Sommes de carrés

Jean-Louis Colliot-Thélène

Exposé au séminaire $M\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\eta$, Orsay 3 juin 2008

Questions (autour du 17ème problème de Hilbert, 1900)

Dans un corps F

Caractériser les sommes de carrés

Décider s'il existe un entier $n = n(F)$ tel que toute somme de carrés dans F peut s'écrire comme une somme d'au plus n carrés.

Sommes de carrés dans un corps F

$$\boxed{\text{n}} + \boxed{\text{m}} = \boxed{\text{n+m}}$$

$$\boxed{\text{n}}.\boxed{\text{m}} = \boxed{\text{nm}} \text{ et } \boxed{\text{n}}/\boxed{\text{m}} = \boxed{\text{nm}}.$$

$F = \mathbf{R}(x)$
$f \geq 0$ sur $\mathbf{R}$ là où définie $\Longrightarrow f = \boxed{2}$

Outil :

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2$$

Donc

$$\boxed{2} . \boxed{2} = \boxed{2\ }$$

$F = \mathbf{Q}$

Caractérisation des sommes de 2 carrés (Fermat)

$f \geq 0 \Longrightarrow f = \boxed{4}$ (Euler, 1770)

Outil :

$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2) =$
$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2 + t_1z_2 - z_1t_2)^2 +$
$(x_1z_2 - z_1x_2 + y_1t_2 - t_1y_2)^2 + (x_1t_2 - t_1x_2 + z_1y_2 - y_1z_2)^2$
donc

$$\boxed{4}.\boxed{4} = \boxed{4\ }$$

Caractérisation des sommes de 3 carrés (Legendre 1798, Gauß)

$F = \mathbf{R}(x,y)$
$f \in \mathbf{R}(x,y), \;\; f \geq 0 \;\mathrm{sur}\; \mathbf{R}^2$ là où définie $\Longrightarrow f = \boxed{4}$
(Hilbert, 1893)

Un outil : $\boxed{4}.\boxed{4} = \boxed{4\;}$

1900 : 17ème problème de Hilbert

Kann jede rationale Funktion, die überall, wo sie definiert ist, nichtnegative Werte annimmt, als Summe von Quadraten von rationalen Funktionen dargestellt werden ?

Si $f \in \mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$ est positive sur $\mathbf{R}^n$, est-elle somme de carrés ?
De combien de carrés ?
Questions analogues pour $f \in \mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_n)$

$F = \mathbf{Q}(x)$
$f \in F, F \geq 0 \Longrightarrow f = \boxed{8}$
(Landau, 1906)
Deux outils :
$\boxed{8} . \boxed{8} = \boxed{8\ }$
et
dans un corps de nombres totalement imaginaire, $-1 = \boxed{4}$

E. Artin, O. Schreier, 1927

Dans un corps, un élément est somme de carrés si et seulement si il est positif dans tout ordre total du corps

E. Artin, 1927

Tout polynôme $P(x_1, \dots, x_n)$ positif sur $\mathbf{R}^n$ est somme de carrés dans $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$

Plus généralement, si X est une $\mathbf{R}$-variété algébrique irréductible, et si $f \in \mathbf{R}(X)$ dans le corps des fonctions est positive sur $X(\mathbf{R})$ là où elle est définie, alors f est somme de carrés dans $\mathbf{R}(X)$

Mêmes énoncés avec $\mathbf{Q}$ à la place de $\mathbf{R}$

E. Witt, 1934

Si X est une $\mathbf{R}$-courbe irréductible, toute fonction rationnelle $f \in \mathbf{R}(X)$ positive sur $X(\mathbf{R})$ est une somme de 2 carrés

Tsen, 1936

Sur $\mathbf{C}(x_1, \dots, x_d)$ et plus généralement sur le corps des fonctions $\mathbf{C}(X)$ d'une variété de dimension d sur le corps des complexes, toute forme quadratique en au moins $2^d + 1$ variables a un zéro non trivial.
Cas particulier d'un énoncé sur les formes de degré m en au moins $m^d + 1$ variables.

(1933 pour $n = 1$, 1936 pour n quelconque, redécouvert par Lang 1953)

E. Witt, 1937

Théorie des formes quadratiques sur un corps quelconque
Théorème de simplification
Groupe de Witt WF des formes quadratiques sur un corps F modulo les hyperboliques
Idéal fondamental $IF \subset WF$ des formes de rang pair
Puissances I^nF de cet idéal

J. W. S. Cassels, 1964

$1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ n'est pas somme de n carrés dans $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$

A. Pfister 1965-1966

Théorie des formes quadratiques multiplicatives
Dans un *corps*, les valeurs prises par une forme

$$\langle\langle a_1, a_2, ..., a_m\rangle\rangle = \langle 1, -a_1\rangle \otimes \langle 1, -a_2\rangle \otimes ... \otimes \langle 1, -a_m\rangle$$

forment un sous-groupe multiplicatif du corps

En particulier, dans un corps

$$\boxed{\text{n}}.\boxed{\text{n}} = \boxed{\text{n}\ }$$

pour tout $n = 2^m$

A. Pfister 1967-1971

S X est une $\mathbf{R}$-variété algébrique irréductible de dimension n, et si $f \in \mathbf{R}(X)$ dans le corps des fonctions est positive sur $X(\mathbf{R})$ là où elle est définie, alors f est somme de 2^n carrés dans $\mathbf{R}(X)$

Milnor, 1970
Questions/conjectures sur le lien entre formes quadratiques, K-théorie (de Milnor) et cohomologie galoisienne des corps
Homomorphismes naturels

$$h_n : K_n^M(F)/2 \to H^n_{gal}(F, \mathbf{Z}/2)$$

et

$$s_n : K_n^M(F)/2 \to I^n F / I^{n+} F$$

Ces homomorphismes sont-ils des isomorphismes ?

Cas $n = 1$

$$F^*/F^{*2} \simeq H^1_{gal}(F, \mathbf{Z}/2)$$

(description des extensions quadratiques de corps)

$$F^*/F^{*2} \simeq IF/I^2F$$

via $a \mapsto x^2 - ay^2$

$$IF/I^2F \simeq F^*/F^{*2}$$

via le déterminant signé

Quand F contient μ_p, il y a aussi un homomorphisme naturel

$$K_n^M(F)/p \to H^n_{gal}(F, \mathbf{Z}/p)$$

Une conjecture dite de Bloch-Kato prédit que c'est un isomorphisme

Pour $n = 1$

$$F^*/F^{*p} \simeq H^1(F, \mathbf{Z}/p)$$

(théorie de Kummer, théorème 90 de Hilbert)

Cassels-Ellison-Pfister 1971

Il existe $f \in \mathbf{R}(x, y)$ qui est somme de 4 carrés mais pas de 3

Merkur'ev, 1981
Preuve des conjectures de Milnor pour $n = 2$

Merkur'ev et Suslin, 1982
Preuve de la conjecture de Bloch-Kato pour $n = 2$

Outils : K-théorie algébrique de Quillen, théorème de Riemann-Roch pour la K-théorie algébrique supérieure
Variétés utilisées : coniques, variétés de Severi-Brauer

K. Kato 1986
Théorie du corps de classes supérieur pour les courbes sur un corps de nombres

CT 1986 (appendice à Kato)
Si X est une $\mathbf{Q}$-courbe irréductible, et si $f \in \mathbf{Q}(X)$ est positive sur $X(\mathbf{R})$, alors c'est une somme de 8 carrés
La preuve utilise le résultat de Merkur'ev ($n = 2$)

Conjecture de Milnor en niveau $n = 3$ et $n = 4$
1986-1990
Rost, Merkur'ev-Suslin, Jacob-Rost

U. Jannsen 1990-présent
Généralisation des résultats de Kato 1986 aux corps de fonctions de variétés sur un corps de nombres, en toute dimension d

CT-Jannsen 1991

La combinaison de ces résultats en théorie du corps de classes supérieur, et de la conjecture (purement algébrique) de Milnor en niveau $n = d + 2$ implique : si X est une $\mathbf{Q}$-variété irréductible de dimension $d \geq 2$ toute fonction rationnelle $f \in \mathbf{Q}(X)$ positive sur $X(\mathbf{R})$ est une somme d'au plus 2^{d+1} carrés.

Remarque (Arason) Si on se contente de 2^{d+2} et on utilise la conjecture de Milnor en niveau $n = d + 3$ alors on peut se passer du corps de classes supérieur

Conjecture de Milnor établie en tout niveau n

Voevodsky (médaille Fields 2002), annonces à partir de 1996, textes publiés en 2002 et complément pour les formes quadratiques Orlov-Vishik-Voevodsky 1995–2007
Utilise des idées et résultats de Markus Rost
Développement de la cohomologie motivique (algébrisation de la topologie algébrique, a remplacé la K-théorie algébrique) (Voevodsky, F. Morel, ...)
Variétés utilisées : quadriques définies par des formes de Pfister

CT-Jannsen (1991) donne alors : pour toute variété X de dimension $d \geq 2$ sur $\mathbf{Q}$, toute somme de carrés dans le corps des fonctions $\mathbf{Q}(X)$ peut s'écrire comme une somme d'au plus 2^{d+1} carrés

2001 Vaste généralisation du théorème de Tsen (sur un corps de fonctions d'une variable) aux variétés rationnellement connexes : théorème de Graber, Harris et Starr

Y a-t-il des applications sur les corps de fonctions de variétés algébriques sur les réels ?

Questions ouvertes

Une variété rationnellement connexe sur un corps $\mathbf{R}(C)$ avec C courbe sur $\mathbf{R}$ sans point réel possède-t-elle un point sur $\mathbf{R}(C)$?

Une forme quadratique à 5 variables sur $\mathbf{R}(X)$ avec X surface sur $\mathbf{R}$ sans point réel a-t-elle un zéro ?

Existe-t-il des sommes de carrés dans $\mathbf{R}(x, y, z)$ qui ne sont pas sommes de 7 carrés ?

Références

Albrecht Pfister, Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology, Lecture Notes Series **217**, London Mathematical Society 1995

T. Y. Lam, Introduction to quadratic forms over fields, Graduate Studies in Mathematics **67**, Amer. Math. Soc. 2005

D. Orlov, A. Vishik et V. Voevodsky, An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms. Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 1, 1–13.