Cours de J.-L. Colliot-Thélène
Points rationnels sur les variétés non de type général

Orsay/IHP, 2ème semestre 1998/99.
Début du cours : 1er Février 1999
Rédaction préliminaire, 5 mars 1999. Corrections mineures, 24 avril 2003.

Chapitre I : Classification birationnelle des surfaces

1. Préliminaires sur le groupe de Néron-Severi

Dans ce paragraphe, on passe en revue un certain nombre de résultats sur les diviseurs effectifs, amples, numériquement effectifs, dus à Nakai, Moishezon, Kleiman, Grothendieck.

La dualité entre le cône des courbes effectives et le cône des classes de diviseurs nef est un ingrédient important des travaux de Mori.

Un certain nombre des résultats ici présentés admettent une généralisation en dimension supérieure à 2. En dimension 2, l'identification entre les sous-variétés de dimension 1 et sous-variétés de codimension 1 enrichit – et complique – la situation.

Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe.

Sur le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ on a la forme d'intersection $\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$, qui est symétrique et bilinéaire. On note $N(X) = Num(X)$ le quotient de $\mathrm{Pic}(X)$ par le sous-groupe des classes numériquement équivalentes à zéro. Le groupe $N(X)$ est un groupe libre de type fini (conséquence du théorème de Néron-Severi). La forme d'intersection $N(X) \times N(X) \to \mathbf{Z}$ n'a pas de noyau (mais le déterminant de la forme n'est pas forcément ± 1).

On sait ce qu'est un faisceau inversible ample. Ces faisceaux forment un semi-groupe dans $\mathrm{Pic}(X)$, il en est de même de leurs classes dans $N(X)$.

Un faisceau inversible L est dit numériquement effectif (en abrégé, nef) si pour toute courbe intègre $C \subset X$ on a $(L.C) \geq 0$. Ces faisceaux forment un semi-groupe dans $\mathrm{Pic}(X)$, il en est de même de leurs classes dans $N(X)$.

On note $N(X)_{\mathbf{Q}} = N(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $N(X)_{\mathbf{R}} = N(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Un $\mathbf{Q}$-cône convexe dans un $\mathbf{Q}$-vectoriel est un sous-ensemble stable par addition et par multiplication par $\mathbf{Q}_{\geq 0}$. Un $\mathbf{R}$-cône convexe dans un $\mathbf{R}$-vectoriel est un sous-ensemble stable par addition et par multiplication par $\mathbf{R}_{\geq 0}$.

Le cône (convexe) des courbes $\mathrm{Ef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les $\mathbf{Q}_{\geq 0}[C]$ pour $[C]$ la classe dans $N(X)$ d'une courbe intègre. C'est aussi l'ensemble des éléments de la forme $\lambda[D]$ avec $\lambda \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $[D]$ la classe d'une courbe effective.

On note $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$ le cône réel (stable par multiplication par $\mathbf{R}_{\geq 0}$) qui est l'adhérence de $\mathrm{Ef}(X)$ dans $N(X)_{\mathbf{R}}$.

Le cône (convexe) des diviseurs amples $\mathrm{Amp}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les (formé des) $\mathbf{Q}_{\geq 0}[H]$ pour $[H]$ la classe dans $N(X)$ d'un fibré inversible ample (on pourrait bien sûr remplacer ici "ample" par "très ample").

Pour tout $L \in \mathrm{Pic}(X)$ et tout $H \in \mathrm{Pic}(X)$ ample, on sait que $L + nH$ est ample pour $n >> 0$.

Le cône (convexe) $\mathrm{Nef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{R}}$ est par définition le semi-groupe engendré par les (formé des) $\mathbf{R}_{\geq 0}[L]$ pour $[L]$ la classe dans $N(X)$ d'un fibré inversible numériquement effectif (nef). C'est par définition un cône fermé dans $N(X)_{\mathbf{R}}$. Pour $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la propriété pour $[L]$ d'appartenir à $\mathrm{Nef}(X)$ ne dépend clairement que de la classe de $[L]$ dans $N(X)$. On dira qu'un diviseur, un faisceau inversible, une classe dans $\mathrm{Pic}(X)$ est nef si son image dans $N(X)$ l'est.

On a de façon évidente : $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X)$.

Théorème 1.1 (Nakai-Moishezon) *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L est ample

(ii) $(L.L) > 0$ et pour toute courbe intègre $C \subset X$, on a $(L.C) > 0$.

Que (i) implique (ii) est trivial. Pour la réciproque, voir Hartshorne, Algebraic Geometry. □

Ce théorème implique le fait non évident que pour $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la propriété pour $[L]$ d'appartenir à $\mathrm{Amp}(X)$ ne dépend que de la classe de $[L]$ dans $N(X)$.

Proposition 1.2 *Soit $L, H \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ avec L nef et H ample. Alors pour tout $a \in \mathbf{Q}, a > 0$, on a $L + aH \in \mathrm{Amp}(X)$.*

Démonstration On sait que pour $L + aH$ est ample pour $a >> 0$. Pour C courbe intègre, on a $(L+aH.C) = (L.C)+a(H.C) > 0$ pour tout $a > 0$ puisque $(L.C) \geq 0$ (L nef) et $(H.C) > 0$ (H ample).

Soit $a > 0, a \in \mathbf{Q}$. On a $(L + a/2H.L + a/2H) = (L.(L + aH) + a^2/4(H.H)$. Si $(L + aH$ est ample, alors $L.(L + aH) \geq 0$ car L est nef et donc $(L + a/2H.L + a/2H) > 0$. Le critère de Nakai-Moishezon appliqué à $L + a/2H$ montre alors que $L + a/2H$ est ample. En résume, pour $a > 0$, $L + aH$ ample implique $L + a/2H$ ample. Comme L ample implique $L + \varepsilon H$ ample pour tout $\varepsilon > 0$, ceci établit la proposition. □

Cet énoncé implique que tout élément de $\mathrm{Nef}(X) \subset N(X)_{\mathbf{R}}$ est limite d'éléments de $\mathrm{Amp}(X) \subset N(X)_{\mathbf{Q}}$. Comme la forme d'intersection est clairment continue sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, et comme elle est (strictement) positive sur les éléments non nuls de $\mathrm{Amp}(X)$, on conclut :

Corollaire 1.3 *Si $L \in N(X)_{\mathbf{R}}$ est nef, alors $(L.L) \geq 0$.* □

Proposition 1.4 *Soit $L \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ non nul. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $L \in \mathrm{Amp}(X)$

(ii) $(L.D) > 0$ pour tout D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$.

Démonstration

(a1) Si L est ample, alors $L.C > 0$ pour toute courbe effective, et donc $(L.D) \geq 0$ pour tout D dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$.

(a2) Supposons $(L.D) = 0$ pour un tel D. Soit $M \in N(X)$ tel que $(M.D) < 0$ (la forme d'intersection sur $N(X)_{\mathbf{R}}$ est non dégénérée). Alors $(nL + M.D) = (M.D) < 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ réel on peut écrire $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ et $M_2 \in N(X)_{\mathbf{R}}$ petit. Pour n assez grand, on a $nL + M_1 \in \mathrm{Amp}(X)$ et donc $(nL + M_1.D) \geq 0$ d'après la partie (a1). Alors $0 > (M.D) = (nL + M.D) \geq (M_2.D)$. Pour M_2 suffisamment petit, on a une contradiction.

(b) Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ avec $(L.D) > 0$ pour tout D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$. En particulier $(L.C) > 0$ pour tout toute courbe intègre. Soit H ample. Pour D non nul dans $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$, le quotient $(D.L)/(D.H) \in \mathbf{R}$ est bien défini d'après (a) et ce quotient n'est jamais nul par hypothèse. Il est invariant par multiplication par un réel dans $\mathbf{R}^*_{>0}$. Fixons une norme euclidienne sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, et soit $\mathcal{C}$ la trace sur $\overline{\mathrm{Ef}(X)}$ de la boule de rayon un. La fonction $D \mapsto (D.L)/(D.H)$ sur $\mathcal{C}$ prend les mêmes valeurs que sur $\overline{\mathrm{Ef}(X)}\backslash 0$. Elle est continue, strictement positive, et $\mathcal{C}$ est fermé borné, donc compact. Il existe donc $\varepsilon > 0$ qu'on peut prendre dans $\mathbf{Q}_{\geq 0}$ tel que $(D.L)/(D.H) \geq \varepsilon$ pour tout $C \in \overline{\mathrm{Ef}(X)}\backslash 0$. Alors $L - \varepsilon H$ est nef. Comme H est ample, il résulte de la proposition 1.2 que $L = L - \varepsilon H + \varepsilon H$ est ample. □

Corollaire 1.5 *Le cône ample est ouvert dans $N(X)_{\mathbf{Q}}$ (pour la topologie induite par celle de $N(X)_{\mathbf{R}}$. Sa fermeture dans $N(X)_{\mathbf{R}}$ est le cône nef.*

Démonstration On sait $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Nef}(X)$ (trivial) et l'on a vu que $\mathrm{Amp}(X)$ est dense dans $\mathrm{Nef}(X)$. Soit H ample. Soit $v_i, i = 1, ..., n$ une base de $N(X)_{\mathbf{Q}}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}(\mathcal{X})_{\mathbf{R}}$ le compact évoqué ci-dessus. Sur $\mathcal{C}$, la fonction $C \mapsto (H.C)$ est supérieure à une constante c

strictement positive, et chaque fonction $C \mapsto (v_i.C)$ est bornée. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_i \in \mathbf{Q}$ avec $0 \leq x_i < \varepsilon$ on ait $((H + \sum_i x_i v_i).C) > 0$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, et donc $(H + \sum_i x_i v_i)$ ample d'après la proposition 1.4. □

Proposition 1.6 *Soit $L \in \operatorname{Pic}(X)$ avec $(L.L) > 0$, et soit $H \in \operatorname{Pic}(X)$ une classe ample. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(L.H) > 0$;

(ii) il existe un entier $n > 0$ tel que $H^0(X, nL) \neq 0$.

Démonstration

(a) Soit $D > 0$ un diviseur effectif de classe nL. On ne peut avoir $D = 0$ car $(L.L) > 0$. Donc $D > 0$, et $(H.nL) = (H.D) > 0$, et donc $(H.L) > 0$.

(b) Supposons $(L.H) > 0$. Par dualité de Serre, la dimension de $H^2(X, nL)$ est la dimension de $H^0(X, K - nL)$. De $(H.K - nL) > 0$ pour $n >> 0$ on conclut que $H^0(X, K - nL) = 0$. Pour $n >> 0$, le théorème de Riemann-Roch donne alors

$$h^0(X, nL) \geq (nL.nL - K)/2 + \chi(X, O_X) > 0$$

car $(L.L) > 0$. □

Ainsi pour $(L.L) > 0$ on a un critère numérique pour l'effectivité d'un multiple suffisamment grand de L. Inversement :

Corollaire 1.7 *Soit $L \in \operatorname{Pic}(X)$ tel que $(L.L) > 0$. Alors $(L.H) > 0$ pour un ample H implique $(L.H) > 0$ pour tout autre ample H.* □

Théorème 1. 8 (Théorème de l'indice) *Soit $H \in N(X)$ une classe ample. Sur l'orthogonal de H dans $N(X)_{\mathbf{Q}}$, la forme d'intersection est définie négative.*

Démonstration Comme $(H.H) > 0$, donc $(H.H) \neq 0$, la forme d'intersection induit sur l'orthogonal de $\mathbf{Q}H \in N(X)_{\mathbf{Q}}$ une forme quadratique non dégénérée. Il suffit de démontrer que cette forme est négative ou nulle sur tout élément de cet orthogonal. Si ce n'était pas le cas, il existerait $L \in \operatorname{Pic}(X)$ avec $(L.H) = 0$ et $(L.L) > 0$. Pour un entier $r >> 0$, $L + rH$ est ample. On a $(L.L + rH) = (L.L) > 0$. Comme $(L.L) > 0$, le corollaire apliqué à L et au fibré ample $L + rH$ implique $(L.H) > 0$, contradiction. □

Ainsi sur $N(X)_{\mathbf{R}}$, la forme quadratique est de type $(1, -1, \ldots, -1)$. On en déduit :

Corollaire 1.9 *Soit $L \in N(X)$ tel que $(L.L) > 0$. Soit $M \in N(X)$ tel que $(L.M) = 0$. Alors $(M.M) \leq 0$, et $(M.M) = 0$ si et seulement si $M = 0 \in N(X)$.* □

Un autre outil dont on aura besoin est le critère de contractibilité de Castelnuovo, sur un corps de base parfait.

Proposition 1.10 (critère de contractibilité de Castelnuovo) *Soient k un corps parfait et X une k-surface projective, lisse et géométriquement connexe. Soit $C \subset X$ une courbe intègre. Si l'on a $(C.C) < 0$ et $(C.K) < 0$, alors C est une courbe exceptionnelle : il existe une k-surface Y projective, lisse et géométriquement connexe, et un k-morphisme birationnel $f : X \to Y$ envoyant Y sur un point fermé $P \in Y$, tel que l'on ait $C = f^{-1}(P)$ (au sens schématique) et que f induise un isomorphisme $X \setminus C \simeq Y \setminus P$.*

Démonstration Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $\overline{C} = \sum_{i=1}^r C_i$. Le groupe de Galois permute les C_i transitivement. On a $0 > (C.C) = \sum_i (C_i.C_i) + \sum_i (C_i. \sum_{j \neq i} C_j))$. Comme la forme d'intersection sur $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ est invariante sous l'action du groupe de Galois, il existe un entier s avec $s = (C_i.C_i)$ pour tout i et un entier $t \geq 0$ avec $t = (C_i. \sum_{j \neq i} C_j))$ pour tout i. On a donc $0 > rs + rt$, soit $s + t < 0$ et donc $s < 0$. Par ailleurs il existe un entier u avec $u = (C_i.K)$ pour tout i. On a $0 > (C.K) = ru$, d'ou $u < 0$. On a donc $(C_i.K) < 0$ et $(C_i.C_i) < 0$. La formule du genre arithmétique montre alors que C_i est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ et qu'on a $s = (C_i.C_i) = -1$ et $(C_i.K) = -1$. On obtient alors $-1 + t < 0$, et donc $t = 0$. La courbe $\overline{C}$ est une union de courbes exceptionnelles gauches deux à deux. La méthode usuelle pour établir le critère de contractibilité de Castelnuovo permet alors de trouver un trouver un faisceau inversible dont le système linéaire associé définit le morphisme $X \to Y \subset \mathbf{P}^N_k$ requis. □

Un morphisme $X \to Y$ comme ci-dessus est appelé une contraction (élémentaire). L'application rationnelle inverse est appelée un éclatement (élémentaire). On a les faits suivants :

Tout k-morphisme $f : X \to Y$ k-birationnel de k-surfaces projectives, lisses, géométriquement connexes est un composé de contractions. Une k-surface est donc k-minimale (pour la relation de domination birationnelle parmi les k-surfaces projectives, lisses, géométriquement connexes) si et seulement si elle ne contient pas de courbe exceptionnelle (sur k). Il existe des k-surfaces minimales X telles que $X \times_K K$ ne soit pas minimal pour K/k extension convenable. Pour X, C et Y comme ci-desssus, on a $\mathrm{rang}(N(Y) = \mathrm{rang}(N(X)) - 1$. Ainsi étant donnée une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe, après un nombre fini de contractions, on obtient une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe k-minimale. On dit que Y est un k-modèle minimal de X. En général (même sur un corps algébriquement clos) il n'y a pas un k-modèle minimal unique (à k-isomorphisme près).

Théorème 1.11 (Théorème de rationalité) *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons que le faisceau canonique K n'est pas nef. Pour tout faisceau inversible ample H, le nombre réel positif*

$$b = b(H) = \sup\,\{t \in \mathbf{R},\ H + tK \text{ est nef}\}$$

est un nombre rationnel.

Démonstration (Kawamata, Miles Reid, Pelham Wilson, cf. C. Peters).

On a vu que le cône ample est l'ensemble des points rationnels de l'intérieur du cône nef, lequel est fermé. Il existe donc $b \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $H + tK$ est ample pour tout $t \in \mathbf{Q}_{>0}, t < b$, $H + bK$ est nef et $H + tK$ n'est nef pour aucun $t > b$.

Si $N(X)_\mathbf{Q}$ est de dimension un, alors $N(X)_\mathbf{Q} = \mathbf{Q}[H]$. Le cône ample est $\mathbf{Q}_{>0}[H]$, le cône nef est $\mathbf{R}_{\geq 0}[H]$, come K n'est pas nef, on a $K = -cH$ avec $c \in \mathbf{Q}_{>0}$, et $b = 1/c \in \mathbf{Q}$. Supposons dorénavant $N(X)_\mathbf{Q}$ de dimension au moins 2.

Soient u, v des entiers positifs tels que $0 \leq (u-1)/v < b$. Alors $H + ((u-1)/v)K$ est ample. Soit $L = vH + (u-1)K \in \mathrm{Pic}(X)$. On a $h^1(K+L) = h^1(-L)$ et $h^2(K+L) = h^0(-L)$ par dualité de Serre. Comme L est ample, on a $h^0(-L) = 0$. Comme L est ample et k de caractéristique zéro, on a $h^1(-L) = 0$ d'après un théorème de Kodaira. Le théorème de Riemann-Roch donne alors $h^0(L + K) = \chi(L + K) = (L + K.L)/2 + \chi(O_X)$, soit pour tous u, v comme ci-dessus, $h^0(vH + uK) = P(v, u)$ avec $P(U, V) \in \mathbf{Q}[V, U]$ un polynôme quadratique en V et U, non nul. Pour p, q entiers naturels, le polynôme en une variable $P(Xq, Xp)$ est quadratique en X ou identiquement nul. S'il est identiquement nul, alors $P(V, U)$ est divisible par la forme linéaire $Vp - Uq$. Le polynôme $P(Xq, Xp)$ n'est donc identiquement nul que pour un nombre fini de couples (p, q).

Supposons $b \notin \mathbf{Q}$. Le sous-groupe $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}b$ de $\mathbf{R}$ est alors dense. Il existe donc (Dirichlet) une infinité de couples d'entiers naturels p, q (positifs) tels que

$$p/q - 1/3q < b < p/q.$$

Choisissons le couple (p, q) tel que le polynôme quadratique $P(Xq, Xp)$ n'est pas identiquement nul. On a donc $P(kq, kp) \neq 0$ pour au moins un k entier, $1 \leq k \leq 3$, que l'on fixe désormais. Posons $u = kp$ et $v = kq$. On a $(u - 1)/v = p/q - 1/kq < b$, donc d'après ce que l'on a vu ci-dessus $0 \leq h^0(vH + uK) = P(v, u) \neq 0$. On conclut $h^0(vH + uK) > 0$, il existe un diviseur effectif $D = \sum_i n_j C_j$ avec $C_j \subset X$ courbe intègre et chaque n_j entier strictement positif, soit encore $H+(u/v)K = \sum_j a_j C_j$ avec $a_j \in \mathbf{Q}_{>0}$. On a donc $H+(u/v)K.C \geq 0$ pour toute courbe C intègre distincte de l'une des courbes C_j. Comme on a aussi $H.C > 0$, on $H+tK.C \geq 0$ pour tout $0 < t \leq u/v$. pour chaque C_j, Le réel b coïncide donc avec le plus grand $t \in \mathbf{R}$ tel que $H+tK.C_j \geq 0$ pour chaque C_j. On a $H+(u/v)K.C_j < 0$ pour au moins un j, car $H+(u/v)K$ n'est pas nef, donc ce plus grand t est fini, et il est clairement rationnel. Ceci contredit l'hypothèse initiale . $\square$

2. Le théorème de classification des surfaces

Rappelons-en l'énoncé.

Théorème 2.1 (Castelnuovo, Enriques, ..., Manin, Iskovskih, Mori) *Soient k un corps de car. zéro, X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe et $K = K_X \in \mathrm{Pic}(X)$ le faisceau canonique. Alors pour X, on a au moins des propriétés suivantes :*

(i) Il existe sur X une courbe exceptionnelle.

(ii) Le rang de $N(X)$ est un et le faisceau $-K$ est ample.

(iii) Le rang de $N(X)$ est 2, et X est une surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe Y projective, lisse, géométriquement connexe. Pour chaque point fermé $M \in Y$, de corps résiduel $k(M)$, la fibre X_M est une $k(M)$-conique intègre.

(iv) Le faisceau K est nef, i.e. $(K.C) \geq 0$ pour toute courbe $C \subset X$.

Certaines surfaces sont à la fois du type (iii) et (i). A cette exception près, les propriétés ci-dessus sont exclusives l'une de l'autre.

Démonstration

Tout d'abord l'hypothèse (i) exclut les hypothèses (ii) et (iv). Une courbe exceptionnelle C satisfait $(C.K) < 0$. S'il existe une telle courbe sur X, on ne saurait être dans le cas (ii) (par exemple parce que le rang de $N(X)$ ne saurait chuter par contraction). On ne peut être dans le cas (iv) de façon évidente.

L'hypothèse (iv) exclut toutes les autres. Le cas (i) a déjà été vu. Dans le cas (ii), $-K$ est ample et donc K ne saurait être nef. Dans le cas (iii), la classe d'une fibre F satisfait $(F.K) < 0$.

Sur un corps algébriquement clos, le seul exemple de surface satisfaisant à la fois (i) et (iii) est la surface $\mathbf{F}_1$ (éclaté de $\mathbf{P}^2$ en un point). Sur un corps k non algébriquement clos, il peut exister une surface cubique X/k possédant une droite k-rationnelle et telle que $\mathrm{Pic}(X)$ soit de rang 2. Une analyse détaillée des cas possibles est faite par Iskovskih (1979, Théorème 5).

Dans la suite de la démonstration, on suppose que X ne possède pas de courbe exceptionnelle et que K n'est pas nef.

Si $N(X)$ est de rang un, pour tout $L \in N(X)$, soit $L = 0$, soit L est ample, soit $-L$ est ample. Si K n'est pas nef, alors $-K$ est ample, et on est dans le cas (ii).

Supposons dorénavant que X est k-minimale, K non nef et le rang de $NS(X)$ au moins égal à 2. Il reste à montrer que l'on est alors dans le cas (iii).

Comme le rang de $N(X)$ est au moins 2, et que les faisceaux amples engendrent $\mathrm{Pic}(X)$, il existe une classe ample $H \in \mathrm{Pic}(X)$ dont la classe dans $N(X)$ n'appartient pas à la droite $\mathbf{R}[K] \in N(X)_{\mathbf{R}}$. Comme K n'est pas nef, on peut appliquer le théorème de rationalité : il existe $b \in \mathbf{Q}_{>0}$ tel que $H+tK$ est ample pour tout $t \in \mathbf{Q}_{>0}, t < b$, $H+bK$ est nef mais pas ample (Corollaire 1.5) et $H+tK$ n'est nef pour aucun $t \in \mathbf{R}, t > b$. Soit $b = u/v$ avec $u > 0, v > 0$ entiers. Le faisceau inversible $L = vH+uK$ est nef mais pas ample. Comme faisceau nef, il vérifie $(L.L) \geq 0$ (voir §I).

Supposons d'abord $(L.L) > 0$. Comme L est nef mais pas ample, par le critère de Nakai-Moishezon, il existe une courbe intègre C telle que $(L.C) = 0$. De $(L.L) > 0$ et $(L.C) = 0$, et du théorème de l'indice on déduit $(C.C) \leq 0$, et $(C.C) = 0$ est exclu car cela impliquerait (toujours par le théorème de l'indice) que C est numériquement nul, ce qui n'est pas, car on a $(H.C) > 0$. Ainsi $(C.C) < 0$. On a $0 = (L.C) = (H + bK.C)$. De $b > 0$ et $(H.C) > 0$ on déduit $(C.K) < 0$. On a donc $(C.C) < 0$ et $(C.K) < 0$, et C est une courbe exceptionnelle sur X, ce qu'on avait exclu.

On a donc $(L.L) = 0$. Comme L est nef, on a $(L.H) \geq 0$. Si on avait $(L.H) = 0$, alors d'après le théorème de l'indice on aurait $L = 0 \in N(X)$, et donc $H + bK = 0 \in N(X)$ ce qui est exclu par hypothèse (H et K sont indépendants). On a donc $(L.H) > 0$. Alors $0 = (L.L) = (H + bK.L) = (H.L) + b(K.L)$ et donc $(K.L) < 0$.

Pour tout $m > 0$ entier, le faisceau $mL - K$ est dans le cône ample. Ainsi $h^0(K - mL) = 0$, et par dualité de Serre $h^2(mL) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch donne alors $h^0(mL) \geq (mL.mL - K)/2 + \chi(O_X) = -m(L.K)/2 + \chi(O_X)$.

De $(K.L) < 0$ on conclut $h^0(mL) > 0$ pour $m >> 0$. Quitte à remplacer L par mL, on a donc trouvé un faisceau inversible L nef mais pas ample, satisfaisant : $(L.L) = 0$, $(L.K) < 0$ et $h^0(L) \geq 2$.

Soit $\sum_i n_i C_i$ une section de L. Comme L est nef, on a $(L.C_i) \geq 0$. Mais de $(L.L) = 0$ on déduit alors $(L.C_i) = 0$. On a alors $(uH + vK.C_i) = 0$. Comme H est ample, on a $(H.C_i) > 0$ et donc $(K.C_i) < 0$. En résumé : pour toute composante C d'une section de L, on a $(C.K) < 0$. Cet argument vaut encore lorsque l'on passe de k à une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Ainsi, pour toute composante C d'une section de $L \otimes_k \overline{k}$, on a $(C.K) < 0$.

Le système linéaire des sections de L peut avoir une partie fixe. Soit Δ cette partie fixe. Par définition, Δ est le plus grand diviseur (avec multiplicités) contenu dans tout diviseur effectif de classe $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Soit $D \in \mathrm{Pic}(X)$ la classe de Δ, et soit M le faisceau inversible tel que $M + D = L$. Le système linéaire des sections de M n'a pas de composante fixe. Il en résulte que M est nef.

Comme L est nef, on a $(L.D) \geq 0$ et $(L.M) \geq 0$. On a $0 = (L.L) = (L.D) + (L.M)$. Ainsi $(L.D) = 0$ et $(L.M) = 0$. Comme M est nef, on a $(M.M) \geq 0$ et $(D.M) \geq 0$. Par ailleurs $0 = (L.M) = (M.M) + (D.M)$. Ainsi $(M.M) = 0$ et $(M.D) = 0$.

On a $0 = (L.M) = (vH + uK.M)$ avec $u > 0, v > 0$ entiers. On a $0 \leq (H.M)$. Si on avait $(H.M) = 0$, comme on a $(M.M) = 0$, du théorème de l'indice on conclurait que $M = 0 \in N(X)$. Mais alors $L = D$ et $h^0(L) = 1$, contradiction. Ainsi $(H.M) > 0$. De $0 = (L.M) = (vH+uK.M)$ on conclut $(K.M) < 0$.

Comme M est nef, si $\sum_i n_i C_i$ est un diviseur effectif section de M, de $(M.M) = 0$ on tire comme ci-dessus $(M.C_i) = 0$ pour toute composante intègre C_i. Ceci implique en particulier $(C_i.C_i) \leq 0$ pour chaque i. Le même argument avec L montre que $(L.C_i) = 0$ pour tout i. Ainsi $(H + bK.C_i) = 0$ et donc $(K.C_i) < 0$. On ne peut avoir $(C_i.C_i) < 0$ et $(K.C_i) < 0$, car il n'y a pas de courbe exceptionnelle sur X. Ainsi, pour chaque i, on a $(K.C_i) < 0$ et $(C_i.C_i) = 0$.

Pour le faisceau inversible M, on a les propriétés : $(M.M) = 0$, $h^0(M) \geq 2$.

Soit $\sum_{i \in I} n_i C_i$ une section de M. De $(M.M) = 0$ on tire $(M. \sum_{i \in I} n_i C_i) = 0$ et comme M est nef ceci impose $(M.C_i) = 0$ pour tout i. Pour tout i il existe par hypothèse une section Y_i de M ne contenant pas C_i. De $(Y_i.C_i) = 0$ on conclut que $Y_i \subset X$ ne rencontre pas C_i. Ainsi le système des sections $H^0(X, M)$ n'a pas de point base.

Il définit donc un k-morphisme de X dans un espace projectif. L'image Z de ce morphisme est de dimension au moins un, et il ne saurait être de dimension deux, car cela forcerait $(M.M) > 0$. Soit $X \to Y \to Z$ la factorisation de Stein du morphisme projectif $X \to Z$. Comme la factorisation de Stein est préservée par extension quelconque du corps de base et que X est lisse donc géométriquement normale, on conclut que la k-courbe propre, intègre, normale Y satisfait encore ces propriétés par passage de k à une clôture algébrique de k. Ainsi Y est une k-courbe projective, lisse, géométriquement intègre. Notons f le k-morphisme $X \to Y$.

Une fibre géométrique F_s de ce morphisme est une somme de composantes de sections de $L \otimes_k \overline{k}$. Une telle fibre satisfait donc $(F_s.K) < 0$ (voir plus haut).

La fibre générique de f est une courbe projective, lisse, géométriquement intègre. Il en est donc de même des fibres géométriques F_s pout tout s dans un ouvert de Zariski non vide de $\overline{Y}$. Une telle fibre F_s satisfait $(F_s.F_s) = 0$ et, d'après ce qu'on a vu plus haut, $(F_s.K) < 0$. La formule du genre arithmétique d'une courbe montre que F_s est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, et que $(F_s.K) = -2$. Ainsi la fibre générale de f est une courbe lisse de genre zéro, et il en est donc de même de la fibre générique de f. Les fibres lisses de f sont donc des coniques.

Il reste à établir que toutes les fibres de f sont des coniques. Nous allons montrer plus précisément que ce sont des coniques intègres.

Par les propriétés de base de la factorisation de Stein, si M est un point fermé de Y et $F = X_M$ est la fibre en M, F est connexe. Ecrivons le diviseur F comme une somme $F = \sum_{i=1}^r a_i C_i$ avec a_i entier, $a_i \geq 1$ et chaque courbe C_i intègre. Comme F est une fibre, on a $(F.C) = 0$ pour toute composante verticale C d'une fibre. Supposons $r \geq 2$. On a $a_1(C_1.C_1) = (a_1 C_1.F - \sum_{i \geq 2} a_i C_i) > 0$, l'inégalité stricte provenant du fait que F est connexe. On trouve donc $(C_1.C_1) < 0$. Par ailleurs, comme établi plus haut, on a $(C_1.K) < 0$. Mais alors C_1 est une courbe exceptionnelle, ce qu'on avait exclu. Ainsi $r = 1$.

On a $F = aC$ avec C intègre et $a \geq 1$. Si l'on avait $a \geq 2$, cette propriété serait préservée sur $\overline{k}$: on aurait un point $s \in Y(\overline{k})$ dont la fibre F_s serait multiple. Mais la fibration $X \to Y$ étant une fibration en coniques sur une courbe, elle admet, par le théorème de Tsen, une section sur $\overline{k}$, et ceci exclut l'existence d'une fibre multiple. Ainsi $a = 1$, et l'on a montré que toute fibre $F = X_M$ pour M point fermé de Y est une courbe intègre.

Ceci établit que le rang de $N(X)$ est 2. En effet, la fibre générique X_η est une courbe lisse de genre zéro, donc son groupe de Picard est libre de rang un. Le noyau de la restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_\eta)$ est engendré par les composantes des fibres de $X \to Y$ et par l'image réciproque de $\mathrm{Pic}(Y)$. Comme les fibres sont toutes intègres, ce noyau est engendré par l'image réciproque de $\mathrm{Pic}(Y)$ dans $\mathrm{Pic}(X)$. Deux classes de même degré dans $\mathrm{Pic}(Y)$ définissent des classes numériquement équivalentes dans $\mathrm{Pic}(X)$. Ainsi le rang de $N(X)$ est au plus deux, et en considérant une fibre F et une multisection de $X \to Y$, on voit que ce rang est exactement 2.

Soit $F = X_M$ une fibre au-dessus d'un point fermé M. La courbe intègre F satisfait $(F.F) = 0$ et $(F.K) < 0$. Comme k est parfait, le diviseur $\overline{F}$ se décompose sur $\overline{k}$ comme $\overline{F} = \sum_{i=1}^r F_i$, tous les F_i étant conjugués les uns des autres sous l'action du groupe de Galois. On a $(F_i.K) < 0$ pour tout i. Par invariance de la forme d'intersection sous l'action du groupe de Galois, il existe des entiers $s \geq 0$ et $t \geq 0$ avec $(F_i.F_i) = s$ et $(F_i.(\sum_{j \neq i} F_j) = t$ pour tout i. On a

$$0 = (X.X) = (\sum_i F_i. \sum_i F_i) = \sum_i (F_i.F_i) + \sum_i (F_i.(\sum_{j \neq i} F_j)) = rs + rt.$$

Ainsi $s + t = 0$. On a clairement $t \geq 0$, et donc $s \leq 0$. La formule du genre arithmétique appliquée à une courbe F_i montre alors que chaque F_i est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, et qu'il y a deux possibilités :

(a) $s = 0$, donc $t = 0$. Pour tout i, on a $(F_i.F_i) = 0$ et $(F_i.K) = -2$. Pour $j \neq i$, on a $(F_j.F_i) = 0$. Dans ce cas F est une courbe lisse intègre sur son corps de base $k(M)$, c'est une conique lisse.

(b) $s = -1$. On a, pour tout i, $(F_i.F_i) = -1$ et $(F_i.K) = -1$ (donc F_i est une courbe exceptionnelle sur $\overline{X}$). Le nombre de courbes F_i est pair, pour chaque i il existe un indice $j(i) \neq i$ et une seul tel que $F_j(i)$ rencontre F_i, et on a $(F_{j(i)}.F_i) = 1$. Dans ce cas, la fibre F sur le corps $k(M)$ est intègre, il existe une extension quadratique $K(M)$ de $k(M)$ sur laquelle F se décompose en deux droites conjuguées. La fibre $F/k(M)$ est bien une conique intègre. □

Remarques.

(1) La lecture des textes sur ce sujet laisse l'impression qu'une fois fait le travail du §1, devrait se réduire à quelques arguments de géométrie des cônes convexes. La présente rédaction pêche autant que les précédentes en se laissant embarquer dans des arguments terre à terre.

(2) La démonstration donnée ci-dessus ne vaut qu'en caractéristique zéro. La raison en est que nous avons utilisé le “théorème de rationalité”, lequel repose sur le théorème de Kodaira sur l'annulation de H^1. Mais le théorème vaut sur un corps quelconque : voir l'article original de Mori et le livre de Kollár.

Lemme 2.2 *Soit k un corps algébriquement clos, X_1 et X_2 deux k-surfaces projectives, lisses, connexes, et $f : X_1 \to X_2$ un k-morphisme birationnel, i.e. un composé déclatements. Notons K_i la classe canonique sur X_i. Soit $C_1 \subset X_1$ une courbe intègre dont l'image dans X_2 est une courbe (intègre) C_2. On a alors $(K_1.C_1) \geq (K_2.C_2)$.*

Démonstration Il suffit de démontrer l'énoncé lorsque f est l'éclaté en un unique point $P \in X_2$. Soit $E \subset X_1$ la courbe exceptionnelle image réciproque de P. Soit $m \geq 0$ la multiplicité de C_2 en P. On a $f^*(C_2) = C_1 + mE \in \mathrm{Pic}(X_1)$. Par ailleurs on a $K_1 = f^*(K_2) + E$. Enfin on sait que $f^* : \mathrm{Pic}(X_2) \to \mathrm{Pic}(X_1)$ est une injection qui préserve la forme d'intersection, et qu'on a la décomposition $\mathrm{Pic}(X_1) = f^*(\mathrm{Pic}(X_2)) \oplus \mathbf{Z}E$, orthogonale vis-à-vis de la forme d'intersection. On a donc

$$(K_1.C_1) = ((f^*K_2 + E).(f^*C_2 - mE)) = (K_2.C_2) + m,$$

ce qui établit l'énoncé. $\square$

Théorème 2.3 *Soit k un corps et X une k-surface telle que K_X est nef.*

(i) Sur toute extension K/k de corps, la K-surface X_K est K-minimale.

(ii) Si Y est une k-surface projective, lisse et géométriquement connexe, et si $f : Y \to X$ est une k-application rationnelle k-birationnelle, alors f est un k-morphisme.

(iii) Si X et X' sont des surfaces à faisceau canonique nef, toute k-application birationnelle $X \to X'$ est un isomorphisme.

(iv) Si une k-surface X n'est pas géométriquement birationnelle à une surface réglée, alors elle admet un k-modèle absolument minimal unique à k-isomorphisme près.

Démonstration

(i) C'est clair, car si K est nef il est aussi nef sur toute extension de corps, et il ne saurait y avoir de courbes exceptionnelles sur aucune extension.

(ii) Il suffit d'établir l'énoncé sur un corps algébriquement clos. Supposons que l'application rationnelle n'est pas un morphisme. On sait qu'il existe des morphismes birationnels, composés d'éclatements, $Z \to X$ et $Z \to Y$. Le morphisme $Z \to Y$ est un composé d'éclatements simples (en un seul point) $Z_i \to Z_{i+1}$, avec $Z = Z_0$, et $Z_n = Y$, avec $n \geq 1$. Soit $E \subset Z$ la courbe exceptionnelle de l'éclatement $Z_0 \to Z_1$. Si l'image de la courbe exceptionnelle E par $Z \to X$ est une courbe C, alors $-1 = (K_Z.E) \geq (K_Y.C)$, mais $(K_Y.C) \geq 0$ car K_Y est nef. Ainsi l'image de E par $Z_0 \to X$ est un point, et alors l'application rationnelle $Z_1 \to X$ est un morphisme. De proche en proche, on voit que $X \to Y$ est un morphisme.

(iii) et (iv) sont des conséquences évidentes.

Remarque Les propriétés ci-dessus sont en défaut pour les surfaces k-minimales des types (ii) et (iii) du théorème. C'est d'ailleurs ce qui fait la difficulté de l'arithmétique de ces surfaces.

3. Géométrie des surfaces de Del Pezzo

Soit k un corps arbitraire. Une k-variété X projective, lisse, géométriquement connexe est dite de Fano si le faisceau anticanonique $-K_X$ est ample. En dimension un, une variété de Fano est une forme de la droite projective, le faisceau canonique est très ample et le système de ses sections identifie X à une conique lisse dans $\mathbf{P}^2_k$. En dimension deux, une variété de Fano est classiquement appelée surface de Del Pezzo.

Des discussions modernes des surfaces de Del Pezzo se trouvent dans le livre de Manin *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, dans un article de Demazure (*in* LNM 777), et dans le livre de Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties.* Dans ce qui suit, j'adopte pour l'essentiel la présentation originale de Kollár (pages 171 à 178 de son livre). Cette présentation ne présuppose pas que les surfaces de Del Pezzo sont des surfaces rationnelles.

Soit X une surface de Del Pezzo : $-K$ est ample.

Lemme 3.1 *Soit X/k une surface de Del Pezzo. On a $h^2(X, O_X) = 0$, $h^1(X, O_X) = 0$ et donc $\chi(X, O_X) = 1$. On a $1 \leq (K.K) \leq 9$.*

Démonstration Par dualité de Serre, on $h^2(X, O_X) = h^0(K) = 0$ car $-K$ est ample. Montrons que l'on a $h^1(X, O_X) = 0$, ce qui impliquera $\chi(O_X) = 1$. On peut supposer le corps de base algébriquement clos. L'hypothèse $h^2(X, O_X) = 0$ entraîne que la variété de Picard est réduite, de dimension $q = h^1(X, O_X)$. Soit l premier distinct de la caractéristique. On peut supposer le corps k algébriquement clos. On considère les nombres de Betti l-adiques de X. On a $b_1 = 2q$. Supposons $q > 0$. Alors $H^1_{et}(X, \mathbf{Z}/l^n)$ qui est la l^n-torsion de la variété de Picard, est isomorphe à $(\mathbf{Z}/l^n)^{2q}$. A un élément d'ordre exactement l^n correspond un revêtement cyclique non ramifié, connexe, $g : Y \to X$ de groupe $\mathbf{Z}/l^n$. L'image réciproque de K_X sur Y est K_X car g est étale. Par ailleurs, comme le morphisme est fini, l'hypothèse $-K_X$ ample implique $-K_Y = g^*(-K_X)$ ample. Ainsi Y est encore une surface de Del Pezzo, et l'on a donc $h^2(Y, O_Y) = 0$, et $b_1(Y) = 2q(Y)$. On vérifie $q(X) = q(Y)$. On a $(K_Y.K_Y) = l^n(K_X.K_X)$. Par ailleurs la formule de Noether (cohomologie l-adique) dit :

$$(K_Y.K_Y) + 2 - 2b_1 + b_2 = 12(1 - h^1(O_Y) + h^2(O_Y)$$

soit ici

$$(K_Y.K_Y) + 2 + b_2 = 12 - 8q(Y).$$

Ceci donne

$$l^n \leq l^n(K_X.K_X) \leq 12$$

pour tout n, ce qui est absurde. Ainsi $H^1(X, O_X) = 0$. On a pour les nombres de Betti l-adiques les valeurs $b_0 = b_4 = 1$, $b_1 = b_3 = 0$. Par ailleurs on a l'inégalité $\rho \leq b_2$, où $\rho \geq 1$ désigne le rang du groupe de Néron-Severi de X. La formule de Noether s'écrit donc $(K.K) + 2 + b_2 = 12$, d'où $(K.K) \leq 9$. L'inégalité $1 \leq (K.K) = (-K. - K)$ vient de ce que $-K$ est ample. □

Remarque Par dualité de Serre, $h^1(X, O_X) = h^1(X, K)$. En caractéristique zéro, comme $-K$ est ample, le théorème de Kodaira implique $h^1(X, K) = 0$, et donc $h^1(X, O_X) = 0$. En caractérisique positive, Kollár propose d'autres démonstrations.

De la formule de Noether il résulte donc :

$$(K.K) + b_2 = 12.$$

Lemme 3.2 *Soit X/k une surface de Del Pezzo. Soit $m \geq 0$. On a :*
(a) $h^2(-mK) = 0$;
(b) $h^0(-mK) \geq \frac{m(m+1)}{2}(K.K) + 1$.

Démonstration On a $h^2(-mK) = h^0((1+m)K)$ par dualité de Serre, et ce dernier groupe est nul car $-K$ est ample. On a $h^1(-mK) = h^1((1+m)K)$ (dualité de Serre). L'inégalité (b) résulte alors du théorème de Riemann-Roch. □

Remarque En caractéristique zéro, comme $-K$ est ample, ce dernier groupe est nul par le théorème d'annulation de Kodaira. Du théorème de Riemann-Roch et de 3.1 on déduit alors un énoncé plus fort que (b), à savoir $h^0(-mK) = \frac{m(m+1)}{2}(K.K) + 1$. On établira cette égalité en toute caractéristique ci-dessous.

Lemme 3.3 *Soit k un corps algébriquement clos et soit X/k une surface de Del Pezzo. Soit $C \subset X$ une courbe section du faisceau $-K$. Alors $H^0(C, O_C) = k$; en particulier, C est connexe.*

Démonstration On considère la suite exacte

$$0 \to O_X(-C) \to O_X \to O_C \to 0.$$

La suite de cohomologie se lit

$$0 \to H^0(X, K) \to H^0(X, O_X) \to H^0(C, O_C) \to H^1(X, K)$$

On a $h^0(X, K) = 0$, et $h^1(X, K) = 0$ comme on a vu plus haut. Ainsi $k = H^0(X, O_X) \simeq H^0(C, O_C)$ et C est connexe. □

(On pourrait aussi utiliser le résultat de Ramanujam, si l'on démontrait d'abord que $-K$ n'a pas de composante fixe.)

Soit $C \subset X$ une courbe géométriquement intègre qui est une section du faisceau $-K$. La formule du genre arithmétique d'une courbe tracée sur une surface donne ici $p_a(C) = \frac{(-K+K)}{2} + 1 = 1$. Lorsque C n'est pas intègre, on a le :

Lemme 3.4 *Soit k un corps algébriquement clos et soit X/k une surface de Del Pezzo. Si une section de $-K$ n'est pas intègre, toute composante intègre de cette section est une courbe rationnelle lisse.*

Démonstration Kollár III.2.2.3. □

Lemme 3.5 *Soit k un corps algébriquement clos et soit X/k une surface de Del Pezzo. Une section générale C de $-K$ est intègre.*

Kollár III.3.2.4. Expliquer la première inégalité en haut de la page 173. □

Ceci sera utilisé dans plusieurs calculs subséquents pour faire des réductions au cas d'une courbe intègre $C \subset X$ de genre arithmétique un, à partir de la suite exacte

$$0 \to O_X(-C) \to O_X \to O_C \to 0.$$

Lemme 3.6 *Soit k un corps et soit X/k une surface de Del Pezzo. On a :*
(a) $h^1(-mK) = 0$ pour $m \geq 0$
(b) $h^0(-mK) = \frac{m(m+1)}{2}(K.K) + 1$ pour $m \geq 0$.

Démonstration Kollár III.2.5. Démonstration par récurrence sur m, en utilisant le lemme 3.5.

Remarque Comme indiqué plus haut, en caractéristique zéro, ces énoncés résultent du théorème d'annulation de Kodaira et de la dualité de Serre.

Lemme 3.7 *Soit k un corps et soit X/k une surface de Del Pezzo. Le système $-mK$ est libre pour $m(K.K) \geq 2$, il est très ample si $(K.K) \geq 3$. Pour $(K.K) = 2$, $-2K$ est très ample. Pour $(K.K) = 1$, $-3K$ est très ample. L'anneau canonique $\oplus_{m \geq 0} H^0(X, -mK)$ est engendré par ses éléments de degré ≤ 1 lorsque $(K.K) \geq 3$, par ses éléments de degré ≤ 2 lorsque $(K.K) = 2$, et par ses éléments de degré ≤ 3 lorsque $(K.K) = 1$.*

Démonstration Kollár III.3.4. (Réduction aux énoncés analogues pour une courbe géométriquement intègre de genre arithmétique un).

Remarque Pour établir les résultats d'amplitude, on peut appliquer directement les résultats généraux de Reider, qui sont rappelés ci-dessous.

Remarque Compte tenu du lemme 3.6, on voit que pour $d = (K.K) \geq 3$, une surface de Del Pezzo sur un corps k peut être réalisée comme une surface de degré d dans l'espace projectif $\mathbf{P}^d_k$, surface engendrant $\mathbf{P}^d$ projectivement. Réciproquement, pour $3 \leq d \leq 9$, toute telle surface lisse est une surface de Del Pezzo.

Proposition 3.8 *Soit k un corps et soit X/k une surface de Del Pezzo. Pour $1 \leq (K.K) \leq 4$, on a la description suivante de X :*
(i) $(K.K) = 1$, X est une surface de degré 6 dans un espace multihomogène $\mathbf{P}(1,1,2,3)$;
(ii) $(K.K) = 2$, X est une surface de degré 4 dans un espace multihomogène $\mathbf{P}(1,1,1,2)$;
(iii) $(K.K) = 3$, X est une surface cubique dans $\mathbf{P}^3$;
(iv) $(K.K) = 4$, X est une intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$.
Réciproquement, toute telle surface lisse est une surface de Del Pezzo.

Démonstration Kollár III.3.5.

Lemme 3.9 *Soit k un corps algébriquement clos et soit X/k une surface de Del Pezzo de degré $(K.K) \leq 4$. Alors X contient une courbe exceptionnelle.*

Démonstration Kollár III.3.6. et III.6.1. Méthode classique, la méthode des dimensions. On considère la correspondance : courbe exceptionnelle tracée sur une surface du type indiqué. Il suffit d'exhiber une surface contenant un nombre fini non nul de telles courbes exceptionnelles. La démonstration de Kollár est plus précise. Elle montre que pour $(K.K)$ fixé, le nombre de telles courbes ne dépend pas de la surface (on obtiendra une autre démonstration de ce fait plus loin). Notons que pour $3 \leq (K.K) = d$, les courbes exceptionnelles sur $X \subset \mathbf{P}^d$ (plongement anticanonique) ne sont autres que les droites tracées sur X: pour une telle courbe, $(E.-K) = 1$.

L'énoncé suivant a été utilisé dans la démonstration du théorème de rationalité de Castelnuovo (Théorème 3.3).

Proposition 3.10 *Soit k un corps algébriquement clos et X/k une surface de Del Pezzo avec $\rho = \dim(N(X)) = 1$. Alors $X \simeq \mathbf{P}^2$.*

Démonstration Soit H un générateur ample de $N(X)$ modulo torsion. On a $-K \cong rH$ avec $r \geq 1$, donc $h^0(K-H) = 0$, et donc par dualité de Serre $h^2(H) = 0$. Riemann-Roch donne $h^0(H) \geq \frac{1+r}{2}(H.H) + 1 \geq 2$. Soit C une courbe section de H. Toute telle courbe est intègre, car H est un générateur du groupe $N(X)/\text{torsion} \simeq \mathbf{Z}$. La formule du genre arithmétique donne $2p_a(C) - 2 = (C.C + K) = (1-r)(H.H)$.

Si $r > 1$, alors $p_a(C) = 0$, et donc $C \simeq \mathbf{P}^1$ et on a deux possibilités :
(a) $r = 2$ et $(H.H) = 2$
ou
(b) $r = 3$ et $(H.H) = 1$.

Le cas (a) ne peut se produire. En effet on a $h^0(H) \geq 4$. Ainsi on peut imposer à une courbe C du système linéaire $H^0(X,H)$ de posséder un point double en un point donné (cela représente trois conditions linéaires). Mais ceci contredit le fait que toute courbe C section de H est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

Remarque Kollár donne un autre argument pour éliminer le cas (a).

On suppose dorénavant $r = 3$ et $(H.H) = 1$, on fixe une courbe $C \simeq \mathbf{P}^1$ dans $H^0(X,H)$. En utilisant la suite exacte de faisceaux

$$0 \to O_X \to O_X(C) \to O_C(C) \to 0$$

on montre que le système $H^0(X,H)$ est libre. Ceci définit donc un morphisme $g : X \to \mathbf{P}^n$ de X dans un espace projectif, d'image engendrant ce projectif. L'image S_1 de ce morphisme n'est pas une courbe car $(H.H) = 1 > 0$, c'est donc une surface engendrant le projectif. Comme on a $(H.H) = 1$, cette surface est de degré 1, et on a forcément $n = 2$ et $S_1 = \mathbf{P}^2$. De $(H.H) = 1$ on déduit que le degré de l'application dominante g est un, ainsi g est un morphisme birationnel. Comme le rang de $N(X)$ est un, ce morphisme est un isomorphisme.

Il reste à examiner le cas $r = 1$. Dans ce cas le faisceau ample $-K$ est un générateur de $N(X)/\text{tors}$. Toute section de $-K$ est une courbe intègre satisfaisant $p_a(C) = 1$. Soit $(K.K)$. On a $l(-K) \geq d + 1$.

Si l'on avait $(K.K) \geq 6$, on pourrait imposer à une courbe C dans le système $H^0(X,-K)$ de posséder deux points doubles (cela fait 6 conditions linéaires), ce qui est impossible pour une courbe intègre de genre arithmétique 1. Ainsi on a $(K.K) \leq 5$.

Kollár utilise un autre argument, à base de théorie de Mori (Kollár III.3.7, p. 176, référence à II.5.14) pour prouver qu'on a $(K.K) \leq 3$.

On a vu plus haut que toute surface de Del Pezzo X avec $(K.K) \leq 4$ possède une courbe exceptionnelle, et donc $N(X)$ est de rang au moins deux pour une telle surface, ce que nous avons exclu.

L'argument des deux points doubles laisse malheureusement ouvert le cas $(K.K) = 5$.

Si l'on se contente d'imposer un point double, cela n'impose que 3 conditions linéaires. Ainsi pour $(K.K) \geq 4$, et donc $h^0(-K) \geq 5$, il existe un sous-vectoriel de dimension deux de $H^0(X,-K)$ formé de courbes singulières, nécessairement intègres, de genre arithmétique un. Ces courbes sont donc de genre géométrique zéro.

Le théorème de Noether/Tsen suffit alors pour conclure que la surface X est birationnelle au plan projectif. Ce type d'argument suffit dans une démonstration du théorème de Castelnuovo (voir plus loin, §4).

Voici comment l'utiliser pour conclure la démonstration, en toute caractéristique, par un argument analogue à celui de Kodaira dans le cas classique (voir ci-dessous). L'argument d'un seul point double montre que, pour $(K.K) \geq 4$, sur la surface X sur le corps algébriquement clos k, deux k-points quelconques sont reliés par une courbe intègre de genre arithmétique zéro. Le même argument vaut sur toute extension algébriquement close de k, en particulier un corps algébriquement clos Ω de degré de transcendance assez grand pour contenir le corps des fonctions de X. Le groupe de Chow $A_0(X_\Omega) = 0$ des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle est nul. Un argument de Bloch dans une version de Salberger, implique alors que le groupe de Brauer $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)$ est fini. De la suite de Kummer on déduit alors que l'on a $\rho = b_2$, où b_2 est la dimension de $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbf{Q}_l)$. Donc $1 = b_2$. La formule de Noether l-adique donne alors $(K.K) = 9$, et ceci contredit $(K.K) \leq 5$ (obtenu plus haut par l'argument des deux points doubles). $\square$

Remarque Sur le corps des complexes, une méthode classique (Kodaira) pour traiter cette proposition est la suivante. De $h^2(O_X) = 0$ on conclut $\rho = b_2$ (théorie de Hodge). On a alors $(K.K)+\rho = 10$ et donc $(K.K) = 9$. Il faut éliminer le cas où $r = 1$, i.e. $-K$ est un générateur de $N(X)/\text{tors}$. On a un isomorphisme $N(X)/\text{tors} \simeq H_{\text{Betti}}(X(\mathbf{C},\mathbf{Z})/\text{tors}$ et la dualité de Poincaré assure que la forme d'intersection (à valeurs dans $\mathbf{Z}$) sur ce dernier groupe est non dégénérée. Il en est donc de même de la forme sur $N(X)/\text{tors}) = \mathbf{Z}(-K)$. Ainsi $(K.K) = 1$, contradiction.

On pourait développer un argument analogue sur k de caractéristique positive différente de 3. La suite de Kummer montre qu'on a un isomorphisme $N(X) \otimes \mathbf{Z}_l \simeq H^2_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_l)$, et cet isomorphisme respecte les formes d'intersection. La dualité de Poincaré l-adique assure que la forme d'intersection sur $H^2_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}_l)/\text{tors}$, à valeurs dans $\mathbf{Z}_l$, est non-dégénérée. L'entier $9 = (K.K)$ appartient donc à $\mathbf{Z}_l^*$ pour tout l différent de la caractéristique du corps de base. Prenant $l = 3$, on obtient une contradiction.

Lemme 3.11 *Soient k un corps et X/k une surface de Del Pezzo. Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme birationnel. Alors Y est une surface de Del Pezzo.*

Démonstration On peut supposer le corps k algébriquement clos. Comme tout tel morphisme est un composé déclatements, on se ramène au cas où $f : X \to Y$ est l'éclatement en un point P de Y. On a $(K_Y.K_Y) = (K_X.K_X) + 1$. Si C est une courbe intègre sur Y, soit C_1 son transformé propre sur X. Le lemme 2.2 assure $(-K_Y.C) \geq (-K_X.C_1)$. On conclut avec le critère de Nakai-Moishezon.□

Proposition 3.12 *Soient k un corps algébriquement clos et X/k une surface de Del Pezzo. Alors soit X est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, soit X est isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en $0 \leq r \leq 8$ points en position générale, c'est-à-dire ne satisfaisant aucune des conditions :*

(a) $r \geq 3$ et trois parmi les r points sont sur une droite ;

(b) $r \geq 6$ et six parmi les r points sont sur une conique;

(c) $r = 8$ et il existe une cubique passant par les 8 points qui est singulière en l'un des 8 points.

Réciproquement, toute telle surface est une surface de Del Pezzo.

Pour $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, on a $(K.K) = 8$. Pour une surface de Del Pezzo éclatée de $\mathbf{P}^2$ en r points, on a $(K.K) = 9 - r$.

Démonstration Montrons d'abord que X est isomorphe soit à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ soit à un éclaté de $\mathbf{P}^2$.

Supposons d'abord X minimale. D'après le théorème 2.1 et la proposition 3.10, soit X est isomorphe à $\mathbf{P}^2$, soit X est équipé d'une fibration $X \to C$ sur une courbe C (projective, lisse, intègre) dont toutes les fibres sont isomorphes à $\mathbf{P}^1$. Par un argument déjà développé (thm. 3.3), X est alors birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times C$, et de $H^1(X, O_X) = 0$, on déduit $H^1(C, O_C) = 0$, et donc $C \simeq \mathbf{P}^1$. Ainsi $X \to \mathbf{P}^1$ est une surface géométriquement réglée. Du théorème de Tsen on déduit que la surface X est réglée. On sait qu'alors X est nécessairement une des surfaces $F_n/\mathbf{P}^1$, définie comme le fibré sur $\mathbf{P}^1$ associé au fibré vectoriel $O_{\mathbf{P}^1} \oplus O_{\mathbf{P}^1}(n)$ (avec $n \geq 0$ entier). Je renvoie au livre de Beauville pour la théorie de ces surfaces. Elles satisfont en particulier les propriétés suivantes. On a $F_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Pour $n \geq 1$, il existe sur F_n une unique courbe C_n d'auto-intersection strictement négative. Cette courbe est une section de $F_n \to \mathbf{P}^1$, en particulier elle est isomorphe à $\mathbf{P}^1$, et l'on a $(C_n.C_n) = -n$ et $(C_n.-K) = -n$. En particulier, pour $n \geq 2$, $-K$ n'est pas nef, et donc pas ample. Pour $n = 1$, F_1 possède la courbe exceptionnelle C_1, donc n'est pas minimale. D'après nos hypothèses, on a donc $X \simeq F_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. En résumé : une surface de Del Pezzo minimale est isomorphe à $\mathbf{P}^2$ ou à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

Soit Z l'éclaté de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en un point P. Les transformés propres des génératrices passant par P sont deux courbes exceptionnelles E_1 et E_2 sur Z qui ne ne rencontrent pas. On peut donc les contracter simultanément. Soit $g : Z \to Z_1$ cette contraction. Le rang de $N(Z_1)$ est un. C'est donc une surface minimale. On vérifie aisément que le faisceau canonique sur Z_1 n'est pas nef (en calculant par exemple l'intersection de K avec l'image dans Z_1 de la courbe exceptionnelle E_P de l'éclatement $Z \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$). D'après le théorème 2.1 et la proposition 3.10, on a $Z_1 \simeq \mathbf{P}^2$ (un bien gros pavé pour écraser une mouche; faire l'argument géométriquement).

Soit maintenant X une surface de Del Pezzo non nécessairement minimale. Soit $g : X \to Y$ une suite de contractions avec Y minimale (comme le rang de $N(X)$ chute de un par uen contraction, on ne peut contracter à l'infini). D'après le lemme 3.11, Y est une surface de Del Pezzo, et d'après ce qu'on vient de voir, Y est isomorphe soit à $\mathbf{P}^2$ soit à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Si Y n'est pas $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, l'argument du paragraphe précédent montre que l'on peut supposer $Y = \mathbf{P}^2$.

Supposons dorénavant $Y = \mathbf{P}^2$. Dans la série d'éclatements on ne saurait éclater un point sur une courbe exceptionnelle intermédiaire : le transformé propre de la courbe exceptionnelle serait alors une courbe C isomorphe à $\mathbf{P}^1$ et d'auto-intersection ≤ -2, donc telle que $(C.-K) \leq 0$, et $-K$ ne serait pas ample. La surface X est donc isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en r points.

Comme on a $1 \leq (K_X.K_X) = (K_{\mathbf{P}^2}.K_{\mathbf{P}^2}) - r = 9 - r$, on a $r \leq 8$. Les configurations mentionnées dans l'énoncé sont éliminées par le même argument que plus haut : le transformé propre d'une des courbes mentionnées serait une courbe intègre d'auto-intersection ≤ -2, et on aurait $(C. - K) = 2 - 2p_a(C) + (C.C) \leq 0$, le faisceau $-K$ ne serait pas ample.

Pour la réciproque, je renvoie aux notes de Demazure. □

Proposition 3.13 *Soient k un corps algébriquement clos et X/k une surface de Del Pezzo non minimale, et soit $X \to \mathbf{P}^2$ une présentation de cette surface comme l'éclaté de $r \leq 8$ points en position générale. Les courbes exceptionnelles sur X sont en nombre fini, ce sont :*

(a) les images réciproques des r -points;

(b) les transformés propres des droites de $\mathbf{P}^2$ passant par exactement deux des r points;

(c) les transformés propres des coniques de $\mathbf{P}^2$ passant exactement par 5 des r points;

(d) les transformés propres des cubiques passant par 6 des r points et singulières en le septième.

Démonstration Laissée au lecteur.

De cette description on déduit non seulement le nombre des courbes exceptionnelles sur X (les 27 droites sur une surface cubique par exemple) mais aussi toutes leurs relations d'incidence.

Appendice : Le théorème de rationalité de Castelnuovo

Théorème (Castelnuovo) *Soit k un corps algébriquement clos et X une k-surface projective, lisse, connexe. Si $P_2 = l(2K) = 0$ et $q = h^1(X, O_X) = 0$, alors X est une surface rationnelle, i.e. birationnelle à l'espace projectif $\mathbf{P}^2$.*

Démonstration Comme les conditions sont birationnellement invariantes, on peut supposer que l'on est dans l'un des cas du théorème 2.1.

On peut supposer X minimale.

On a $h^2(O_X) = h^0(K) = 0$ puisque $h^0(2K) = 0$. Ainsi $\chi(O_X) = 1$. On a $h^2(-K) = h^0(2K)$ (dualité de Serre), donc $h^2(-K) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch appliqué à $-K$ donne alors $h^0(-K) \geq (K.K) + 1$.

Supposons K nef. Alors $(K.K) \geq 0$, et donc $h^0(-K) \geq 1$ Soit $D \geq 0$ un diviseur section de $-K$. Pour tout faisceau ample H, on a $(H.D) \geq 0$, et par ailleurs $(H.K) \geq 0$ car K est nef. Ainsi $(H.D) = 0$, ce qui n'est possible que si $D = 0$. Mais alors $K = 0$, et ceci contredit $h^0(2K) = 0$. Ainsi K n'est pas nef.

Supposons que X soit munie d'une structure de surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe projective et lisse Y. Alors X est birationnelle à $Z = \mathbf{P}^1 \times Y$ par le théorème de Tsen et le fait qu'une conique lisse sur un corps F avec un point F-rationnel est isomorphe à une droite. Par invariance birationnelle, on a $h^1(Z, O_Z) = 0$ et donc $h^1(Y, O_Y) = 0$, donc $Y \simeq \mathbf{P}^1$, donc finalement X est birationnelle à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, donc à $\mathbf{P}^2$.

Si $N(X)$ est de rang un, alors $-K$ est ample. On sait alors (proposition 3.10) que X est isomorphe à $\mathbf{P}^2$. □

Remarque Ce dernier cas (rang de $N(X)$ égal à un) est celui qui dans les démonstrations traditionnelles requiert des arguments "transcendants". Rappelons que dans la démonstration de 3.10, nous avons indiqué une méthode simple pour établir l'énoncé plus faible que X est birationnel à $\mathbf{P}^2$. Le seul argument fin en caractéristique positive utilisé dans la démonstration est le fait que si $H^2(X, O_X) = 0$, alors la variété de Picard de X est réduite. □

Appendice : le théorème de Reider

Reider (Annals of Math., 1988) a montré un théorème général permettant de montrer que certains systèmes linéaires donnent naissance à des morphismes ou des plongements.

Le théorème est le suivant (d'après un exposé de Beauville) :

Théorème (Reider) *Soit k un corps algébriquement clos, car(k)=0, soit X une surface projective, lisse, connexe. Soit D un faisceau inversible nef, et soit $L = K + D$. Alors :*

(i) Supposons $(D.D) \geq 5$. Si x est un point base de $H^0(L)$, alors il existe un diviseur effectif E passant par x et tel que (a) $(D.E) = 0$ et $(E.E) = -1$, ou (b) $(D.E) = 1$ et $(E.E) = 0$.

(ii) Supposons $(D.D) \geq 9$. Supposons que $H^0(L)$ n'a pas de point base. Soit φ_L le morphisme associé. Soient $x \neq y$ deux points (fermés) de X. Si $\varphi_L(x) = \varphi_L(y)$, alors il existe un diviseur effectif E tel que l'on ait l'un des cas suivants :

(a) $(D.E) = 0$, et $(E.E) = -1$ ou $(E.E) = -2$;

(b) $(D.E) = 1$, et $(E.E) = -1$ ou $(E.E) = 0$;

(c) $(D.E) = 2$, et $(E.E) = 0$

(d) D est numériquement équivalent à $3E$ et $(E.E) = 1$.

(iii) Supposons $(D.D) \geq 9$. Supposons que $H^0(L)$ n'a pas de point base. Si φ_L n'est pas une immersion en le point x, alors il existe un diviseur effectif passant par x et satisfaisant l'une des conditions ci-dessus. $\square$

Ce théorème donne d'excellents résultats pour les morphismes associés à nK pour $n > 0$ et X surface de type général. Il donne aussi des informations intéressantes pour les autres types de surfaces. Soit X une surface de Del Pezzo. Pour $(K.K) \geq 3$, prenons $D = -2K$. Alors $L = -K$. On montre que L est ample (observer que $(D.E) = (-2K.E)$ est pair et non nul; pour un faisceau M, la formule de Riemann-Roch implique que $(M.M - K)$ est pair.)

Ainsi $(D.E) = 0$ et $(D.E) = 1$ sont exclus. Le (c) est exclu par l'argument de parité ($(K.E) = -1$ et $(E.E) = 0$ impossible). Quant à (d), il impliquerait $4(K.K) = (D.D) = 9(E.E) = 9$.

Pour $(K.K) = 2$, le même type d'argument montre que $-K$ est sans point base et que $-2K$ est très ample.

Pour $(K.K) = 1$, le même type d'argument montre que $-3K$ est très ample.

4. Surfaces de Del Pezzo de degré ≥ 5 : points rationnels et k-rationalité.

Dans ce paragraphe, k est un corps arbitraire. On note $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Etant donnée une surface de Del Pezzo X/k, on appelle degré de X, et on note d, l'entier $d = (K_X.K_X)$. Pour toute k-variété X, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

Rappel 4.0 *Pour toute k-variété projective, lisse, géométriquement intègre, on dispose de la suite exacte*

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X).$$

Si X possède un k-point, ou plus généralement si X possède un zéro-cycle de degré un, alors la flèche $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ possède une rétraction, donc est injective. On a alors $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathcal{G}}$. Il en est de même trivialement si $\mathrm{Br}(k) = 0$.

D'un point de vue qualitatif, la description des points rationnels des surfaces avec $d \geq 5$ est très simple : dès qu'une telle surface possède un point k-rationnel, elle est k-birationnelle au plan projectif $\mathbf{P}^2_k$. En outre, il y a des critères cohomologiques (cohomologie galoisienne) pour l'existence d'un point rationnel.

Proposition 4.1. *Soient k un corps et X une k-surface. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X est une surface de Del Pezzo de degré 9.

(ii) X est une surface de Severi-Brauer, c'est-à-dire une k-forme du plan $\mathbf{P}^2_k$: il existe une extension finie séparable de corps K/k et un K-isomorphisme $X_K \simeq \mathbf{P}^2_K$.

Démonstration Il suffit de démontrer l'énoncé sur un corps algébriquement clos. Que (ii) implique (i) est clair. Toute surface de Del Pezzo non isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ est isomorphe à un éclaté du plan en un certain nombre de points (Prop. 3.12). Comme on $(K_{\mathbf{P^2}}.K_{\mathbf{P^2}})$=9, l'hypothèse $(K.K) = 9$ montre que dans ce cas il n'y a pas d'éclatement. □

Proposition 4.2 (F. Châtelet) *Soient k un corps parfait et X une k-variété de dimension n. Supposons qu'il existe une extension finie K/k de corps telle que X_K soit K-isomorphe à $\mathbf{P}^n_K$. Alors X/k est projective et lisse, et les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La k-variété X possède un k-point.

(ii) La k-variété possède un zéro-cycle de degré un.

(ii) La k-variété X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^n_k$.

Si $\mathrm{Br}(k) = 0$, *ces conditions sont automatiquement satisfaites.*

Démonstration On sait que $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathbf{Z}H$, et que $-(n+1)H$ est l'image de $K \in \mathrm{Pic}(X)$. La classe de H est invariante sous Galois. Soit $\alpha_H = \partial(H) \in \mathrm{Br}(k)$ son image par l'application $\partial : \mathrm{Pic}(\overline{X})^{\mathcal{G}} \to \mathrm{Br}(k)$ dans la suite (*). Si H est dans l'image de $\mathrm{Pic}(X)$, on voit que le système des sections de H définit un isomorphisme de X avec un espace projectif (c'est clair sur $\overline{k}$, et un k-morphisme qui devient un isomorphisme par passage à $\overline{k}$ est un isomorphisme). Réciproquement, si X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^n_k$, alors H est dans l'image de $\mathrm{Pic}(X)$. Ainsi X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^n_k$ si et seulement si $\alpha_H = \partial(H) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$. L'énoncé suit alors du rappel 4.0.

Exercice 4.2.1 Soit p un nombre premier et soient X et Y deux variétés de Severi-Brauer sur k, de dimension $p-1$. Soit $f : Y \to X$ un morphisme dominant, de degré r.

(a) Si $X(k) = \emptyset$, alors $r \equiv 1 \bmod p$.

(b) Si X et Y sont de dimension 1, c'est-à-dire sont des coniques, et si $X(k) = \emptyset$, alors X et Y sont k-isomorphes.

(b) Si X et Y sont de dimension 1, et si $Y(k) = \emptyset$, alors $X(k) \neq \emptyset$ si et seulement si r est pair.

Proposition 4.3 *Soit k un corps. Une k-surface X est une surface de Del Pezzo de degré 8 si et seulement si elle est k-isomorphe à une surface de l'un des types suivants :*

(i) une k-forme du produit $\mathbf{P}^1_k \times_k \mathbf{P}^1_k$.

(ii) l'éclaté du plan $\mathbf{P}^2_k$ en un point k-rationnel.

Dans le cas (ii), X est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$. Dans le cas (i), X est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$ si et seulement si $X(k) \neq \emptyset$.

Si une surface de Del Pezzo de degré 8 possède un point rationnel dans une extension de degré impair du corps de base, alors elle possède un point k-rationnel. Si $\mathrm{Br}(k) = 0$, *alors X possède un point k-rationnel.*

Démonstration Que les surfaces du type (i) ou (ii) soient de Del Pezzo est clair. Soit X/k une surface de Del Pezzo de degr é 8. Alors $\overline{X}$ est isomorphe sur $\overline{k}$ soit à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ soit à l'éclaté du plan en un point (prop. 3.12). Dans le second cas, il existe sur $\overline{X}$ une courbe exceptionnelle et une seule. Cette courbe est donc définie sur k, et isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$. En la contractant sur k, on obtient une surface de Del Pezzo de degré 9 avec un point rationnel, donc une surface k-isomorphe à $\mathbf{P}^2_k$ d'après la proposition 4.2.

Pour établir la seconde partie de l'énoncé, il suffit de considérer le cas où X est une forme de $\mathbf{P}^1_k \times_k \mathbf{P}^1_k$. On a $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$, où e_1 et e_2 désignent les deux génératrices de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. le faisceau canonique $K \in \mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(\overline{X})$ a pour classe $-2e_1 - 2e_2$. Ainsi $H = e_1 + e_2$ est invariant sous l'action du groupe de Galois $\mathcal{G}$. Comme on a $(K.K) = 8$, la surface possède un zéro-cycle de degré 8. Si X possède une point dans une extension de degré impair de k, alors X possède un zéro-cycle de degré 1.

Supposons donc que X possède un zéro-cycle de degré 1, ou bien que $\mathrm{Br}(k) = 0$. On a alors $H \in \mathrm{Pic}(X)$. Le système linéaire $H^0(X, H)$ est sans point base, et réalise un k-isomorphisme entre X et une quadrique lisse $Q \subset \mathbf{P}^3_k$. Si une quadrique lisse $Q \subset \mathbf{P}^{n+1}_k$ de dimension $n \geq 1$ possède un k-point, alors Q est k-birationnelle à $\mathbf{P}^n_k$ (considérer les droites passant par le point). Si une quadrique possède un point dans une extension de degré impair du corps de base, alors elle possède un point k-rationnel (théorème de T.A. Springer). Enfin, si $\mathrm{Br}(k) = 0$, alors toute conique sur k possède un point k-rationnel, et il en est donc de même de toute quadrique. Ceci permet de conclure. □

Proposition 4.4 *Soit k un corps. Une k-surface X est une surface de Del Pezzo de degré 7 si et seulement si elle est k-isomorphe à l'éclaté du plan $\mathbf{P}^2_k$ en un sous-schéma fermé $S = \mathrm{Spec}(A)$, avec $A = k \times k$ ou $A = K$ avec K/k extension finie séparable de corps de degré 2. Tout k-surface de Del Pezzo de degré 7 est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$.*

(En termes plus imagés, X est l'éclaté du plan en deux points rationnels ou en deux points conjugués.)

Démonstration On connaît l'énoncé lorsque k est algébriquement clos (prop. 3.12). La configuration des courbes exceptionnelles est ici très simple : il y a trois courbes E_0, E_1, E_2, les courbes E_1 et E_2 ne se rencontrent pas et E_0 rencontre E_1 et E_2 (transversalement). La courbe E_0 est donc invariante sous le groupe de Galois, définie sur k et isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$ (on a en effet $(E_0.E_0) = -1$, donc la courbe de genre zéro E_0 possède un zéro-cycle de degré un). En particulier $X(k) \neq \emptyset$. Le couple (E_1, E_2) est donc globalement invariant sous $\mathcal{G}$, et on peut le contracter sur k, ce qui donne une surface de Del Pezzo de degré 9 avec un point k-rationnel, donc k-isomorphe à $\mathbf{P}^2_k$. □

Proposition 4.5 *Soient k un corps et X une k-surface de Del Pezzo de degré 6.*

(i) La surface $\overline{X}$ possède 6 courbes exceptionnelles. Le complémentaire de ces six courbes est un espace principal homogène sous un k-tore (de dimension deux).

(ii) La surface X possède un k-point si et seulement si elle est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$.

(iii) Si le corps k est de dimension cohomologique un, $X(k)$ est non vide.

(iv) Si X possède un zéro-cycle de degré un, alors X possède un point k-rationnel.

Démonstration. Commencçons par établir (ii). Les courbes exceptionnelles sur $\overline{X}$ forment un hexagone. Sur une extension K/k de degré divisant 2 de k, il existe un triplet de courbes exceptionnelles gauches deux à deux globalement invariantes sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/E)$. On peut donc contracter ces courbes sur E, et on obtient une surface de Del Pezzo de degré 9. Sur une extension F/k de degré divisant 3 de k, il existe un doublet de courbes exceptionnelles gauches deux à deux, qu'on peut contracter sur L, obtenant une surface de Del Pezzo de degré 8 (forme de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$). Sous les diverses hypothèses de l'énoncé, on obtient que X_E est E-birationnelle à $\mathbf{P}^2_E$ et X_F est F-birationnelle à $\mathbf{P}^2_F$. On trouve donc sur $X \subset \mathbf{P}^6_k$ un ensemble de deux points conjugués et un ensemble de trois points conjugués (à moins qu'on n'ait déjà trouvé un point k-rationnel). Par ces 5 points on peut faire passer un hyperplan k-rationnel qui en général est une courbe lisse de genre 1 (les autres cas peuvent être examinés un à un). Cette courbe de genre 1 possède un zéro-cycle de degré 3-2=1, donc un point rationnel P. Si le point P est sur l'une des courbes exceptionnelles, alors on voit que la surface X n'est pas k-minimale : lénoncé résulte alors des propositions précédentes. Supposons donc P est en-dehors des courbes exceptionnelles. Eclatons-le. Ceci donne une surface de Del Pezzo de degré 5, équipée de la courbe exceptionnelle image réciproque de P. En étudiant la configuration des courbes exceptionnelles, on voit qu'il existe exactement trois courbes exceptionnelles sur $\overline{X}$ qui coupent E, et ces courbes ne se rencontrent pas deux à deux. En contractant ce triplet globalement rationnel, on obtient une surface de Del Pezzo de degré 8, et on conclut par les énoncés précédents : l'énoncé (ii) est établi. □

Compléments Manin observe que toutes les surfaces de Del Pezzo de degré 6 sont isomorphes sur $\overline{k}$. En prenant celle d'équation $x_0y_0z_0 = x_1y_1z_1$ dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, il montre que le complémentaire des courbes exceptionnelles est le tore $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$. (On pourrait aussi considérer, dans $\mathbf{P}^2$, le complémentaire de trois droites en position générale.) Pour X une k-surface de Del Pezzo de degré 6 quelconque, le complémentaire U des courbes exceptionnelles est donc géométriquement un tore. Il s'en suit que c'est automatiquement un espace homogène sous le k-tore T de groupe des caractères le module galoisien $\overline{k}[U]/\overline{k}^*$. L'espace homogène a donc une classe dans le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(k, T)$, classe dont la nullité équivaut à l'existence d'un k-point sur U. Les k-tores de dimension deux ont été classifiés par Voskresenskiĭ. Ils sont tous k-birationnels à $\mathbf{P}^2_k$ ([Vosk], chap 2, §4.9).

Proposition 4.6 *Soit k un corps. Soit X une k-surface de Del Pezzo de degré 5. Si X possède un point k-rationnel, alors X est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$.*

Démonstration On examine d'abord les cas où le point k-rationnel qu'on s'est donné est sur une des courbes exceptionnelles, et l'on se convainc qu'alors la surface X n'est pas k-minimale, ce qui ramène aux énoncés précédents. Si le point k-rationnel n'est sur aucune des courbes exceptionnelles, on l'éclate, ce qui donne une surface de Del Pezzo Y de degré 4, équipée d'une k-courbe exceptionnelle E. La configuration des courbes exceptionnelles (sur une clôture séparable) sur une surface de Del Pezzo de degré 4 (regarder le modèle plan) montre qu'il existe exactement 5 courbes exceptionnelles sur $\overline{Y}$ qui rencontrent E, et ces courbes ne se rencontrent pas deux à deux. Comme E est définie sur k, l'ensemble de ces 5 courbes exceptionnelles est invariant sous l'action du groupe de Galois. On peut donc les contracter simultanément sur k, et on obtient une k-surface de Del Pezzo de degré 9 équipée d'un k-point, donc $\mathbf{P}^2_k$. □

Remarque D'après la formule de Noether on a $(K.K) + c_2 = 12$. Ainsi la deuxième classe de Chern du fibré tangent, qui est une classe dans le groupe de Chow de dimension zéro de X est de degré 7. Il existe donc une extension de corps E/k de degré premier à 5 telle que $X(E) \neq \emptyset$. En fait toute surface de Del Pezzo de degré 5 possède un point k-rationnel. Ceci a été établi par diverses méthodes par Swinnerton-Dyer, Shepherd-Barron, Skorobogatov, Kollár (son livre, III.3.13).

Proposition 4.7 *Soit k un corps de nombres, et soit X une k-surface de Del Pezzo de degré $(K.K) \geq 5$. Alors le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.*

Démonstration Si l'une de ces surfaces possède un k-point, alors elle est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$ d'après ce qui précède. Elle satisfait donc l'approximation faible. Au vu des propositions précédentes, il suffit d'établir le principe de Hasse pour les surfaces de Del Pezzo de degré 9, 8, 6.

Pour $(K.K) = 9$, on a vu qu'une variété de Severi-Brauer X possède un point rationnel si et seulement si une certaine classe de cohomologie $\alpha_X \in \mathrm{Br}(k)$ est nulle. Le principe de Hasse résulte dans ce cas de l'injection $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \oplus_v \mathrm{Br}(k_v)$ (corps de classes). Cet argument est dû à F. Châtelet.

Soit X avec $(K.K) = 8$ et avec $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v. La classe $\partial(H) \in \mathrm{Br}(k)$ (notation comme à la proposition 4.3) est alors nulle (grâce à l'injection $\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \oplus_v \mathrm{Br}(k_v)$). Ainis X est k-isomorphe à une quadrique $Q \subset \mathbf{P}^3_k$. C'est alors un résultat classique que le principe de Hasse vaut pour les quadriques.

Soit X avec $(K.K) = 6$ et avec $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v. On peut établir le principe de Hasse dans ce cas en procédant comme dans la proposition 4.5. Une méthode plus élaborée (Manin) consiste à passer par les espaces principaux homogènes de tores et à utiliser le fait général (Voskresenkiĭ) que si un k-tore T est k-rationnel, alors les espaces principaux homogènes sous T satisfont le principe de Hasse ([Vosk], §11.6, Cor. 2). □

AJOUTER : résultats d'Iskvoshikh (Isk 79) sur les surfaces fibrées en coniques qui sont aussi des Del Pezzo, sur les surfaces fibrées en coniques relativement minimales mais pas minimales.

Appendice au chapitre 4 : k-rationalité de certaines variétés de dimension plus grande que 2.

Proposition 4.8 *Soit k un corps, car(k) $\neq 2$. Soit $n \geq 4$ un entier. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète, géométriquement intègre de deux quadriques. S'il existe un point k-rationnel singulier non conique sur X, alors X est k-birationnelle à une quadrique géométriquement intègre dans $\mathbf{P}^{n-1}_k$. Si en outre X possède un point k-rationnel, alors X est une variété k-rationnelle.*

Démonstration Voir [CT/Sa/SwD], Crelle **373** Prop. 2.1. L'idée géométrique est de faire une projection depuis le point donné. Le dernier énoncé résulte du lemme de Nishimura(-Lang).

Proposition 4.9 *Soit k un corps, car(k)$\neq 2$. Soit $n \geq 4$ un entier. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète, géométriquement intègre, non conique, de deux quadriques. Si X contient une sous k-variété L qui est une k-droite de $\mathbf{P}^n_k$, alors X est k-rationnelle, sauf si k est infini et tous les k-points de X sont singuliers. Dans ce dernier cas, L est contenue dans le lieu singulier de X et X est k-birationnel au produit d'un espace projectif et d'une quadrique non singulière.*

Démonstration Voir [CT/Sa/SwD], Crelle **373** Prop. 2.2. L'idée géométrique est de considérer l'espace projectif des 2-plans passant par la droite L. Soit H un tel 2-plan. Si X est l'intersection de deux quadriques Q_1 et Q_2, en général $H \cap Q_1 = L \cup L'$ et $H \cap Q_2 = L \cup L$", où L' et L" sont deux k-droites de H. On associe alors à H le k-point $L' \cap L$" de X. Inversement, à un k-point M de X non situé sur X on associe le 2-plan engendré par L et M.

Proposition 4.10 *Soit k un corps, car(k)$= 0$, et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $n = 2m \geq 4$ un entier pair. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une intersection complète, géométriquement intègre, de deux quadriques. Supposons :*

(i) X est régulière en codimension deux, ou X est régulière en codimension 1 et n'est pas un cône.

(ii) $\overline{X}$ contient deux sous espaces linéaires $\mathbf{P}^{m-1} \subset \mathbf{P}^n$ qui ne se rencontrent pas et sont globalement définis sur k.

(iii) X contient un k-point lisse.

Alors X est une variété k-rationnelle.

Démonstration Voir [CT/Sa/SwD], Crelle **373** Thm. 2.5. (Il y a un énoncé plus technique en caractéristique différente de 2, voir [CT/Sa/SwD], Crelle **373** Thm. 2.4). L'idée géométrique est l'analogue de celle qui permet d'établir la rationalité d'une surface cubique lisse une fois connue l'existence de deux droites gauches sur cette surface.