathbf{C}(x, y, z)$.

Le corollaire 3 permet de donner des exemples de type un peu différent.

Exemple 5. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2, et soit $a \in k^*$, $a \notin k^{*2}$. L'algèbre simple centrale $D = (x, a) \otimes (x + 1, y)$ sur le corps $K = k(x, y)$ est d'exposant 2 et d'indice 4.*

Démonstration. D'après le corollaire 3, il suffit de montrer que la $k(x)$-algèbre de quaternions (x, a) reste non-triviale par extension du corps de base de $k(x)$ à $k(z)$, avec $z^2 = x + 1$. Sur le corps $k(z)$, cette algèbre se lit $(a, 1 - z^2)$, et elle a un résidu non trivial $a \in k^*/k^{*2}$ en $z = 1$ (et $z = -1$). En particulier sa classe dans le groupe de Brauer est non triviale, c'est un corps gauche.

Ainsi, pour $\mathbf{F}$ un corps fini de caractéristique différente de 2, il existe des algèbres d'indice 2 et d'exposant 4 sur $\mathbf{F}(x, y)$.

L'avantage de la proposition 2 est qu'elle permet d'itérer des exemples.

Exemple 6. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient x_i $(i = 1, \ldots, n)$ des variables indépendantes, et a_i $(i = 1, \ldots, n)$ des éléments de k^*. Le produit tensoriel $A = (a_1, x_1) \otimes \cdots \otimes (a_n, x_n)$, sur le corps $k(x_1, \ldots, x_n)$, des algèbres de quaternions (a_i, x_i), d'indice 2^n, est un corps gauche si et seulement si les classes des a_i dans le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel k^*/k^{*2} sont indépendantes.*

On sait que pour une extension quadratique $K = k(\sqrt{c})/k$, le noyau de la restriction $k^*/k^{*2} \to K^*/K^{*2}$ est le groupe $\{1, c\}$. L'exemple 6 se déduit alors de la proposition 2 par récurrence.

Si l'on prend pour k le corps engendré sur un corps de base k_0 par n variables indépendantes y_i, on voit que le produit tensoriel $(y_1, x_1) \otimes \cdots \otimes (y_n, x_n)$, sur le corps $k_0(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ est un corps gauche. On retrouve ainsi un exemple dû à Köthe ([K], 1931).

On peut généraliser l'exemple, en considérant un corps k, des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_n$ du groupe de Galois de k, d'exposants respectifs n_i, des variables $x_1, \ldots, x_n$, et l'algèbre $A = (\chi_1, x_1) \otimes \cdots \otimes (\chi_n, x_n)$ sur le corps $k(x_1, \ldots, x_n)$. C'est un corps gauche si et seulement si le sous-groupe de $H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ engendré par les χ_i est d'ordre $\prod_i n_i$. On retrouve ici l'énoncé de Nakayama ([N], 1935).

La proposition 1 interdit de construire des exemples d'algèbres de biquaternions à division sur un corps K lorsque ce corps est C_2 (par exemple sur un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes).

De façon plus générale, on a l'énoncé suivant, établi par de nombreux auteurs (voir la remarque ci-dessous). Pour la commodité du lecteur, nous rappelons le principe de la démonstration.

Un corps K est dit C_i si toute forme homogène à coefficients dans K de degré $d > 0$ en $n > d^i$ variables possède un zéro non trivial. Un corps K est dit C_i' si pour tout $r \geq 1$ et tout ensemble de formes homogènes $f_j(X_1, \ldots, X_n)$ $(j = 1, \ldots, r)$ à coefficients dans K, si l'on a $n > \sum_j d_j^i$, où d_j désigne le degré de f_j, alors il existe un zéro commun non nul $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ pour les formes f_j. Un corps C_i' est C_i; la réciproque n'est pas connue en général (cf. [NSW], p. 310 à 312).

Proposition 7. *Soit K un corps C_2'. Toute classe dans le groupe de Brauer de K d'exposant $2^r \cdot 3^s$ est représentée par un corps gauche d'indice $2^r \cdot 3^s$. Pour $s = 0$, ceci vaut pour tout corps C_2.*

Démonstration ([A], [MS]). Comme toute algèbre simple se décompose en produit d'algèbres simples d'indices deux à deux premiers entre eux, il suffit d'établir le résultat pour l'exposant p^n avec $p = 2$ ou 3 et n quelconque.

Supposons l'énoncé établi pour $n = 1$, pour tout corps C_2' (resp. C_2 si $p = 2$). L'énoncé suit alors par récurrence pour tout exposant p^n. En effet si A sur un tel corps K est d'exposant p^{n+1}, alors l'algèbre $A^{\otimes p}$ est d'exposant p^n, donc par hypothèse de récurrence d'indice p^n, donc déployée par une extension L/K de degré p^n. Le corps L est

C_2' (resp. C_2 si $p = 2$), et l'algèbre A_L est d'exposant p, donc d'indice p, donc déployée par une extension M/L de degré p. Ainsi A est déployée par une extension M/K de degré p^{n+1}, donc est d'indice p^{n+1}. Pour cette réduction, voir aussi le théorème 3 p. 175 du livre d'Albert [Al2].

On est donc réduit au cas $n = 1$. Toute algèbre simple centrale d'exposant p est semblable à un produit tensoriel d'algèbres d'indice p. En caractéristique $p > 0$, c'est un théorème classique (Teichmüller, Albert; [Al2], Chap. VII, Thm. 28; [J], Thm. 4.2.17 p. 162). Lorsque la caractéristique de K est différente de p et que K contient les racines p-ièmes de l'unité, c'est le théorème de Merkur'ev-Suslin ([MS], Thm. (16.1)). Merkur'ev ([M1], Thm. 2 p. 2617) en a déduit le cas où K ne contient pas toutes les racines p-ièmes de l'unité (pour $p = 3$, voir déjà [MS] (16.4)).

Il suffit donc de voir : si A et B sont deux algèbres à division d'indice $p = 2$ ou $p = 3$ sur un corps K qui est C_2', ou simplement C_2 si $p = 2$, alors $A \otimes_K B$ n'est pas un corps gauche. Pour $p = 2$ et K de caractéristique différente de 2, ceci résulte immédiatement du critère d'Albert (Proposition 1). En général, on écrit la condition pour qu'il existe une extension $L = K(\alpha)$ de degré p qui déploie simultanément A et B. Soit $A = k \oplus V_A$, resp. $B = k \oplus V_B$, une décomposition de A, resp. B, comme espace vectoriel sur k.

Pour trouver α, il suffit de trouver $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, non nuls, tels que le polynôme caractéristique (de degré p) de $v_1 \in A$ coïncide avec celui de $v_2 \in B$.

Ceci correspond à un système de formes homogènes sur $V_1 \oplus V_2$. Pour $p = 2$, on trouve une forme quadratique en 6 variables. Pour $p = 3$, on trouve un système formé d'une forme quadratique et d'une forme cubique, en 16 variables. On a $6 > 2^2$ et $16 > 2^2 + 3^2$; le corps K étant C_2', le système a donc une solution non triviale.

Remarque. La proposition ci-dessus est énoncée par Artin et Harris ([A], Thm. 6.2), Artin et Tate ([A], Appendix), Merkur'ev et Suslin ([MS], (16.4) et (16.8)), Yanchevskiĭ, Platonov). Notons que ce qui est appelé C_2 dans [A] est ici appelé C_2'. Comme me l'a fait observer O. Gabber, la démonstration du théorème de l'appendice de [A] (p. 208) et celle donnée dans [MS], qui considèrent le système d'équations homogènes correspondant à A, B (plutôt que V_1, V_2 comme ci-dessus), requièrent une précision : les scalaires de K sont alors solutions du système d'équations homogènes considéré, et ce ne sont pas des solutions intéressantes.

2. Algèbres non ramifiées via la réduction d'indice.

Pour construire des exemples d'algèbres non ramifiées pour lesquelles exposant et indice diffèrent, j'utilise le calcul de "réduction d'indice" dû à Schofield et van den Bergh ([vdB], [SvdB]). La question générale, étudiée par la suite par Merkur'ev, Panin, Wadsworth (voir [M2], [M3], [L2]), est d'étudier le comportement de l'indice d'une algèbre simple centrale A sur un corps k par passage au corps des fonctions $K = k(X)$ d'une k-variété projective X qui est un espace homogène d'un groupe linéaire connexe (exemples : variétés de Severi-Brauer, quadriques de dimension au moins un).

Théorème 8 (Schofield et van den Bergh, 1985). *Soient k un corps et A et B deux k-algèbres simples centrales à division. Soit X la k-variété de Severi-Brauer associée à B.*

L'indice de $A_{k(X)}$ sur le corps des fonctions $k(X)$ est égal au plus petit des indices des k-algèbres $A \otimes_k B^{\otimes n}$, pour n parcourant les entiers.

Ce résultat est obtenu par un calcul à la Quillen de la K-théorie des O_X-modules cohérents sur X équipés d'une action de A. Le cas particulier suivant, qui est aussi un cas particulier d'un résultat de Merkur'ev [M2], suffit pour établir le résultat de Kresch. Tignol en a donné une démonstration "élémentaire" ([T2], voir aussi [M3]).

Théorème 9. *Soient k un corps de caractéristique différente de 2, C/k une conique lisse sans point rationnel, B/k l'algèbre de quaternions associée, A/k une k-algèbre simple centrale à division. Soit $i(A)$ l'indice de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'algèbre $A_{k(C)}$ n'est pas un corps gauche.

(ii) Il existe une k-algèbre simple centrale E/k d'indice $i(A)/2$ telle que $A \simeq B \otimes E$.

Nous sommes maintenant à pied d'œuvre pour établir le

Théorème 10. *Soit X une surface connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et soit l premier, $l \neq p$. Supposons que le rang ρ du groupe de Néron-Severi de X est strictement plus petit que la dimension $b_{2,l}$ du second groupe de cohomologie l-adique $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l)$. Supposons $l = 2$ ou $l = 3$ (*).*

a) Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une variété Y_n connexe, projective et lisse sur k, qui est un schéma de Severi-Brauer sur X, de dimension relative $l^n - 1$, sur laquelle il existe, pour tout entier $m \geq 1$, une algèbre d'Azumaya $A_{n,m}$, dont la restriction au point générique de Y_n est un corps gauche d'exposant l^m et d'indice l^{n+m}.

b) Pour $m \geq 2$, ce corps gauche est indécomposable.

c) Pour $m = 1$, $l = 2$ et $n = 1$, ce corps gauche est un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions.

Démonstration. Le sous-groupe de torsion l-primaire $\mathrm{Br}(X)\{l\}$ de $\mathrm{Br}(X)$ est une extension d'un groupe fini l-primaire par le groupe divisible non trivial $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho}$ ([GB], II, §3) (on fixe l et note $b_2 = b_{2,l}$). Soit $\gamma_n \in (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho} \subset \mathrm{Br}(X)$, $n \in \mathbf{N}$ une suite d'éléments, avec γ_n d'exposant l^n et $l\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

La fibre de γ_n au point générique de la surface X est une classe d'exposant l^n sur le corps des fonctions $k(X)$, qui est un corps C_2'. Puisque l'on a $l = 2$ ou $l = 3$, la proposition 7 implique que cette classe est représentée par un corps gauche d'indice l^n sur le corps $k(X)$. Comme X est une surface régulière et que la classe de ce corps gauche dans $\mathrm{Br}(k(X))$ est dans l'image du groupe de Brauer de X, un argument de Auslander-Goldman et Grothendieck ([GB], II, §2, Corollaire 2.2) montre que ce corps gauche est la restriction d'une algèbre d'Azumaya sur X. A cette algèbre d'Azumaya on associe un schéma de Severi-Brauer $Y_n \to X$ ([GB], I, §8), de dimension relative $l^n - 1$ sur X. On sait (Châtelet, Amitsur) que le noyau de l'application de restriction $\mathrm{Br}(k(X)) \to \mathrm{Br}(k(Y_n))$ est engendré par la classe de l'image de γ_n dans $\mathrm{Br}(k(X))$. Les applications de restriction

---

(*) Cette restriction est inutile. En effet, dans la démonstration du théorème, on peut remplacer la référence à la proposition 7 par le résultat récent de A. J. de Jong : pour l premier, $l \neq p$, indice et exposant des algèbres centrales simples l-primaires sur le corps des fonctions $k(X)$ de la surface X coïncident.

$\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(X))$ et $\mathrm{Br}(Y_n) \to \mathrm{Br}(k(Y_n))$ sont injectives, puisque X et Y_n sont lisses. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/l^n \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_n),$$

où la flèche $\mathbf{Z}/l^n \to \mathrm{Br}(X)$ envoie 1 sur γ_n. (En analysant la suite spectrale de Leray pour le faisceau étale $\mathbf{G}_m$ et la projection $Y_n \to X$, on obtient cette suite exacte directement, ainsi que l'information, non utilisée dans la suite, que la flèche $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_n)$ est surjective.)

Soit $m \geq 1$. L'image de γ_{m+n} dans $\mathrm{Br}(Y_n) \subset \mathrm{Br}(k(Y_n))$ est un élément d'exposant l^m. Soit par ailleurs $A_{n,m}$, notée simplement A, une algèbre à division représentant γ_{m+n} sur $k(X)$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, cette algèbre est d'indice l^{n+m}, et elle est la restriction au point générique d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X. Le théorème de Schofield et van den Bergh (Théorème 8) assure que l'indice de A étendue au corps $k(Y_n)$ est le plus petit des indices des algèbres $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ sur le corps $k(X)$ (pour r entier), où B est une $k(X)$ algèbre représentant γ_n au point générique de X. La classe de B est égale à celle de $A^{\otimes l^m}$, celle de $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ est égale à celle de $A^{\otimes 1+rl^m}$. Comme $1 + rl^m$ est premier à l'indice de A (qui est une puissance de l, en fait l^{n+m}), tous les indices des algèbres $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ sont égaux à celui de A sur le corps $k(X)$. Puisque l'on a $l = 2$ ou $l = 3$, la proposition 7 assure que cet indice est l^{n+m}. L'indice de $A_{k(Y_n)}$ est donc l^{n+m}.

En conclusion, l'indice de γ_{n+m} sur $k(Y_n)$ est l^{n+m}, et son exposant est l^m. Par ailleurs $A_{k(Y_n)}$ est la restriction au point générique de Y_n de l'algèbre d'Azumaya $\mathcal{A} \times_X Y_n$. L'assertion a) est établie.

Montrons b). L'argument est celui du théorème 2.2 de [SvdB]. Soit $m \geq 2$. L'algèbre $A_{k(Y_n)}$ est d'indice l^{n+m}. L'algèbre $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est d'indice l^{n+m-1}. Supposons $A_{k(Y_n)}$ décomposable, *i.e.* supposons que le corps gauche sous-jacent soit isomorphe à un produit tensoriel de deux corps gauches E et F d'indice strictement plus petit, soit l^a et l^b avec $a + b = n + m$. L'algèbre $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est alors semblable au produit tensoriel de $E^{\otimes l}$ avec $F^{\otimes l}$, et son indice divise le produit des indices de $E^{\otimes l}$ et $F^{\otimes l}$. Mais l'indice de $E^{\otimes l}$ (resp. de $F^{\otimes l}$) divise strictement celui de E (resp. de F) (c'est une propriété générale, voir [Al2], Lemma 7, p. 76, [A] (5.4) p. 204 ou [KMRT] (10.5) p. 116). Ainsi l'indice de $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ divise $l^{a-1} \cdot l^{b-1} = l^{n+m-2}$, ce qui est absurde. Donc $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est indécomposable.

L'assertion c) de l'énoncé est un cas particulier d'un théorème d'Albert ([Al2], chap. XI, Thm. 2, p. 174).

Remarque 1. En caractéristique zéro, les nombres de Betti l-adiques $b_{i,l}$ sont égaux aux nombres de Betti topologiques b_i; par ailleurs, après réduction au cas où $k = \mathbf{C}$, la théorie de Hodge dit que la condition $b_2 - \rho > 0$ équivaut à la non annulation du groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, O_X)$, soit encore à la non annulation du groupe $H^0(X, \Omega^2_X)$, c'est-à-dire à l'existence d'une différentielle holomorphe de degré 2 non triviale. La classification des surfaces algébriques nous fournit de nombreux exemples de surfaces satisfaisant ces propriétés. Il en est ainsi par exemple du produit de deux courbes elliptiques, mais aussi de toute surface projective et lisse dans l'espace projectif $\mathbf{P}^3$ de degré au moins égal à 4.

Remarque 2. Une partie de la démonstration donnée ci-dessus s'étend à d'autres cadres. Si l'on veut par exemple, sur un corps K, simplement construire des algèbres simples centrales d'exposant divisant strictement l'indice, il suffit de disposer d'un corps k et d'une k-algèbre simple centrale d'exposant l^r avec $r \geq 2$. Alors l'algèbre $B = A^{\otimes l}$ est d'indice strictement plus petit que celui de A (par le résultat rappelé ci-dessus). Soit Y la k-variété de Severi-Brauer attachée au corps gauche sous-jacent à B et soit $K = k(Y)$ son corps des fonctions. Le théorème de Schofield et van den Bergh montre que l'indice de A_K est égal à celui de A, soit $l^r \geq l^2$. Mais l'exposant de A_K est égal à l. Le cas le plus simple est celui où k est un corps de nombres arbitraire, on trouve un exemple avec une algèbre d'exposant 2 et d'indice 4 sur le corps des fonctions d'une conique définie sur k.

Si l'on veut fabriquer des exemples dans une tour infinie, comme dans le théorème, il suffit de considérer un corps k, de caractéristique différente de l et dont le groupe de Brauer contient un exemplaire de $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. C'est le cas pour les corps locaux non archimédiens, et pour les corps de nombres. D'après le théorème de Merkur'ev-Suslin [MS], c'est le cas pour tout corps qui contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de l, et qui possède au moins un élément non trivial d'ordre l dans son groupe de Brauer. On trouvera dans Merkur'ev [M1] des conditions nettement plus faibles assurant l'existence d'un tel sous-groupe.

Pour les corps de nombres, pour toute algèbre simple centrale, l'exposant est égal à l'indice, on peut donc recopier entièrement le théorème ci-dessus, avec $X = \mathrm{Spec}(k)$ à la place de la surface complexe X, et avec l premier quelconque.

3. Algèbres non ramifiées sur les produits de courbes.

Au paragraphe 1, on a donné des exemples de corps gauches provenant par diverses constructions (produit de variétés, cup-produit de classes de cohomologie, somme dans le groupe de Brauer) d'une classe fondamentale, la classe de $x \in \mathbf{C}(x)^*/\mathbf{C}(x)^{*n} = H^1_{\text{ét}}(\mathbf{C}(x), \mathbf{Z}/n)$, qui est une classe de cohomologie (nécessairement) ramifiée sur le corps des fractions de la droite projective sur le corps des complexes. Sur une courbe elliptique E sur $\mathbf{C}$, on dispose de classes non ramifiées dans $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/n) \subset H^1(\mathbf{C}(E), \mathbf{Z}/n) \simeq \mathbf{C}(E)^*/\mathbf{C}(E)^{*n}$. Des constructions analogues vont ici donner des classes de cohomologie non ramifiées, des classes d'algèbres simples centrales non ramifiées. Mais il n'est pas clair que ces classes sont non triviales.

Question 1. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \ldots, E_m$ des courbes elliptiques sur le corps $\mathbf{C}$. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit g_i une classe non triviale dans $H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \hookrightarrow \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$. Sur le corps des fractions du produit $X = E_1 \times \cdots \times E_m$, la restriction du cup-produit $g_1 \cup \cdots \cup g_m \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$ est-elle non triviale ?

Une question a priori plus faible (mais équivalente pour $m = 2$, par le théorème de Merkur'ev-Suslin, et conjecturalement équivalente pour tout m) est la suivante : Voyant g_i comme un élément de $\mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$, le symbole $\{g_1, \ldots, g_m\}$ est-il non trivial dans le quotient $K^M_m(\mathbf{C}(X))/l$ du groupe de Milnor $K^M_m(\mathbf{C}(X))$?

La réponse à cette question ne saurait être uniforme. Considérons le cas $m = 2, l = 2$. Soient $E_1/\mathbf{C}$ et $E_2/\mathbf{C}$ deux courbes elliptiques liées par une isogénie $E_2 \to E_1$ de degré 2. Il existe alors g_1 sur E_1 et g_2 sur E_2 comme ci-dessus tels que l'algèbre de quaternions (g_1, g_2) sur le corps des fonctions de $E_1 \times E_2$ soit une algèbre de matrices (pour le voir, poser $F = \mathbf{C}(E_2)$, considérer le point de $E_1(F)/2$ défini par l'isogénie $E_2 \to E_1$ et appliquer la suite exacte donnée dans la proposition 11 ci-après).

On a néanmoins :

Proposition 11. *Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques, et $x \in \mathbf{C}(E_1)^*$, $y \in \mathbf{C}(E_2)^*$, non carrés, et de diviseur un double. Si E_1 et E_2 ne sont pas isogènes, alors l'algèbre de quaternions (x, y) sur le corps des fonctions de $E_1 \times E_2$ est à division.*

Démonstration. Soit E une courbe elliptique sur un corps F de caractéristique différente de 2. Supposons que E possède tous ses points d'ordre 2 sur F. On peut supposer E donnée par l'équation $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$. Soient $f, g \in F(E)^*/F(E)^{*2}$ les classes de $(x-a)$ et $(x-b)$. Ces classes proviennent d'éléments de $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/2)$. La suite de Kummer pour la multiplication par 2 sur E donne naissance à la suite exacte :

$$0 \to E(F)/2 \to (F^*/F^{*2})^2 \to {}_2\mathrm{Br}^0(E) \to 0.$$

Dans cette suite, $\mathrm{Br}^0(E)$ est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Br}(E)$ nuls en l'origine de E, la flèche $E(F)/2 \to (F^*/F^{*2})^2$ envoie le point M sur la classe de la paire $(g(M), f(M))$, et la flèche $(F^*/F^{*2})^2 \to {}_2\mathrm{Br}^0(C)$ envoie (α, β) sur $(\alpha, f) + (\beta, g)$.

Notons désormais $E_1 = E$ et considérons alors le cas particulier où $F = \mathbf{C}(E_2)$ est le corps des fonctions d'une autre courbe elliptique E_2 sur les complexes, non isogène à E_1. Alors $E_1(F) = E_1(\mathbf{C})$, et donc $E_1(F)/2 = 0$. Par ailleurs le groupe de Brauer de $F = \mathbf{C}(E_2)$ est nul. Ainsi $(F^*/F^{*2})^2 \simeq {}_2\mathrm{Br}(E_{1F})$.

Ceci implique que l'application naturelle

$$H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \oplus H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \to {}_2\mathrm{Br}(E_1 \times E_2)$$

définie par $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, f) + (\beta, g)$ est injective; on peut en fait montrer qu'elle est surjective, et définit un isomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(E_1, \mathbf{Z}/2) \otimes H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \simeq {}_2\mathrm{Br}(E_1 \times E_2).$$

(On pourrait faire le même argument avec la multiplication par un premier $l \geq 2$ à la place de $l = 2$, et avec deux fonctions f et g de diviseur une puissance l-ième.)

Ceci donne en particulier le résultat annoncé.

Question 2. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \ldots, E_d$ des courbes elliptiques (non nécessairement distinctes) sur le corps des complexes, et soit $C/\mathbf{C}$ une courbe projective lisse connexe, de genre suffisamment grand pour que la dimension de $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l)$ sur $\mathbf{F}_l$ soit au moins d. Soient $f_1, \ldots, f_d \in H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(C)^*/\mathbf{C}(C)^{*l}$, linéairement indépendants, et pour $i = 1, \ldots, d$, soit $g_i \in H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$ non trivial. Fixons une racine primitive l-ième de 1 dans $\mathbf{C}$. Sur le produit $X = C \times E_1 \times \cdots \times E_d$, on peut considérer le produit tensoriel d'algèbres cycliques $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$. C'est une algèbre non ramifiée. Si l'on prend $C, E_1, \ldots, E_d$ suffisamment générales, cette algèbre est-elle un corps gauche ?

Appendice, par O. Gabber

La question 2, et aussi la question 1 pour des courbes générales, ont une réponse affirmative.

Nous commençons par discuter la question 2. L'idée est de déformer la situation ramifiée de l'exemple 6 en une situation non ramifiée : on peut voir un revêtement de Kummer de $\mathbf{G}_m$ (revêtement qui est ramifié à l'infini) comme limite de revêtements non ramifiés de courbes elliptiques. Par ailleurs une algèbre simple centrale qui a une (bonne) spécialisation à division est elle-même à division.

Nous aurons besoin d'énoncés algébriques généraux.

Lemme A1. *Soit V un anneau de valuation, de corps résiduel $k = V/m$ et de corps des fractions K, et soit A une V-algèbre, libre comme V-module. Si $A \otimes_V k$ est intègre (i.e. est non nulle, et n'admet pas de diviseurs de zéro) alors $A \otimes_V K$ est intègre.*

Démonstration. Il suffit d'observer : $A \otimes_V K \setminus \{0\} = K^* \cdot (A \setminus mA)$.

Lemme A2. *Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma intègre. Soit K un corps contenant k, et soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. La fibre de $\mathcal{A}$ au point générique de X est une algèbre à division si et seulement si la fibre de $\mathcal{A} \otimes_k K$ au point générique de $X \times_k K$ est une algèbre à division.*

Démonstration. Soit η le point générique de X. Pour établir l'implication non triviale, il suffit de montrer que l'algèbre $\mathcal{A}_\eta \otimes_k K$ est intègre. Ceci résulte du lemme A1, car K possède une valuation triviale sur k et de corps résiduel k.

Proposition A3. *Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, soit $\pi : X \to S$ un morphisme lisse et de présentation finie, à fibres géométriques connexes. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. Alors l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de $\mathcal{A}$ au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas une algèbre à division est une union dénombrable de sous-ensembles fermés constructibles de S.*

Démonstration. Par l'approximation noethérienne absolue de Thomason, on peut écrire S comme une limite projective filtrante $S = \varprojlim_\lambda S_\lambda$ de schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$, les morphismes de transition étant affines. On peut trouver λ tel que $X \to S$ provienne par image réciproque d'un morphisme de présentation finie $\pi_\lambda : X_\lambda \to S_\lambda$ satisfaisant les mêmes hypothèses que π, et que $\mathcal{A}$ provienne d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}_\lambda$ sur X_λ.

Le lemme A2 implique que l'ensemble $\Phi \subset S$ est l'image réciproque de l'ensemble analogue $\Phi_\lambda \subset S_\lambda$. On est donc ramené à établir la proposition pour S de type fini sur $\mathbf{Z}$. L'ensemble des points du schéma S est alors dénombrable. Il suffit alors pour établir le résultat voulu de montrer que l'ensemble Φ est stable par spécialisation. On peut pour cela remplacer la base par un trait $S = \mathrm{Spec}(V)$. Il faut montrer que si le point générique de S est dans Φ alors il en est de même du point fermé. Soit K'/K une extension finie du corps des fractions K de V tel que la fibre de $\mathcal{A}$ au point générique de $X_{K'}$ ne soit pas une algèbre à division, soit V' l'anneau d'une valuation de K' étendant celle de V. Il suffit alors d'appliquer le lemme A1 à l'anneau local de $X_{V'}$ au point générique de la fibre spéciale.

Remarque. La proposition A3 sera appliquée plus bas dans une situation où S est un produit de courbes (lisses). Il est dans ce cas évident que $X \to S$ et $\mathcal{A}$ proviennent d'objets analogues définis sur un corps de type fini sur le corps premier (ce qui suffirait pour l'argument de dénombrabilité), et même sur une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. Notons aussi que pour S noethérien, "fermé" et "fermé constructible" sont deux termes équivalents.

Proposition A4. *Soit l un nombre premier. Il existe une courbe $U/\mathbf{Q}$, de corps des fonctions L, un point $P \in U(\mathbf{Q})$ et une courbe elliptique E/L dont le modèle de Néron $\mathcal{E}/U$ est un schéma abélien sur $U \setminus P$, qui a les propriétés suivantes :*

(i) Il a pour fibre en P le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.

(ii) Sur U, on a une suite exacte de U-schémas en groupes

$$0 \to \mu_{l,U} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0,$$

la fibre en P de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ étant donnée par l'élévation à la puissance l dans $\mathbf{G}_m$.

(iii) Toute l-isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$ équipée d'un isomorphisme de son noyau avec μ_l est donnée par évaluation de la suite exacte ci-dessus en un point de $U(\mathbf{C})$.

Démonstration Pour $l = 2$ on peut utiliser la famille de Legendre de courbes elliptiques, soit $U = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[\lambda, \lambda^{-1}])$, $P = (\lambda = 1)$, $\mathcal{E}'$ la U-courbe définie comme la partie lisse de la fermeture projective de $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, la section neutre étant l'infini, et $\mathcal{E}$ la normalisation de $\mathcal{E}'$ dans l'extension quadratique de son corps des fonctions définie par $\sqrt{x-1}$. Ceci définit un revêtement non ramifié de $\mathcal{E}'$. Ce revêtement se scinde au-dessus de l'origine : on choisit l'un des relèvements comme section neutre de $\mathcal{E}$. Pour l impair on définit U' comme le schéma des plongements de μ_l dans $\mathcal{E}$. La théorie transcendante (remarque ci-après) montre que U' est une courbe géométriquement irréductible. Soit U'' l'ouvert de U' complémentaire de tous les points situés au-dessus de P sauf un. On dispose alors d'une immersion fermée $\mu_{l,U''} \to \mathcal{E}_{U''}$ et on prend le quotient.

Remarque. Pour établir l'irréductibilité géométrique de U', il suffit de considérer le schéma des structures canoniques de niveau l sur la famille de Legendre. Le schéma U' est aussi le schéma des plongements de μ_l dans $\mathcal{E}'$. L'irréductibilité voulue est une conséquence du fait connu (Igusa, [I], Thm. 1) que le groupe de monodromie géométrique du système local ${}_l\mathcal{E}'$ (des points de l-torsion) est $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/l)$.

Dans l'anneau local, sur $\mathcal{E}'$, du point générique de la fibre $\mathcal{E}'_P$, il existe alors une fonction inversible g telle que le revêtement non ramifié $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ soit obtenu par adjonction de $g^{1/l}$. L'extension $L(E) = L(E')(g^{1/l})/L(E')$ se spécialise en P en l'extension $\mathbf{C}(t^{1/l})/\mathbf{C}(t)$, où $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t, t^{-1}])$.

Nous pouvons maintenant répondre par l'affirmative à la question 2.

Soit $d \geq 2$ un entier et l un nombre premier. Soit $k \subset \mathbf{C}$ un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, sur lequel la courbe C est définie. Quitte à faire une extension finie de k, on peut supposer que k contient μ_l et que $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l) \subset k(C)^*/k(C)^{*l}$ contient des éléments $f_1, \ldots, f_d$ qui sont $\mathbf{Z}/l$-indépendants et qui le restent par extension du corps de base k à $\mathbf{C}$.

Pour $i = 1, \ldots, d$, soient $U_i, P_i, E_i/L_i, \mathcal{E}_i/U_i, g_i$, des exemplaires, au-dessus de k, des objets décrits ci-dessus. Soient $S = U_1 \times_k \cdots \times_k U_d$ et $X = C \times_S \mathcal{E}'_1 \times_S \cdots \times_S \mathcal{E}'_d$ (les différentes courbes C/k et $\mathcal{E}'_i/U_i$ étant toutes relevées sur S). Comme chaque $(f_i, g_i)_{\zeta_l}$ provient d'une algèbre d'Azumaya (évidente), le produit $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$ est la restriction d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X.

Par la proposition A3 appliquée au morphisme $\pi : X \to S$, l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de $\mathcal{A}$ au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas une algèbre à division est une union dénombrable $\bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$ de sous-ensembles fermés de S.

La restriction de l'algèbre au-dessus d'un $\mathbf{C}$-point s de S d'image $O = (P_1, \ldots, P_d) \in S$ définit sur le point générique de $X_s = C \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m$ une algèbre à division, comme il résulte de l'exemple 6 (ou plutôt de son extension immédiate aux algèbres cycliques de degré l). Chacun des fermés F_r est donc un fermé propre de S.

Soient alors $A_1, \ldots, A_d$ des $\mathbf{C}$-courbes elliptiques équipées d'une l-isogénie, données par un point $s \in S(\mathbf{C}) = U_1(\mathbf{C}) \times \cdots \times U_d(\mathbf{C})$ n'appartenant pas à l'un des fermés propres F_r. Il suffit par exemple pour cela que les invariants j_{A_i} des différentes courbes soient algébriquement indépendants sur k. Alors l'algèbre (non ramifiée) $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$ sur le corps des fonctions du produit $C \times_{\mathbf{C}} A_1 \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} A_d$ est une algèbre à division.

Remarque. Si l'on avait considéré la situation directement sur les complexes, puis appliqué la proposition A3, on aurait alors invoqué le théorème de Baire pour assurer l'existence d'un point de $S(\mathbf{C})$ en dehors de l'union, dénombrable, des fermés propres F_r.

Considérons maintenant la question 1.

Lemme A5. *Soit V un anneau de valuation hensélien de corps résiduel k et de corps des fractions K, et soit M un faisceau abélien localement constant pour la topologie étale sur V. Pour tout entier $i \geq 0$, la flèche de restriction $H^i_{\text{ét}}(V, M) \to H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(K), M) = H^i(K, M)$ est injective.*

Démonstration. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et soit $\overline{k}$ le corps résiduel de la normalisation de V dans $\overline{K}$. Soit $I \subset \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe d'inertie. L'énoncé résulte du fait connu que l'extension

$$1 \to I \to \operatorname{Gal}(\overline{K}/K) \to \operatorname{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$$

est scindée. Dans le cas particulier considéré plus bas, l'anneau V est un anneau de valuation discrète (de rang un) dont le corps résiduel est de caractéristique zéro, le choix d'une uniformisante et d'un système compatible de racines de cette uniformisante définit un scindage.

Lemme A6. *Soit k un corps algébriquement clos et soient K et L deux corps extensions de k. Soit M un $\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$-module. Pour tout entier $i \geq 0$, la flèche de restriction $H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(K), M) \to H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(K \otimes_k L), M)$ est injective.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}(K), M)$ un élément du noyau. Il existe des k-variétés de type fini X et Y, un faisceau étale $\mathcal{M}$ sur X et un ouvert non vide $V \subset X \times_k Y$, tels que α provienne d'un élément β du noyau de la restriction $H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{M}) \to H^i_{\text{ét}}(V, \mathcal{M})$. En se restreignant à une fibre non vide de $V \to Y$ au-dessus d'un point rationnel de Y, on voit que la restriction de β au corps des fonctions rationnelles de X est nulle. *A fortiori* α est nul.

Nous pouvons maintenant établir l'analogue de la proposition A3 :

Proposition A7. *Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, soit $\pi : X \to S$ un morphisme lisse et de présentation finie, à fibres géométriques connexes. Soit i un entier, $\mathcal{F}$ un faisceau étale abélien localement constant constructible sur X et $\alpha \in H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$. Alors l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de α au point générique de la fibre géométrique de π en s est nulle est une union dénombrable de sous-ensembles fermés constructibles de S.*

Démonstration On procède comme pour la proposition A3. Le lemme A6 permet de se ramener au cas où S est de type fini sur $\mathbf{Z}$. Il suffit alors d'établir un énoncé de spécialisation pour Φ. Celui-ci résulte du lemme A5.

Pour $i = 1, \ldots, d$, soient $U_i, P_i, E_i/L_i, \mathcal{E}_i/U_i, g_i$, des exemplaires, au-dessus de $\mathbf{Q}$, des objets décrits dans la proposition A4. Soient $S = U_1 \times_{\mathbf{Q}} \cdots \times_{\mathbf{Q}} U_d$ et $X = \mathcal{E}'_1 \times_S \cdots \times_S \mathcal{E}'_d$ (les différentes courbes $\mathcal{E}'_i/U_i$ étant toutes relevées sur S). Soit $\alpha = (g_1) \cup \cdots \cup (g_m) \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$.

Par la proposition A7 appliquée au morphisme $\pi : X \to S$, l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de α au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas nulle est une union dénombrable $\bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$ de sous-ensembles fermés de S.

La restriction de α au-dessus d'un $\mathbf{C}$-point s de S d'image $O = (P_1, \ldots, P_d) \in S$ définit sur le point générique de $X_s = \mathbf{G}_m \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m$ la classe $(x_1) \cup \cdots \cup (x_m)$ (on note ici $\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x, 1/x])$. Un calcul immédiat de résidus successifs montre que cette classe est non triviale. Chacun des fermés F_r est donc un fermé propre de S. En particulier, on obtient le résultat suivant, qui répond affirmativement à la question 1 :

Soient $E'_1, \ldots, E'_m$ des courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$, et $X = E'_1 \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} E'_m$. Si les invariants $j(E'_i)$, $i = 1, \ldots, m$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors la question 1 a une réponse affirmative : la classe $g_1 \cup \cdots \cup g_m \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$ a une restriction non nulle au point générique de X.

Bibliographie

[Al1] A. Adrian Albert, On the Wedderburn norm condition for cyclic algebras, Bull. Amer. math. Soc. **37** (1931) 301-312.

[Al2] A. Adrian Albert, *Structure of Algebras*, American Mathematical Society, Colloquium Publications vol. **XXIV** (1939; revised edition 1961).

[A] M. Artin, Brauer-Severi varieties (notes by A. Verschoren), in *Brauer groups in Ring Theory and Algebraic Geometry* (ed. F. van Oystaeyen and A. Verschoren), 194-210, L.N.M. **917**, Springer-Verlag 1982.

[Br1] R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, Zweite Mitteilung, Math. Zeitschrift **31** (1929) 733-747.

[Br2] R. Brauer, Über den Index und den Exponenten von Divisionsalgebren, Tôhoku Math. J. **37** (1933) 77-87.

[Bru] E. Brussel, Noncrossed products and nonabelian crossed products over $\mathbf{Q}(t)$ and $\mathbf{Q}((t))$, Amer. J. Math. **117** (1995) 377-393.

[D] M. Deuring, *Algebren*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. **4**, Heft 1 (1935); Zweite Auflage, ibid. Bd. **41** (1968).

[FSS] B. Fein, D. J. Saltman, M. Schacher, Crossed products over rational function fields, J. Algebra **156** (1993) 454-493.

[GB] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson et North-Holland, 1968.

[I] J. I. Igusa, Fibre systems of Jacobian varieties III. Fibre systems of elliptic curves, Amer. J. Math. **81** (1959) 453-476.

[J] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[JW] W. Jacob and A. Wadsworth, Division algebras over Henselian fields, J. Algebra **128** (1990) 126-179.

[KMRT] M. A. Knus, A. S. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The Book of Involutions* (préfacé par J. Tits). Colloquium Publications, vol. **44**. American Mathematical Society, Providence, R. I. (1998).

[K] G. Köthe, Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum, Math. Ann. **105** (1931) 15-39.

[Kr] A. Kresch, Hodge-theoretic obstruction to existence of quaternion algebras, alg-geom preprint. math.AG/0009115. A paraître dans Bull. London Math. Soc.

[L1] T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Mass. Reading 1973 (Second printing, 1980).

[L2] T. Y. Lam, Fields of u-invariant 6 after A. Merkurjev, in *Ring Theory 1989 in honor of S. A. Amitsur*, ed. L. Rowen, (Ramat Gan and Jerusalem, 1988/1989), 12-30, Israel Math. Conf. Proc., **1**, Weizmann, Jerusalem, 1989.

[M1] A. S. Merkur'ev, Brauer groups of fields, Comm. in Alg. **11** (22) (1983) 2611-2624.

[M2] A. S. Merkur'ev, Algèbres simples et formes quadratiques (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **55** (1991) 218-224; trad. anglaise, Math. USSR-Izv. **38** (1992), 215-221.

[M3] A. S. Merkur'ev, K-Theory of Simple Algebras, in *K-Theory and Algebraic Geometry: connections with quadratic forms and division algebras* (ed. W. Jacob and A.

Rosenberg), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58.1** (1995), Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1995.

[MS] A. S. Merkur'ev et A. A. Suslin, K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et symbole de restes normiques (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. Tom **46** (1982) 1011-1046, 1135-1136; trad. anglaise, Math. USSR Izvestija **21** (1983) 307-340.

[N] T. Nakayama, Über die direkte Zelegung einer Divisionsalgebra, Japanese Journal of Mathematics **12** (1935) 65-70.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[SvdB] A. Schofield and M. van den Bergh, The index of a Brauer class on a Brauer-Severi variety, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992) 729-739.

[vdB] M. van den Bergh, *Algebraic subfields and splitting fields of division algebras over function fields*, Ph. D. thesis, Universiteit Antwerpen, Wilrijk 1985.

[T1] J.-P. Tignol, Algèbres indécomposables d'exposant premier, Advances in Math. **65** (1987) 205-228.

[T2] J.-P. Tignol, Réduction de l'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique, Bull. Soc. Math. Belgique **42** (1990) 735-745.

J.-L. Colliot-Thélène

C.N.R.S., U.M.R. 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

courriel : colliot@math.u-psud.fr

O. Gabber

C.N.R.S., I.H.E.S., 35 route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

courriel : gabber@ihes.fr