Un corollaire d'un théorème de Merel

On enregistre une remarque suscitée par un message de R. van Luijk concernant un travail de J. Desjardins et R. Winter.

Un théorème bien connu de L. Merel [M] borne la torsion des courbes elliptiques sur un corps de nombres k, et ce de façon uniforme en fonction uniquement du degré du corps de k sur $\mathbf{Q}$. Je remarque qu'on en déduit facilement une extension au cas des corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

On utilise le lemme bien connu suivant.

Lemme. *Soient k un corps de caractéristique zéro, Y une k-variété intègre et $f : X \to Y$ une famille lisse de variétés abéliennes. Si la fibre générique de f possède un point rationnel exactement de n-torsion, alors pour tout point (schématique) P du schéma Y, la fibre $X_P/\kappa(P)$ possède un point rationnel exactement de n-torsion.*

Démonstration. Pour tout entier n, le schéma des points de n-torsion est fini étale sur Y. En particullier le sous-schéma formé des sections d'ordre exactement n est une union disjointe d'images de sections de f. CQFD

Voici l'extension du théorème de Merel.

Théorème *Soit k un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, soit C une k-variété intègre, et soit E/C une famille lisse de courbes elliptiques. Alors il existe un entier N (dépendant de k) tel que, pour tout point $P \in C(k)$, l'ordre d'un point k-rationnel de torsion sur la fibre E_P est au plus N.*

Démonstration. Le corps k s'écrit comme le corps des fractions d'une $\mathbf{Q}$-variété intègre $U = \mathrm{Spec}(A)$, qu'on peut choisir finie étale, d'un certain degré d, sur un ouvert d'un espace affine $\mathbf{A}^r_{\mathbf{Q}}$. Quitte à restreindre U on peut étendre la situation $E/C/k/\mathbf{Q}$ à $F/D/U/\mathbf{Q}$ avec F/D famille de courbes elliptiques sur D. Un point k-rationnel P de C s'étend en une section $\tau_P : V \to D$ de la projection $D \to U$ sur un ouvert $V \subset U$ (ouvert dépendant de P) non vide. L'image réciproque de $F \to D$ au-dessus de V via τ_P est une famille de courbes elliptiques dont la fibre générique est E_P. L'ensemble des points fermés de V de degré au plus d est Zariski dense dans V (considérer les images réciproques des points de $\mathbf{A}^r(\mathbf{Q})$), en particulier est non vide. Le théorème de Merel [M] assure que l'ordre des points de torsion des courbes elliptiques sur un corps de nombres de degré au plus d est borné par un entier $N(d)$. Le lemme permet alors de conclure. CQFD

Si l'on note $\phi(d)$ la borne sur l'ordre d'un point de torsion donnée par le théorème de Merel sur les corps de nombres de degré au plus d et si, pour k de type fini sur $\mathbf{Q}$, on note $d_{min}(k)$ le degré minimal de la présentation de k comme extension finie k/E d'une extension transcendante pure E de $\mathbf{Q}$, alors on peut borner N dans le théorème par $\phi(d_{min}(k))$.

[M] Loïc Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. Invent. math. **124** (1996), no. 1-3, 437–449.

JLCT, 29 août 2020, révisé 18 février 2021

Cette note est maintenant en appendice de l'article [DW].

[DW] Julie Desjardins, Rosa Winter, Density of rational points on a family of del Pezzo surfaces of degree one,
https://arxiv.org/abs/2102.05563

Les auteurs ont depuis été informés que le résultat avait déjà été observé, voir la note 1 de l'article

Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes, Anna Cadoret and Akio Tamagawa Invent math (2012) 188, p. 83–125.