

Complément à l'article [CT20] sur les zéro-cycles, suggéré par C. Voisin (10 septembre 2025).
Des résultats sans hypothèse d'existence d'un point rationnel sont obtenus dans on article récent
Rank 2 vector bundles and degrees of points of del Pezzo surfaces,
arXiv math <https://arxiv.org/abs/2509.17996>

Théorème . Soit k un corps de caractéristique zéro.
Soit X/k une surface de del Pezzo de degré d .

(f') Si $d = 3$, et $X(k) \neq \emptyset$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 3$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

(amélioration de CT20, Thm. 3.3. (f), qui donnait $r = 10$.)

(f') Si $d = 2$ et $X(k) \neq \emptyset$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 6$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

(amélioration de CT20, Thm. 4.4 (d), qui donnait $r = 43$.)

Si $d = 1$, tout zéro-cycle de degré au moins $r = 21$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.
(amélioration de CT20, Thm. 5.1 (d), qui donnait $r = 904$).

Démonstration. On utilise la proposition 2.11 (d) de [CT20]. Cela permet de supposer que le corps de base k est fertile. Soit $P \in X(k)$. Soit $z = \sum_i n_i P_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, P_i points fermés de X , un zéro-cycle. Supposons $\deg(z) = e \geq r$. Comme k est fertile et X projective lisse géométriquement rationnellement connexe, le théorème 2.9 (b) de CT20 appliqué à un grand multiple d'un faisceau très ample assure l'existence d'une courbe $\Gamma \subset X$ projective, lisse, géométriquement intègre qui contient le support d'un zéro-cycle z_1 rationnellement équivalent à z sur X et un point $Q \in X(k)$ rationnellement équivalent à P sur X . Riemann-Roch sur la courbe projective, lisse, géométriquement intègre Γ . Soit $m > 0$ un entier tel que le degré $e + m$ de $z_1 + mQ$ est plus grand que le genre de Γ . Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe projective, lisse, géométriquement intègre Γ donne l'existence d'un zéro-cycle effectif z_2 sur Γ de degré $e + m$ rationnellement équivalent à $z_1 + mQ$ sur $\Gamma \subset X$ et donc rationnellement équivalent à $z + mP$ sur X .

D'après l'énoncé (a) des théorèmes 3.3, 4.4, 5.1, comme on a $e + m \geq r + m \geq r$, le zéro-cycle effectif z_2 est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle $z_3 + sP$, avec z_3 effectif de degré au plus r , et $s \geq 0$.

Ainsi z est rationnellement équivalent à $z_3 + (s - m)P$, avec z_3 effectif et $s - m = \deg(z) - \deg(z_3) > 0$ (car $\deg(z) \geq r$ et $0 \leq \deg(z_3) \leq r$).

Remarque.

1) Une fois que l'on a établi le théorème ci-dessus, dans le cas où $X(k)$ est non vide, les autres énoncés des théorèmes 3.3, 4.4 et 5.1 de [CT20] suivent.

2) La démonstration utilise le théorème 2.9 de [CT20]. Comme indiqué dans l'erratum, ce théorème est correct, mais la démonstration donnée là doit être complétée par le théorème 2.2 bis de l'erratum.

3) Au moins dans le cas où k est fertile, la démonstration établit ceci. Soit $r = 3$ dans le cas X est une dP_3 , puis $r = 6$ dans le cas où X est une dP_2 , puis $r = 21$ dans le cas où X est une dP_1 . Soit $P \in X(k)$. Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à r est rationnellement équivalent sur X à un zéro-cycle $z' + nP$ avec $n \geq 0$ et z' est effectif de degré au plus r . Par spécialisation à partir de $k((t))$, le résultat vaut sur tout corps k .